

**В. В. Прасолов**

---

**Элементы  
теории гомологий**

МЦНМО

Серия «Классические направления в математике»

В. В. ПРАСОЛОВ

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ

Электронное издание

Москва  
Издательство МЦНМО  
2017

УДК 515.14  
ББК 22.152  
П70

Прасолов В. В.  
Элементы теории гомологий  
Электронное издание  
М.: МЦНМО, 2017.  
448 с.: ил.  
ISBN 978-5-4439-2637-7

Эта книга является непосредственным продолжением книги «Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии». Она начинается с определения симплициальных гомологий и когомологий; приводятся многочисленные примеры их вычисления и их приложений. Затем обсуждается умножение Колмогорова—Александера на когомологиях. Значительная часть книги посвящена различным приложениям (симплициальных) гомологий и когомологий. Многие из них связаны с теорией препятствий. Одним из таких примеров служат характеристические классы векторных расслоений. Сингулярные гомологии и когомологии определяются во второй половине книги. Затем рассматривается ещё один подход к построению теории когомологий — когомологии Чеха и тесно связанные с ними когомологии де Рама. Книга завершается различными приложениями теории гомологий в топологии многообразий. В книге приведено много задач (с решениями) и упражнений для самостоятельного решения.

Книга содержит много конкретного материала и приложений, которые могут заинтересовать даже специалистов в этой области.

Для студентов старших курсов и аспирантов математических и физических специальностей; для научных работников.

Подготовлено на основе книги: *В. В. Прасолов. Элементы теории гомологий.* — 2-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО, 2014. — ISBN 978-5-4439-0242-5.

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.  
Тел. (499) 241-08-04.  
<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-2637-7

© Прасолов В. В., 2006  
© МЦНМО, 2017

# Оглавление

Предисловие . . . . .	7
Некоторые обозначения . . . . .	9
<b>Глава I. Симплициальные гомологии</b>	<b>10</b>
§ 1. Определение и некоторые свойства . . . . .	10
1.1. Определение групп гомологий . . . . .	10
1.2. Цепные комплексы . . . . .	13
1.3. Гомологии симплекса и его границы . . . . .	14
§ 2. Инвариантность гомологий . . . . .	15
2.1. Ациклические носители . . . . .	15
2.2. Топологическая инвариантность гомологий . . . . .	17
2.3. Гомотопическая инвариантность гомологий . . . . .	20
§ 3. Относительные гомологии . . . . .	21
3.1. Точная гомологическая последовательность пары . . . . .	22
3.2. Приведённые гомологии . . . . .	27
3.3. Последовательность Майера—Вьеториса . . . . .	28
§ 4. Когомологии и формулы универсальных коэффициентов . . . . .	31
4.1. Когомологии . . . . .	31
4.2. Тензорное произведение и гомологии с произвольными коэффициентами . . . . .	36
4.3. Группы $\text{Tot}$ и $\text{Ext}$ . . . . .	38
4.4. Формулы универсальных коэффициентов . . . . .	43
§ 5. Некоторые вычисления . . . . .	45
5.1. Фундаментальный класс . . . . .	45
5.2. Клеточные гомологии . . . . .	48
5.3. Индекс пересечения и изоморфизм Пуанкаре . . . . .	52
5.4. Реализация гомологических классов поверхностей . . . . .	59
§ 6. Эйлерова характеристика и теорема Лефшеца . . . . .	62
6.1. Эйлерова характеристика . . . . .	62
6.2. Теорема Лефшеца о неподвижной точке . . . . .	67

<b>Глава II. Кольцо когомологий</b>	<b>70</b>
§ 7. Умножение в когомологиях . . . . .	70
7.1. Гомологии тотального цепного комплекса . . . . .	70
7.2. Определение умножения в когомологиях . . . . .	72
7.3. Кольца когомологий двумерных поверхностей . . . . .	76
§ 8. Гомологии и когомологии многообразий . . . . .	80
8.1. Сар-произведение . . . . .	80
8.2. Кольца когомологий многообразий . . . . .	85
8.3. Два примера . . . . .	87
8.4. Изоморфизм Лефшеца . . . . .	88
8.5. Двойственность Александра . . . . .	92
8.6. Тройное произведение Масси . . . . .	95
8.7. Форма пересечения и сигнатура многообразия . . . . .	98
8.8. Гомоморфизм Бокштейна и изоморфизм Пуанкаре . . . . .	102
8.9. Линзы . . . . .	103
§ 9. Теорема Кюннета . . . . .	105
9.1. Цепной комплекс $C_*(K \times L)$ . . . . .	106
9.2. Алгебраическая теорема Кюннета . . . . .	107
9.3. Гомологии прямого произведения . . . . .	109
9.4. Теорема Кюннета для когомологий . . . . .	111
9.5. Умножение в когомологиях и теорема Кюннета . . . . .	113
9.6. Внешнее когомологическое произведение . . . . .	117
<b>Глава III. Применения симплициальных гомологий</b>	<b>122</b>
§ 10. Гомологии и гомотопии . . . . .	122
10.1. Теорема Гуревича . . . . .	122
10.2. Теория препятствий . . . . .	126
10.3. Теорема Хопфа—Уитни . . . . .	130
10.4. Алгебраически тривиальные отображения . . . . .	132
10.5. Пространства Эйленберга—Маклейна . . . . .	134
10.6. Когомологии и отображения в пространства типа $K(\pi, n)$ . . . . .	137
10.7. Пространства Мура . . . . .	140
§ 11. Характеристические классы . . . . .	143
11.1. Векторные расслоения . . . . .	143
11.2. Когомологии с локальными коэффициентами . . . . .	148
11.3. Характеристические классы Штифеля—Уитни . . . . .	152
11.4. Свойства классов Штифеля—Уитни . . . . .	156
11.5. Приложения классов Штифеля—Уитни . . . . .	163
11.6. Универсальное расслоение . . . . .	167
11.7. Стабильные когомологии многообразий Грассмана . . . . .	172
11.8. Характеристические классы Чженя . . . . .	177

11.9.	Расщепляющие отображения . . . . .	182
§ 12.	Действия групп . . . . .	189
12.1.	Симплициальные действия . . . . .	189
12.2.	Эквивариантная симплициальная аппроксимация . . . . .	192
12.3.	Неподвижные точки и неподвижные симплексы . . . . .	193
12.4.	Трансфер . . . . .	194
12.5.	Теория Смита . . . . .	197
§ 13.	Квадраты Стиррода . . . . .	201
13.1.	Построение квадратов Стиррода . . . . .	201
13.2.	Свойства квадратов Стиррода . . . . .	206
<b>Глава IV.</b>	<b>Сингулярные гомологии</b>	<b>212</b>
§ 14.	Основные определения и свойства . . . . .	212
14.1.	Теорема о вырезании и точная последовательность Май- ера—Вьеториса . . . . .	215
14.2.	Аксиомы теории (ко)гомологий . . . . .	220
14.3.	Теорема Жордана—Брауэра . . . . .	222
14.4.	Изоморфизм между симплициальными и сингулярными гомологиями . . . . .	224
14.5.	Неравенства Морса . . . . .	228
14.6.	Умножения . . . . .	230
14.7.	Инвариант Хопфа . . . . .	236
14.8.	Симплициальный объём (норма Громова) . . . . .	239
14.9.	Когомологии с некоммутативными коэффициентами и тео- рема ван Кампена . . . . .	240
§ 15.	Изоморфизмы Пуанкаре и Лефшеца . . . . .	245
15.1.	Фундаментальный класс . . . . .	245
15.2.	Изоморфизм Тома . . . . .	254
15.3.	Изоморфизм Пуанкаре . . . . .	258
15.4.	Изоморфизм Лефшеца . . . . .	266
15.5.	Обобщение теоремы Хелли . . . . .	271
§ 16.	Характеристические классы: продолжение . . . . .	272
16.1.	Изоморфизм Тома для расслоений . . . . .	274
16.2.	Формулы Тома и Ву . . . . .	278
16.3.	Препятствия к вложениям . . . . .	281
<b>Глава V.</b>	<b>Когомологии Чеха и де Рама</b>	<b>283</b>
§ 17.	Когомологии с коэффициентами в пучке . . . . .	283
17.1.	Пучки и предпучки . . . . .	283
17.2.	Когомологии Чеха . . . . .	286
17.3.	Расслоения со структурной группой . . . . .	292

17.4. Некоммутативные когомологии Чеха . . . . .	294
§ 18. Когомологии де Рама . . . . .	296
18.1. Теорема Стокса. Гомотопическая инвариантность . . . . .	301
18.2. Изоморфизм Пуанкаре для когомологий де Рама . . . . .	306
§ 19. Теорема де Рама . . . . .	310
19.1. Доказательство теоремы де Рама . . . . .	311
19.2. Симплициальная теорема де Рама . . . . .	317
<b>Глава VI. Смесь</b> . . . . .	<b>324</b>
§ 20. Полином Александра . . . . .	324
20.1. Форма Зейферта . . . . .	324
20.2. Бесконечное циклическое накрытие . . . . .	326
20.3. Основная теорема . . . . .	329
20.4. Свойства полинома Александра . . . . .	331
20.5. Полином Конвея . . . . .	334
20.6. Свободное дифференциальное исчисление . . . . .	340
§ 21. Инвариант Арфа . . . . .	350
21.1. Инвариант Арфа квадратичной формы . . . . .	350
21.2. Инвариант Арфа ориентированного зацепления . . . . .	352
21.3. Заузленность вложений графа $K_7$ . . . . .	355
§ 22. Вложения и погружения . . . . .	358
22.1. Сильная теорема Уитни о вложениях . . . . .	358
22.2. Нормальная степень погружения . . . . .	368
§ 23. Комплексные многообразия . . . . .	371
23.1. Полные пересечения . . . . .	371
23.2. Гомологии гиперповерхности $z^{a_0} + \dots + z^{a_n} = 1$ . . . . .	374
§ 24. Группы Ли и $H$ -пространства . . . . .	377
24.1. Некоторые свойства групп Ли . . . . .	377
24.2. Когомологии алгебр Ли . . . . .	379
24.3. Максимальные торы . . . . .	384
24.4. Регулярные элементы . . . . .	387
24.5. $H$ -пространства и алгебры Хопфа . . . . .	392
Решения и указания . . . . .	399
Литература . . . . .	432
Предметный указатель . . . . .	439

## Предисловие

Эта книга является непосредственным продолжением книги «Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии» (М.: МЦНМО, 2004), на которую мы обычно ссылаемся как на часть I. (Исправленную версию части I можно найти в Internet по адресу [http://www.mcsme.ru/prasolov/.](http://www.mcsme.ru/prasolov/))

В гл. I определяются симплициальные гомологии и когомологии и приводятся многочисленные примеры их вычисления и их приложений. Это расходится с тем, что обычно делается в современных курсах алгебраической топологии: в них, как правило, сразу вводятся сингулярные гомологии. Но определение симплициальных гомологий более простое и естественное. Кроме того, при вычислениях, как правило, приходится обращаться к симплициальным гомологиям. Поэтому у нас сингулярные гомологии появляются уже ближе к концу книги и используются лишь там, где они действительно необходимы, прежде всего для топологических многообразий.

Гомологии и когомологии с произвольными коэффициентами выражаются через гомологии с целыми коэффициентами с помощью функторов  $\text{Tot}$  и  $\text{Ext}$ . Свойства этих функторов весьма важны для теории гомологий, поэтому они подробно обсуждаются.

Теорема двойственности Пуанкаре сначала доказывается для симплициальных (ко)гомологий. Это доказательство годится только для гладких многообразий (точнее говоря, для триангулируемых многообразий). Для топологических многообразий нет теоремы о триангулируемости, поэтому доказательство теоремы двойственности Пуанкаре для них по необходимости использует сингулярные (ко)гомологии. В связи с этим такое доказательство, приведённое в гл. IV, весьма громоздко.

В гл. II рассматривается важная алгебраическая структура на когомологиях — умножение Колмогорова—Александера. Особенно много полезной информации это умножение даёт в случае многообразий. С умножением в когомологиях связаны такие топологические инварианты многообразий, как форма пересечения и сигнатура многообразия.

Один из возможных подходов к построению умножения в когомологиях основан на теореме Кюннета, выражающей (ко)гомологии пространства



$X \times Y$  через (ко)гомологии пространств  $X$  и  $Y$ . Эта теорема имеет и самостоятельный интерес.

Глава III посвящена различным приложениям (симплициальных) гомотопий и когомологий. Многие из этих приложений связаны с теорией препятствий. Одно из таких приложений — построение характеристических классов векторных расслоений. Обсуждаются также и другие подходы к построению характеристических классов — через универсальное расслоение, аксиоматический подход. Затем рассматриваются (ко)гомотопические свойства пространств, на которых действуют группы: строятся трансфер и точная последовательность Смита. Завершается глава построением квадратов Стиррода, обобщающих операцию умножения в когомологиях.

В гл. IV определяются сингулярные (ко)гомотопии и приводятся некоторые их приложения. В частности, доказываются некоторые свойства характеристических классов. (Эти доказательства технически удобнее проводить с помощью сингулярных когомологий, хотя сами утверждения можно сформулировать для симплициальных когомологий.)

В гл. V рассматривается ещё один подход к построению теории когомологий — когомотопии Чеха и тесно связанные с ними когомотопии де Рама. Для когомологий де Рама доказывается теорема двойственности Пуанкаре. Затем конструкция де Рама, изначально введённая для гладких многообразий, переносится на произвольные симплициальные комплексы.

Заключительная глава VI посвящена различным приложениям теории гомотопий, в основном в топологии многообразий. Сначала подробно обсуждается полином Александра, который строится с помощью гомотопий циклического накрытия; обсуждается также инвариант Арфа. Затем доказывается сильная теорема Уитни о вложениях. Приводится формула для вычисления классов Чженя полных пересечений. Обсуждаются некоторые гомотопические свойства групп Ли и  $H$ -пространств.

В книге приведено много задач (с решениями) и упражнений для самостоятельного решения. Задачи составлены по материалам семинаров по топологии для студентов II курса Независимого московского университета, которые автор вёл в 2003 г.

Основные обозначения из части I мы обычно используем без особых объяснений, но в некоторых случаях даны явные ссылки на соответствующие страницы части I. То же самое относится к теоремам и другим утверждениям.

Во время работы над этой книгой автор получал финансовую поддержку от Российского фонда фундаментальных исследований согласно проектам 05-01-01012а, 05-01-02805-НЦНИЛ\_а, 05-01-02806-НЦНИЛ\_а.

## Некоторые обозначения

$H_k(X; G)$  —  $k$ -мерные гомологии пространства  $X$  с коэффициентами в  $G$ ;

$H^k(X; G)$  —  $k$ -мерные когомологии пространства  $X$  с коэффициентами в  $G$ ;

$\text{Hom}(A, B)$  — группа гомоморфизмов  $A \rightarrow B$ ;

$A \otimes B$  — тензорное произведение абелевых групп  $A$  и  $B$ ;

$\text{Tor}(A, B)$  — см. с. 38—39;

$\text{Ext}(A, B)$  — см. с. 38—39;

$\text{Coker } \alpha$  — коядро гомоморфизма  $\alpha$  (см. с. 24);

$[M^n]$  — фундаментальный класс многообразия  $M^n$ ;

$\chi(X)$  — эйлерова характеристика пространства  $X$ ;

$\Lambda(f)$  — число Лефшеца отображения  $f$ ;

$\sigma(M^{4n})$  — сигнатура многообразия  $M^{4n}$ ;

$\varepsilon^k$  — тривиальное векторное расслоение размерности  $k$ ;

$\omega_k(\xi)$  —  $k$ -й класс Штифеля—Уитни расслоения  $\xi$ ;

$c_k(\xi)$  —  $k$ -й класс Чженя расслоения  $\xi$ ;

$p_k(\xi)$  —  $k$ -й класс Понтрягина расслоения  $\xi$ ;

$\text{Sq}^i$  — квадрат Стинрода;

$M_1^n \# M_2^n$  — связная сумма многообразий  $M_1^n$  и  $M_2^n$

## Глава I

# Симплициальные гомологии

### § 1. Определение и некоторые свойства

Группы гомологий топологического пространства  $X$  можно определить разными способами, причём эти определения эквивалентны только для достаточно хороших\*) пространств. С точки зрения наглядности наиболее просто выглядит определение симплициальных гомологий. Но у этого определения есть существенный недостаток: оно не инвариантно, точнее говоря, доказательство его инвариантности требует определённых усилий. (Под инвариантностью здесь подразумевается изоморфность групп гомологий гомеоморфных пространств.) Но основные идеи теории гомологий лучше всего выявляются на уровне симплициальных гомологий, поэтому мы начнём с подробного обсуждения симплициальных гомологий.

#### 1.1. Определение групп гомологий

Пусть  $K$  — симплициальный комплекс. Мы будем предполагать, что все его симплексы ориентированы, т.е. для каждого симплекса фиксирован порядок его вершин (никакой согласованности ориентаций разных симплексов не предполагается). Симплекс с вершинами  $a_0, a_1, \dots, a_n$  (в указанном порядке) мы будем обозначать  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ . Симплексы  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  и  $[a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}]$  считаются одинаково ориентированными, если  $\operatorname{sgn} \sigma = 1$ , а если  $\operatorname{sgn} \sigma = -1$ , то эти симплексы считаются противоположно ориентированными.

Определим *границу* симплекса следующим образом:

$$\partial[0, 1, \dots, n] = \sum (-1)^i [0, \dots, \hat{i}, \dots, n],$$

где  $[0, \dots, \hat{i}, \dots, n] = [0, \dots, i-1, i+1, \dots, n]$ . Здесь мы начинаем рассматривать формальные суммы симплексов. Точнее говоря, на множестве симплексов вводится следующее отношение эквивалентности: одинаково

---

\*) Следует отметить, что большинство пространств, появляющихся в топологии из геометрии, достаточно хорошие, в отличие от пространств, которые появляются из функционального анализа.

ориентированные симплексы (с одними и теми же вершинами) считаются эквивалентными, и мы рассматриваем множество таких классов эквивалентности. Кроме того, мы полагаем, что сумма двух противоположно ориентированных симплексов равна 0. Поэтому противоположно ориентированные симплексы можно обозначать  $\Delta$  и  $-\Delta$ .

Симплекс  $[a, b]$  удобно обозначать стрелкой с началом  $a$  и концом  $b$ . При таких обозначениях граница симплекса  $[0, 1, 2]$  выглядит так, как показано на рис. 1; это вполне согласуется с интуитивным представлением о границе.

Важнейшее значение для теории гомологий имеет следующее утверждение.

**Теорема 1.1.** *Для любого симплекса  $\Delta$  имеет место равенство  $\partial\partial\Delta = 0$ .*

**Доказательство.** Пусть  $i > j$ . Симплекс  $[\dots \hat{j} \dots \hat{i} \dots]$  встречается в выражении  $\partial\partial[0, \dots, n]$  дважды: он входит в  $(-1)^i\partial[\dots \hat{i} \dots]$  со знаком  $(-1)^{i+i}$  и в  $(-1)^j\partial[\dots \hat{j} \dots]$  со знаком  $(-1)^{i+j-1}$ ; эти знаки противоположны.  $\square$

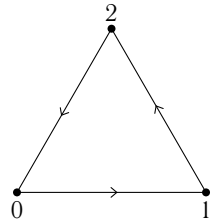


Рис. 1. Граница симплекса

Можно рассматривать не только линейные комбинации симплексов с целыми коэффициентами, но и конечные\*) суммы вида  $\sum a_i \Delta_i^k$ , где  $a_i$  — элемент некоторой фиксированной абелевой группы  $G$ ,  $\Delta_i^k$  — симплекс размерности  $k$ . Выражение  $\sum a_i \Delta_i^k$  называют  $k$ -мерной цепью (с коэффициентами в группе  $G$ ). Цепи можно покомпонентно складывать, поэтому они образуют абелеву группу. Группу  $k$ -мерных цепей обозначают  $C_k(K; G)$ . Для краткости эту группу мы часто будем обозначать  $C_k(K)$  или даже просто  $C_k$ .

Отображение  $\partial$  мы определили для симплексов. Это отображение можно продолжить по линейности и получить отображение  $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ , которое мы будем называть *граничным гомоморфизмом*. Для нульмерного симплекса  $\Delta^0$  полагаем  $\partial_0\Delta^0 = 0$ .

Цепь  $c \in C_k$  называют *циклом*, если  $\partial_k c = 0$ , т. е.  $c \in \text{Ker } \partial_k$ . Группу  $k$ -мерных циклов обозначают  $Z_k$ . Цепь  $c \in C_k$  называют *границей*, если  $c = \partial_{k+1} c'$  для некоторой цепи  $c' \in C_{k+1}$ , т. е.  $c \in \text{Im } \partial_{k+1}$ . Группу  $k$ -мерных границ обозначают  $B_k$ . Из равенства  $\partial\partial = 0$  следует, что  $B_k \subset Z_k$ , поэтому можно рассмотреть группу  $H_k(K) = Z_k/B_k$ . Элементами этой группы служат классы эквивалентности циклов: циклы считаются эквивалентными, если их разность является границей; такие циклы называют *гомологичными*. Группу  $H_k(K)$  называют группой  $k$ -мерных *симплициальных*

\*) Для бесконечных сумм мы не смогли бы определить гомоморфизм  $\partial$  в том случае, когда один и тот же симплекс является гранью бесконечного множества симплексов.

гомологий комплекса  $K$ . Если нужно упомянуть группу коэффициентов, то используют обозначение  $H_k(K; G)$ .

**З а м е ч а н и е.** Впервые «гомологические числа» появились в работах Римана (1857) и Бетти (1871). Правильное определение было дано Пуанкаре. Он осознал, что при определении цепей симплексы нужно учитывать не просто как геометрические фигуры, а с учётом их кратностей. Первоначально группы гомологий (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ ) описывались посредством задания их рангов (*числа Бетти*) и чисел кручения. В короткой заметке [N] Эмми Нётер в 1926 г. сделала важное наблюдение, что гомологии можно рассматривать как группы.

Непосредственно из определения видно, что если симплициальный комплекс  $K$  не содержит симплексов размерности  $k$ , то  $H_k(K) = 0$ .

Вычислим теперь группы гомологий для некоторых симплициальных комплексов.

**Пример 1.1.** Если  $K$  состоит из  $n$  изолированных точек, то

$$H_0(K; G) = \underbrace{G \oplus \dots \oplus G}_n \quad \text{и} \quad H_k(K; G) = 0 \quad \text{при} \quad k \geq 1.$$

**Доказательство.** Ясно, что в рассматриваемой ситуации  $C_0 = G \oplus \dots \oplus G$ ,  $C_k = 0$  при  $k \geq 1$ ,  $Z_0 = C_0$  и  $B_0 = 0$ .  $\square$

**Пример 1.2.** Пусть  $S^1$  — симплициальный комплекс, представляющий собой границу двумерного симплекса  $[0, 1, 2]$ . Тогда  $H_0(S^1; G) = H_1(S^1; G) = G$ .

**Доказательство.** Ясно, что  $B_1 = 0$ , поэтому  $H_1 = Z_1$ . Рассмотрим произвольную одномерную цепь

$$c = a_0[1, 2] + a_1[2, 0] + a_2[0, 1] \in C_1,$$

где  $a_0, a_1, a_2 \in G$ . Тогда

$$\partial c = (a_1 - a_2)[0] + (a_2 - a_0)[1] + (a_0 - a_1)[2].$$

Поэтому  $Z_1$  состоит из цепей вида  $a[1, 2] + a[2, 0] + a[0, 1]$ ,  $a \in G$ .

Равенства  $\partial(a[1, 2] + a[2, 0]) = a[0] - a[1]$  и  $\partial(a[2, 1] + a[1, 0]) = a[0] - a[2]$  показывают, что с точностью до границы любая нульмерная цепь имеет вид  $a[0]$ . С другой стороны, если

$$a[0] = \partial c = (a_1 - a_2)[0] + (a_2 - a_0)[1] + (a_0 - a_1)[2],$$

то  $a_2 = a_0$  и  $a_0 = a_1$ , поэтому  $a = a_1 - a_2 = 0$ . Таким образом, группа  $H_0(S^1; G) = C_0/B_0$  изоморфна  $G$ .  $\square$

Рассуждения, которыми мы воспользовались при вычислении  $H_0(S^1)$ , можно перенести на произвольный связный симплициальный комплекс.

**Теорема 1.2.** Пусть  $K$  — связный симплициальный комплекс. Тогда  $H_0(K; G) = G$ .

**Доказательство.** Произвольные вершины  $[m]$  и  $[n]$  можно соединить 1-симплексами  $[m, i_1], [i_1, i_2], \dots, [i_k, n]$ , поэтому

$$a[n] - a[m] = \partial(a[m, i_1] + a[i_1, i_2] + \dots + a[i_k, n]).$$

Это означает, что с точностью до границы любая нульмерная цепь имеет вид  $a[m]$ , где  $[m]$  — некоторая фиксированная вершина. Остаётся проверить, что если цепь  $a[m]$  является границей, то  $a = 0$ .

Предположим, что

$$a[m] = \partial\left(\sum_{\alpha} a_{\alpha}[i_{\alpha}, j_{\alpha}]\right) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}[j_{\alpha}] - \sum_{\alpha} a_{\alpha}[i_{\alpha}].$$

В правой части сумма коэффициентов равна нулю. Следовательно,  $a = 0$ .  $\square$

**У п р а ж н е н и е.** Представим  $S^2$  как границу симплекса  $[0, 1, 2, 3]$ . Докажите, что  $\text{Кег } \partial_2$  состоит из цепей вида  $a\partial[0, 1, 2, 3]$ , а  $\text{Кег } \partial_1 = \text{Им } \partial_2$ .

## 1.2. Цепные комплексы

*Цепным комплексом* называют семейство абелевых групп  $C_k$  и гомоморфизмов  $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ , удовлетворяющих соотношениям  $\partial_k \partial_{k+1} = 0$ . Если  $C_k = 0$  при  $k < 0$ , то цепной комплекс называют *неотрицательным*.

Абелеву группу  $F$  называют *свободной*, если в  $F$  можно выбрать множество элементов  $\{f_{\alpha}\}$  так, что любой элемент  $f \in F$  единственным образом представляется в виде конечной суммы  $f = n_{\alpha_1} f_{\alpha_1} + \dots + n_{\alpha_k} f_{\alpha_k}$ , где  $n_{\alpha_i} \in \mathbb{Z}$  и все  $f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_k}$  различны. Множество  $\{f_{\alpha}\}$  называют при этом *базисом* группы  $F$ . Эквивалентное определение: свободная абелева группа — это прямая сумма некоторого семейства (конечного или бесконечного) групп  $\mathbb{Z}$ . Если все группы  $C_k$  свободные, то цепной комплекс называют *свободным*.

Для любого цепного комплекса  $C_*$  можно рассмотреть *группы гомологий*  $H_k(C_*) = \text{Кег } \partial_k / \text{Им } \partial_{k+1}$ .

*Цепным отображением* цепных комплексов  $C_*$  и  $C'_*$  называют семейство гомоморфизмов  $\varphi_k: C_k \rightarrow C'_k$ , удовлетворяющих соотношениям  $\partial'_k \varphi_k = \varphi_{k-1} \partial_k$ . Цепное отображение  $\varphi_k: C_k \rightarrow C'_k$  индуцирует семейство гомоморфизмов  $\varphi_*: H_k(C_*) \rightarrow H_k(C'_*)$ . При этом  $(\varphi\psi)_* = \varphi_* \psi_*$ .

Симплициальное отображение  $f: K \rightarrow L$  индуцирует отображение  $f_k: C_k(K) \rightarrow C_k(L)$ , которое определяется следующим образом:

$$f_k([a_0, \dots, a_k]) = \begin{cases} [f(a_0), \dots, f(a_k)], & \text{если } f(a_i) \neq f(a_j) \text{ при } i \neq j; \\ 0, & \text{если } f(a_i) = f(a_j) \text{ для некоторого } i \neq j. \end{cases}$$

Проверка того, что это отображение цепное, т. е. выполняются соотношения  $\partial'_k f_k = f_{k-1} \partial_k$ , очевидна в тех случаях, когда размерность симплекса с вершинами  $f(a_0), \dots, f(a_k)$  равна  $k$  или меньше  $k - 1$  (в последнем случае обе части равенства обращаются в нуль). Рассмотрим теперь случай, когда  $f(a_0) = f(a_1)$ , а точки  $f(a_1), \dots, f(a_k)$  различны. В таком случае  $f_k([a_0, \dots, a_k]) = 0$  и

$$f_{k-1}(\partial[a_0, \dots, a_k]) = [f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k)] - [f(a_0), f(a_2), \dots, f(a_k)] = 0,$$

поскольку  $f(a_0) = f(a_1)$ .

Таким образом, любое симплициальное отображение  $f: K \rightarrow L$  индуцирует гомоморфизм  $f_*: H_k(K) \rightarrow H_k(L)$ ; при этом тождественное отображение индуцирует тождественный гомоморфизм и  $(fg)_* = f_* g_*$ .

Если для симплициальных отображений  $f, g: K \rightarrow L$  существует семейство гомоморфизмов  $D_k: C_k(K) \rightarrow C_{k+1}(L)$ , удовлетворяющих соотношениям

$$\partial_{k+1} D_k + D_{k-1} \partial_k = g_k - f_k,$$

то такое семейство  $D$  называют *цепной гомотопией*, связывающей  $f$  и  $g$ .

**Теорема 1.3** (о цепной гомотопии). *Если симплициальные отображения  $f, g: K \rightarrow L$  цепно гомотопны, то  $f_* = g_*$ .*

**Доказательство.** Пусть  $z_k \in C_k(K)$  и  $\partial_k z_k = 0$ . Тогда

$$g_k(z_k) - f_k(z_k) = \partial_{k+1} D_k z_k + D_{k-1} \partial_k z_k = \partial_{k+1} (D_k z_k),$$

т. е. циклы  $g_k(z_k)$  и  $f_k(z_k)$  гомологичны.  $\square$

### 1.3. Гомологии симплекса и его границы

**Теорема 1.4.** *При  $k \geq 1$  выполняется равенство  $H_k(\Delta^n) = 0$ .*

**Доказательство.** Мы воспользуемся тем, что  $\Delta^n = [b, a_1, \dots, a_n]$  — конус над  $\Delta^{n-1} = [a_1, \dots, a_n]$ . Каждому симплексу  $[a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$  можно сопоставить симплекс  $[b, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$ . Продолжив это отображение по линейности, получим гомоморфизм  $C_{k-1}(\Delta^{n-1}) \rightarrow C_k(\Delta^n)$ ; образ элемента  $c_{k-1}$  будем обозначать  $[b, c_{k-1}]$ . Легко проверить, что  $\partial[b, c_k] = c_k - [b, \partial c_k]$  при  $k \geq 1$  и  $\partial[b, c_0] = c_0 - \varepsilon(c_0)b$ , где  $\varepsilon(\sum n_p a_{i_p}) = \sum n_p$ .

Любую цепь  $z_k \in C_k(\Delta^n)$  можно единственным образом представить в виде  $z_k = c_k + [b, d_{k-1}]$ , где  $c_k \in C_k(\Delta^{n-1})$  и  $d_{k-1} \in C_{k-1}(\Delta^{n-1})$ . Предположим, что  $\partial z_k = 0$ . Тогда  $\partial c_k + d_{k-1} - [b, \partial d_{k-1}] = 0$  при  $k > 1$  и  $\partial c_1 + d_0 - \varepsilon(d_0)b = 0$  при  $k = 1$ . В обоих случаях  $\partial c_k + d_{k-1} = 0$ , а значит,

$$\partial[b, c_k] = c_k - [b, \partial c_k] = c_k + [b, d_{k-1}] = z_k,$$

т. е. любой цикл  $z_k \in C_k(\Delta^n)$ ,  $k \geq 1$ , является границей.  $\square$

*С л е д с т в и е.* Пусть  $\partial\Delta^n$  — симплициальный комплекс, который состоит из всех симплексов, входящих в  $\Delta^n$ , за исключением самого симплекса  $\Delta^n$ . Тогда  $H_{n-1}(\partial\Delta^n) = G$  (при  $n \geq 2$ ) и  $H_k(\partial\Delta^n) = 0$  при  $0 < k < n - 1$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Вплоть до размерности  $n - 1$  гомологии у  $\partial\Delta^n$  такие же, как у  $\Delta^n$ . Симплексов размерности  $n$  у  $\partial\Delta^n$  нет, поэтому  $\text{Im } \partial_n = 0$ , а значит,  $H_{n-1}(\partial\Delta^n) = \text{Ker } \partial_{n-1}$ . Но  $H_n(\Delta^n) = 0$ , поэтому  $\text{Ker } \partial_{n-1} = \text{Im } \partial'_n$ , где  $\partial'_n$  — дифференциал в цепном комплексе для  $\Delta^n$ . Если  $\Delta^n = [0, 1, \dots, n]$ , то  $\text{Im } \partial'_n$  состоит из элементов вида  $a \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i [0, \dots, \hat{i}, \dots, n] \right)$ ,  $a \in G$ .  $\square$

## § 2. Инвариантность гомологий

Сначала мы докажем теорему об ациклических носителях, которая часто позволяет доказать, что два цепных отображения цепно гомотопны. Затем мы дважды воспользуемся этой теоремой в разных ситуациях при доказательстве топологической инвариантности гомологий. Наконец, с помощью той же теоремы мы докажем гомотопическую инвариантность гомологий.

Гомологии можно определить с коэффициентами в произвольной абелевой группе  $G$ . Но, с одной стороны, для приложений особенно важен случай, когда группа коэффициентов  $G$  является аддитивной группой некоторого кольца с единицей (например,  $G = \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  или  $\mathbb{Z}_p$ ), а с другой стороны, некоторые важные свойства групп гомологий (и особенно когомологий) можно доказать именно для таких групп коэффициентов. Поэтому в дальнейшем, как правило, будет предполагаться, что группа коэффициентов — аддитивная группа некоторого кольца с единицей.

### 2.1. Ациклические носители

Симплициальный комплекс называют *ациклическим*, если его группы гомологий такие же, как у одной точки. Например, конус над любым симплициальным комплексом ацикличесок; это доказывается точно так же, как то, что симплекс ацикличесок (теорема 1.4 на с. 14; при доказательстве



этой теоремы мы пользовались только представлением симплекса в виде конуса).

Носителем цепи  $c_k = \sum a_k \Delta_i^k \in C_k(L)$  будем называть любой подкомплекс  $L' \subset L$ , содержащий все симплексы  $\Delta_i^k$ .

Будем говорить, что цепное отображение  $\varphi$  сохраняет аугментацию\*), если  $\varphi_0(\sum a_i \Delta_i^0) = \sum b_j \Delta_j^0$ , где  $\sum a_i = \sum b_j$ .

**Теорема 2.1** (об ациклических носителях). Пусть  $\varphi_k, \psi_k: C_k(K) \rightarrow C_k(L)$  — цепные отображения, сохраняющие аугментацию. Предположим, что любому симплексу  $\Delta \subset K$  сопоставлен комплекс  $L(\Delta) \subset L$  так, что выполняются следующие свойства:

1) если  $\Delta' \subset \Delta$ , то  $L(\Delta') \subset L(\Delta)$ ;

2) комплекс  $L(\Delta)$  ацикличесок;

3) комплекс  $L(\Delta^k)$  является носителем обеих цепей  $\varphi_k(\Delta^k)$  и  $\psi_k(\Delta^k)$ .

Предположим, далее, что группа коэффициентов  $G$  является аддитивной группой некоторого кольца с единицей. Тогда отображения  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  цепно гомотопны; в частности,  $\varphi_* = \psi_*$ .

**Доказательство.** Цепную гомотопию  $D_k$  будем строить индукцией по  $k$ . Рассмотрим сначала случай  $k = 0$ . Пусть  $\Delta^0$  — некоторая вершина комплекса  $K$ . Комплекс  $L(\Delta^0)$  является носителем цепей  $\varphi_0(\Delta^0)$  и  $\psi_0(\Delta^0)$ . Отображения  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  сохраняют аугментацию, поэтому  $(\varphi_0 - \psi_0)(a\Delta^0) = \sum b_i \Delta_i^0$ , где  $\sum b_i = 0$ . В ациклическом комплексе  $L(\Delta^0)$  цепь  $\sum b_i \Delta_i^0$ , где  $\sum b_i = 0$ , является границей некоторой цепи, поэтому  $(\varphi_0 - \psi_0)(a\Delta^0) = \partial_1 D_0(a\Delta^0)$ , где  $D_0(a\Delta^0)$  — некоторая одномерная цепь с носителем  $L(\Delta^0)$ . Равенство  $D_0(a\Delta^0) + D_0(b\Delta^0) = D_0((a+b)\Delta^0)$  при этом может не выполняться. Чтобы добиться выполнения такого равенства, выберем в кольце  $G$  единицу 1, найдём 1-цепь  $D_0(1 \cdot \Delta^0)$  и положим  $D_0(a\Delta^0) = aD_0(1 \cdot \Delta^0)$ . В дальнейшем цепь вида  $1 \cdot \Delta$  будем обозначать просто  $\Delta$  (отметим, что для произвольной группы коэффициентов  $G$  такое обозначение не имеет смысла).

Предположим, что требуемые гомоморфизмы  $D_0, \dots, D_{k-1}$  уже построены, причём  $L(\Delta^i)$  является носителем цепи  $D_i(\Delta^i)$ . Гомоморфизм  $D_k$  должен обладать единственным свойством: для любого  $k$ -мерного симплекса  $\Delta$  в  $K$  выполняется равенство  $\partial_{k+1} D_k(\Delta) = c_k$ , где  $c_k = \varphi_k(\Delta) - \psi_k(\Delta) - D_{k-1} \partial_k(\Delta)$ . Все симплексы  $\partial_k(\Delta)$  содержатся в  $\Delta$ , поэтому  $L(\Delta)$  является носителем цепи  $\partial_k(\Delta)$ , а значит,  $L(\Delta)$  является носителем цепи  $D_{k-1} \partial_k(\Delta)$ . Таким образом,  $L(\Delta)$  — носитель цепи  $c_k$ , и

$$\begin{aligned} \partial_k c_k &= (\partial_k \psi_k - \partial_k \varphi_k - \partial_k D_{k-1} \partial_k)(\Delta) = \\ &= (\partial_k \psi_k - \partial_k \varphi_k - (\psi_{k-1} \partial_k - \varphi_{k-1} \partial_k - D_{k-2} \partial_{k-1} \partial_k))(\Delta) = 0. \end{aligned}$$

\*) Происхождение такого названия объясняется на с. 27.

Мы рассматриваем случай  $k \geq 1$ . Из ацикличности комплекса  $L(\Delta)$  следует, что  $H_k(L(\Delta)) = 0$ . Поэтому существует цепь  $D_k(\Delta)$  с носителем  $L(\Delta)$ , для которой  $\partial_{k+1}D_k(\Delta) = c_k$ .  $\square$

### 2.2. Топологическая инвариантность гомологий

Здесь мы докажем, что любое непрерывное отображение симплициальных комплексов  $f: |K| \rightarrow |L|$  индуцирует гомоморфизм  $f_*: H_k(K) \rightarrow H_k(L)$ . При этом  $(fg)_* = f_*g_*$ , что влечёт изоморфность групп гомологий гомеоморфных симплициальных комплексов. Чтобы определить гомоморфизм  $f_*$ , мы воспользуемся теоремой о симплициальной аппроксимации.

**Теорема 2.2.** *Предположим, что группа коэффициентов  $G$  является аддитивной группой некоторого кольца с единицей. Пусть  $K'$  — барицентрическое подразделение симплициального комплекса  $K$ . Тогда группы гомологий  $H_k(K')$  и  $H_k(K)$  изоморфны.*

**Доказательство.** Определим сначала симплициальное отображение  $j: K' \rightarrow K$  следующим образом. Если  $K = \Delta^k = [0, 1, \dots, k]$ , то симплициальное отображение  $K' \rightarrow K$  задаётся сопоставлением вершинам комплекса  $K'$  вершин (пометок)  $0, 1, \dots, k$ . Сопоставим вершине комплекса  $K'$ , которая является барицентром симплекса  $[i_0, \dots, i_p]$ , одну из вершин  $i_0, \dots, i_p$ . Пример такого сопоставления приведён на рис. 2. Легко проверить, что ровно один  $k$ -мерный симплекс комплекса  $K'$  имеет полный набор пометок, причём этот симплекс ориентирован так же, как и симплекс  $K$ . Действительно, возьмём сначала барицентр и рассмотрим грань, вершины которой имеют метки, отличные от метки барицентра; возьмём её барицентр и т. д.

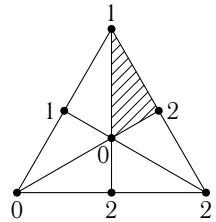


Рис. 2. Набор пометок

Для симплициальных комплексов общего вида отображение  $j: K' \rightarrow K$  определяется аналогично. Отметим, что оно является симплициальной аппроксимацией тождественного отображения. Отображение  $j$  индуцирует цепное отображение  $j_k: C_k(K') \rightarrow C_k(K)$ .

Определим теперь цепное отображение  $i_k: C_k(K) \rightarrow C_k(K')$ ; оно не индуцировано симплициальным отображением. Положим  $i_0(v) = v$ ,  $i_1[v_0, v_1] = [b, v_1] - [b, v_0]$ , где  $b$  — барицентр симплекса  $[v_0, v_1]$ . Формально определение отображения  $i_1$  можно записать так:  $i_1(\Delta^1) = [b, \partial\Delta^1]$ . Для  $k > 1$  тоже положим  $i_k(\Delta^k) = [b, i_{k-1}\partial\Delta^k]$ , где  $b$  — барицентр комплекса  $\Delta^k$ . Остаётся проверить, что отображение  $i_k$  цепное, т. е.  $\partial_k i_k = i_{k-1}\partial_k$ . Ясно, что

$$\partial_k i_k(\Delta^k) = \partial_k [b, i_{k-1}\partial_k \Delta^k] = i_{k-1}\partial_k(\Delta^k) - [b, \partial_{k-1}i_{k-1}\partial_k \Delta^k].$$

Поэтому если  $\partial_{k-1}i_{k-1} = i_{k-2}\partial_{k-1}$ , то  $\partial_{k-1}i_{k-1}\partial_k = i_{k-2}\partial_{k-1}\partial_k = 0$  и  $\partial_k i_k = i_{k-1}\partial_k$ .

Отображение  $j$  устроено так, что один  $k$ -мерный симплекс барицентрического подразделения симплекса  $\Delta^k$  отображается на  $\Delta^k$  с сохранением ориентации, а все остальные  $k$ -мерные симплексы отображаются на симплексы размерности меньше  $k$ . Из этого следует, что отображение  $j_k i_k$  тождественно, а отображение  $i_k j_k$  устроено следующим образом: носителем цепи  $i_k j_k(\Delta')$ , где  $\Delta'$  — симплекс в  $K'$ , служит барицентрическое подразделение симплекса  $\Delta$  в  $K$ , содержащего  $\Delta'$ . Барицентрическое подразделение симплекса  $\Delta$  является конусом над  $\partial\Delta$ , поэтому барицентрическое подразделение симплекса — ациклический симплициальный комплекс. Таким образом, у отображений  $i_k j_k$  и  $\text{id}_{C_k(K')}$  есть общий ациклический носитель. Ясно также, что отображение  $i_0 j_0$  переводит вершину в вершину, поэтому оно сохраняет аугментацию. Следовательно, отображение  $i_k j_k$  цепно гомотопно тождественному.

Итак, индуцированные гомоморфизмы  $j_* i_*$  и  $i_* j_*$  — тождественные отображения. Поэтому группы  $H_k(K')$  и  $H_k(K)$  изоморфны.  $\square$

**З а м е ч а н и е 1.** Отображение  $i_*: H_k(K) \rightarrow H_k(K')$  имеет простой геометрический смысл на уровне цепей: симплексу сопоставляется сумма симплексов, на которые он разбивается при барицентрическом подразделении. Обратное отображение  $j_*: H_k(K') \rightarrow H_k(K)$  канонически\*) определено только на уровне гомологий.

**З а м е ч а н и е 2.** Теорему 2.2 несложно доказать и без теоремы об ациклических носителях. Действительно, для этого достаточно проверить, что отображение  $i_* j_*$  тождественно. Но в любой цикл все симплексы барицентрического подразделения симплекса  $\Delta$  должны входить с одним и тем же коэффициентом, поэтому ограничение отображения  $i_k j_k$  на  $Z_k$  тождественно.

Пусть  $f: |K| \rightarrow |L|$  — непрерывное отображение симплициальных комплексов. Определим гомоморфизм  $f_*: H_k(K) \rightarrow H_k(L)$  следующим обра-

\*) Мы говорим, что отображение *каноническое*, если оно определено единственным образом в силу конструкции или по каким-либо другим причинам. Например, любой изоморфизм групп  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  канонический. Любой изоморфизм колец  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  тоже канонический, но изоморфизм групп  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  будет каноническим лишь в том случае, когда мы знаем, что элемент 1 переходит в 1, а не в  $-1$ .

В линейной алгебре важнейшим примером неканонического изоморфизма является изоморфизм между линейным пространством  $V$  и двойственным пространством  $V^*$ . Этот изоморфизм зависит от выбора базиса в  $V$ .

В топологии неканонические изоморфизмы часто возникают для расслоений, потому что слои расслоения гомеоморфны, но эти гомеоморфизмы не канонические; каноничность гомеоморфизмов слоёв означает тривиальность расслоения. Поэтому гомотопические группы и группы гомологий разных слоёв изоморфны, но эти изоморфизмы не всегда можно выбрать каноническими из-за «скрученности» произведения базы на слои.

зом. Пусть  $K^{(n)}$  —  $n$ -е барицентрическое подразделение, а  $\varphi: K^{(n)} \rightarrow L$  — симплициальная аппроксимация отображения  $f$ . Положим  $f_* = \varphi_* i_*^{(n)}$ , где  $i_*^{(n)}: H_k(K) \rightarrow H_k(K^{(n)})$  — канонический изоморфизм. Нужно проверить, что это определение корректно, т. е. если  $\psi: K^{(m)} \rightarrow L$  — другая симплициальная аппроксимация отображения  $f$ , то  $\varphi_* i_*^{(n)} = \psi_* i_*^{(m)}$ . Рассмотрим сначала случай  $m = n$ .

**Теорема 2.3.** Пусть  $\varphi, \psi: K \rightarrow L$  — симплициальные аппроксимации отображения  $f: |K| \rightarrow |L|$ . Тогда  $\varphi_* = \psi_*$ .

**Доказательство.** Единственное свойство симплициальных отображений  $\varphi$  и  $\psi$ , которым мы будем пользоваться, заключается в следующем. Пусть  $a_0, \dots, a_k$  — вершины некоторого симплекса в  $K$ . Тогда точки  $\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_k)$ ,  $\psi(a_0), \dots, \psi(a_k)$  являются вершинами симплекса\* в  $L$ . Чтобы доказать это свойство, рассмотрим точку  $x \in \text{int}[a_0, \dots, a_k]$ . Для точки  $f(x)$  однозначно определён симплекс  $[b_0, \dots, b_l]$  в  $L$ , внутренней точкой которого она является. Согласно определению симплициальной аппроксимации  $\varphi(x), \psi(x) \in [b_0, \dots, b_l]$ . Поэтому из симплициальности отображений  $\varphi$  и  $\psi$  следует, что симплексы  $\varphi([a_0, \dots, a_k])$  и  $\psi([a_0, \dots, a_k])$  принадлежат  $[b_0, \dots, b_l]$ .

Отображения  $\varphi_0, \psi_0: C_0(K) \rightarrow C_0(L)$  сохраняют аугментацию. Поэтому согласно теореме об ациклических носителях отображения  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  цепно гомотопны.  $\square$

Докажем теперь равенство  $\varphi_* i_*^{(n)} = \psi_* i_*^{(m)}$  для  $n \neq m$ . Пусть для определённости  $n > m$ . В качестве исходного комплекса вместо  $K$  можно взять  $K^{(m)}$  и рассмотреть его  $p$ -е барицентрическое подразделение, где  $p = n - m$ . Тогда требуемое равенство примет вид  $\varphi_* i_*^{(p)} = \psi_*$ .

При доказательстве теоремы 2.2 было построено отображение  $j: K^{(1)} \rightarrow K$ , являющееся симплициальной аппроксимацией тождественного отображения. Напомним, что композиция симплициальных аппроксимаций является симплициальной аппроксимацией композиции (часть I, следствие теоремы 8.6). Поэтому для тождественного отображения существует симплициальная аппроксимация  $j^{(p)}: K^{(p)} \rightarrow K$ ; при этом отображения  $j_*^{(p)}$  и  $i_*^{(p)}$  взаимно обратны. Отображение  $\psi j^{(p)}$  является симплициальной аппроксимацией отображения  $f$ , поэтому  $\varphi_* = \psi_* j_*^{(p)}$ , т. е.  $\varphi_* i_*^{(p)} = \psi_*$ .

**Теорема 2.4.** Пусть  $f: |K| \rightarrow |L|$  и  $g: |L| \rightarrow |M|$  — непрерывные отображения. Тогда  $(gf)_* = g_* f_*$ .

**Доказательство.** Построим сначала симплициальную аппроксимацию  $\psi: L' \rightarrow M$  отображения  $g$ , а затем симплициальную аппроксимацию  $\varphi: K' \rightarrow L'$  отображения  $f$ . Пусть  $j^K: K' \rightarrow K$  и  $j^L: L' \rightarrow L$  — симпли-

\* ) Размерность этого симплекса может быть равна  $0, 1, \dots, 2k + 1$ .

циальные аппроксимации тождественных отображений. Эти отображения образуют следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} |K| & \xrightarrow{f} & |L| & \xrightarrow{g} & |M| \\ \uparrow j^K & & \uparrow j^L & & \\ |K'| & \xrightarrow{\varphi} & |L'| & \xrightarrow{\psi} & |M|. \end{array}$$

Отображение  $\psi\varphi$  является симплициальной аппроксимацией отображения  $gf$ , поэтому

$$(gf)_* = (\psi\varphi)_*(j_*^K)^{-1} = \psi_*\varphi_*(j_*^K)^{-1}.$$

Отображения  $j^L\varphi$  и  $\psi$  являются симплициальными аппроксимациями отображений  $f$  и  $g$ , поэтому  $f_* = j_*^L\varphi_*(j_*^K)^{-1}$  и  $g_* = \psi_*(j_*^L)^{-1}$ . Равенство  $(gf)_* = g_*f_*$  теперь легко проверяется.  $\square$

*С л е д с т в и е.* Если симплициальные комплексы  $K$  и  $L$  гомеоморфны, то их группы гомологий изоморфны.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть  $f: |K| \rightarrow |L|$  и  $g: |L| \rightarrow |K|$  — взаимно обратные непрерывные отображения. Тогда отображения  $f_*$  и  $g_*$  взаимно обратны.  $\square$

В качестве приложения топологической инвариантности гомологий приведём ещё одно доказательство неретрагируемости шара на границу.

**Теорема 2.5.** *Не существует непрерывного отображения  $r: D^n \rightarrow S^{n-1} = \partial D^n$ , для которого  $r(x) = x$  при всех  $x \in S^{n-1}$ .*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Предположим, что  $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$  — непрерывное отображение, для которого  $r|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ . Рассмотрим вложение  $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$ . Композиция  $ri$  является тождественным отображением, поэтому  $r_*i_*: H_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(D^n; \mathbb{Z})$  — тождественное отображение  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  (или  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  при  $n = 1$ ). С другой стороны, образ отображения  $i_*: H_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(D^n; \mathbb{Z})$  нулевой (или лежит в  $\mathbb{Z}$  при  $n = 1$ ), поскольку  $H_{n-1}(D^n; \mathbb{Z}) = 0$  при  $n \geq 2$  и  $H_0(D^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .  $\square$

### 2.3. Гомотопическая инвариантность гомологий

**Теорема 2.6.** *Гомотопные отображения симплициальных комплексов индуцируют одинаковые отображения гомологий.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть  $f_0, f_1: |K| \rightarrow |L|$  — гомотопные симплициальные отображения симплициальных комплексов  $K$  и  $L$ . Это означает, что существует непрерывное отображение  $F: |K| \times I \rightarrow |L|$ , для которого  $F|_{|K| \times \{0\}} = f_0$  и  $F|_{|K| \times \{1\}} = f_1$ . Прямое произведение  $|K| \times I$  можно превратить в симплициальный комплекс, причём даже так, что  $|K| \times \{0\}$  и  $|K| \times \{1\}$  будут снабжены той же самой симплициальной структурой,

а кроме того, для любого симплекса  $\Delta$  в  $K$  множество  $\Delta \times I$  будет подкомплексом в  $|K| \times I$  (см. часть I, с. 146). Рассмотрим вложения  $i_0: K \rightarrow |K| \times \{0\} \subset |K| \times I$  и  $i_1: K \rightarrow |K| \times \{1\} \subset |K| \times I$ . Ясно, что  $f_0 = Fi_0$  и  $f_1 = Fi_1$ . Поэтому достаточно проверить, что  $i_{0*} = i_{1*}$  (здесь мы пользуемся тем, что  $f_{0*} = F_*i_{0*}$  и  $f_{1*} = F_*i_{1*}$ ).

Пусть  $\Delta^k$  — симплекс в  $K$ . Цепи  $i_0(\Delta^k)$  и  $i_1(\Delta^k)$  имеют общий носитель  $\Delta^k \times I$ . Этот носитель ациклический, поскольку он гомеоморфен  $D^{k+1} \approx \Delta^{k+1}$ . □

*С л е д с т в и е.* Если симплициальные комплексы  $K$  и  $L$  гомотопически эквивалентны, то их группы гомологий изоморфны.

В качестве приложения гомотопической инвариантности гомологий приведём ещё одно доказательство инвариантности размерности.

*Т е о р е м а 2.7.* Если  $n \neq m$ , то пространства  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$  не гомеоморфны.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть для определённости  $n > m \geq 1$ ; в частности,  $n \geq 2$ . Предположим, что пространства  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$  гомеоморфны. Тогда пространства  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$  и  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \sim S^{m-1}$  тоже гомеоморфны, а значит, они гомотопически эквивалентны. Следовательно,  $\mathbb{Z} = H_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}) = H_{n-1}(S^{m-1}; \mathbb{Z})$  и  $n - 1 > 0$ . Поэтому  $m = n$ ; приходим к противоречию. □

### § 3. Относительные гомологии

Пусть  $K$  — симплициальный комплекс,  $L \subset K$  — его подкомплекс. Тогда  $C_k(L) \subset C_k(K)$ , поэтому можно рассмотреть факторгруппу  $C_k(K, L) = C_k(K)/C_k(L)$ ; элементы этой группы называют *относительными  $k$ -мерными цепями*. Гомоморфизм  $\partial_k: C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$  индуцирует гомоморфизм  $\partial_k: C_k(K, L) \rightarrow C_{k-1}(K, L)$ , для которого тоже выполняется свойство  $\partial\partial = 0$ . Поэтому снова можно взять группы  $Z_k(K, L) = \text{Ker } \partial_k$  и  $B_k(K, L) = \text{Im } \partial_{k+1}$  и рассмотреть факторгруппу  $H_k(K, L) = Z_k/B_k$ , которую называют группой  *$k$ -мерных относительных гомологий*.

*П р и м е р 3.1.* Если каждая компонента линейной связности комплекса  $K$  содержит хотя бы одну точку подкомплекса  $L$ , то  $H_0(K, L) = 0$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Соединим вершину  $x \in K$  ломаной  $\alpha$ , идущей по рёбрам, с некоторой вершиной  $y \in L$ . Тогда  $\partial_1\alpha = [x] - [y] \sim [x]$ , поэтому  $B_0 \supset Z_0$ . □

*У п р а ж н е н и е.* Докажите, что  $H_0(K, L; G) = \underbrace{G \oplus \dots \oplus G}_n$ , где  $n$  — количество компонент линейной связности комплекса  $K$ , не содержащих точек комплекса  $L$ .

**Задача 3.1** (изоморфизм вырезания). Пусть  $K \cup M$  — симплициальный комплекс,  $K$  и  $M$  — его подкомплексы, а  $L$  — подкомплекс в  $K$ . Докажите, что  $H_k(K, L) \cong H_k(K \cup M, L \cup M)$  для всех  $k$ .

Отображение симплициальных пар  $f: (K, L) \rightarrow (K', L')$  индуцирует гомоморфизм относительных гомологий  $f_*: H_*(K, L) \rightarrow H_*(K', L')$  следующим образом. Сначала возьмём отображение  $C_k(K)/C_k(L) \rightarrow C_k(K')/fC_k(L)$ , а затем, пользуясь тем, что  $fC_k(L) \subset C_k(L')$ , применим каноническую проекцию

$$C_k(K')/fC_k(L) \rightarrow (C_k(K')/fC_k(L)) / (C_k(L')/fC_k(L)) \cong C_k(K')/C_k(L').$$

В результате получим цепное отображение  $f_{\#}: C_*(K, L) \rightarrow C_*(K', L')$ . Оно индуцирует гомоморфизм гомологий.

### 3.1. Точная гомологическая последовательность пары

Включение  $i: L \rightarrow K$  индуцирует гомоморфизм  $i_*: H_k(L) \rightarrow H_k(K)$ . Кроме того, любой абсолютный цикл можно рассматривать как относительный, поэтому возникает гомоморфизм  $p_*: H_k(K) \rightarrow H_k(K, L)$ . Построим теперь *связывающий* гомоморфизм  $\partial_*: H_k(K, L) \rightarrow H_{k-1}(L)$ . Пусть  $z_k \in C_k(K, L)$  — относительный цикл, а  $\tilde{z}_k$  — его абсолютный представитель, т.е.  $\tilde{z}_k \in C_k(K)$  и  $z_k = \tilde{z}_k + C_k(L)$ . По условию  $\partial_k z_k = 0$ , т.е.  $\partial_k \tilde{z}_k \in C_{k-1}(L)$ . Формула  $z_k \mapsto \partial_k \tilde{z}_k$  задаёт корректно определённое отображение  $\partial_*: H_k(K, L) \rightarrow H_{k-1}(L)$ , поскольку если  $y_k \in C_k(L)$ , то  $\partial_k(\tilde{z}_k + y_k) = \partial_k \tilde{z}_k + \partial_k y_k \sim \partial_k \tilde{z}_k$ .

**Теорема 3.1.** *Последовательность гомоморфизмов*

$$\dots \rightarrow H_k(L) \xrightarrow{i_*} H_k(K) \xrightarrow{p_*} H_k(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(L) \rightarrow \dots$$

*является точной.*

**Доказательство.** 1)  $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } p_*$ . Любому абсолютному циклу  $\tilde{z}_k \in C_k(L)$  соответствует нулевой относительный цикл.

2)  $\text{Ker } p_* \subset \text{Im } i_*$ . Пусть абсолютному циклу  $\tilde{z}_k \in C_k(K)$  соответствует гомологичный нулю относительный цикл. Тогда  $\tilde{z}_k = \tilde{z}'_k + \tilde{z}''_k$ , где  $\tilde{z}'_k \in C_k(L)$  и  $\tilde{z}''_k = \partial \tilde{z}_{k+1}$ ,  $\tilde{z}_{k+1} \in C_{k+1}(K)$ . Поэтому цикл  $\tilde{z}_k$  гомологичен циклу  $\tilde{z}'_k \in C_k(L)$ .

3)  $\text{Im } p_* \subset \text{Ker } \partial_*$ . Пусть  $\tilde{z}_k \in C_k(K)$  и  $z_k = \tilde{z}_k + C_k(L)$ . Тогда  $z_k \mapsto \partial_k \tilde{z}_k = 0$ .

4)  $\text{Ker } \partial_* \subset \text{Im } p_*$ . Пусть  $z_k = \tilde{z}_k + C_k(L)$  и  $\partial_k \tilde{z}_k = 0$ . Тогда в качестве представителя относительного цикла  $z_k$  можно взять абсолютный цикл  $\tilde{z}_k$ .

5)  $\text{Im } \partial_* \subset \text{Ker } i_*$ . Пусть  $\tilde{z}_{k-1} = \partial_k \tilde{z}_k \in C_{k-1}(L)$ . Тогда цикл  $\tilde{z}_{k-1}$  гомологичен нулю в  $K$ .

6)  $\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \partial_*$ . Пусть  $\tilde{z}_{k-1} \in C_{k-1}(L)$  и  $\tilde{z}_{k-1} = \partial_k \tilde{z}_k$ , где  $\tilde{z}_k \in C_k(K)$ . Тогда  $\tilde{z}_{k-1} = \partial_*(\tilde{z}_k + C_k(L))$ .  $\square$

Относительные гомологии можно выразить через абсолютные, а именно при  $k \geq 2$  мы имеем

$$H_k(K, L) \cong H_k(K \cup CL, CL) \cong H_k(K \cup CL),$$

где  $CL$  — конус над  $L$ . Первый изоморфизм очевиден уже на уровне относительных цепей. Второй изоморфизм вытекает из точной последовательности пары:

$$H_k(CL) \xrightarrow{i_*} H_k(K \cup CL) \xrightarrow{p_*} H_k(K \cup CL, CL) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(CL).$$

Из стягиваемости конуса  $CL$  следует, что  $H_k(CL) = H_{k-1}(CL) = 0$ , а потому среднее отображение — изоморфизм. Отметим, что комплекс  $K \cup CL$  гомотопически эквивалентен  $K/L$ . Действительно, комплекс  $CL$  стягиваем, поэтому  $K \cup L \sim (K \cup CL)/CL \approx K/L$ .

*Пример 3.2.* Пусть  $n \geq 1$ . Тогда

$$H_k(D^n, S^{n-1}; G) = \begin{cases} G & \text{при } k = n; \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases}$$

*Доказательство.* Точная последовательность

$$H_k(D^n) \longrightarrow H_k(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_{k-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{k-1}(D^n)$$

показывает, что  $H_k(D^n, S^{n-1}) \cong H_{k-1}(S^{n-1})$  при  $k \geq 2$ . При  $k = 0$  требуемое утверждение следует из примера 3.1. При  $k = 1$  возникают два варианта точных последовательностей:

$$0 \longrightarrow H_1(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow G \longrightarrow G \longrightarrow 0 \quad (n \geq 2),$$

$$0 \longrightarrow H_1(D^1, S^0) \longrightarrow G \oplus G \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

Здесь отображение  $G \rightarrow G$  является изоморфизмом, а отображение  $G \oplus G \rightarrow G$  имеет вид  $(a, b) \mapsto a + b$ . Ядро первого отображения нулевое, а ядро второго отображения состоит из элементов вида  $(a, -a)$ , поэтому оно изоморфно  $G$ .  $\square$

*Замечание.* Трудности, возникшие при разборе случая  $k = 1$ , исчезают, если рассматривать приведённые гомологии, которые определяются на с. 27.

Обобщением точной гомологической последовательности является следующая алгебраическая конструкция. Пусть задана короткая точная последовательность цепных отображений:

$$0 \longrightarrow C'_* \xrightarrow{i_*} C_* \xrightarrow{p_*} C''_* \longrightarrow 0$$



(например,  $C'_k = C_k(L)$ ,  $C_k = C_k(K)$ ,  $C''_k = C_k(K)/C_k(L)$ ). Тогда можно определить *связывающий* гомоморфизм  $\partial_*: H_k(C'_*) \rightarrow H_{k-1}(C'_*)$ . А именно, пусть  $z''_k \in C''_k$  и  $\partial''_k z''_k = 0$ . Тогда  $z''_k = p_k c_k$  для некоторого  $c_k \in C_k$  и  $0 = \partial''_k z''_k = p_k(\partial_k c_k)$ . Поэтому  $\partial_k c_k = i_{k-1} c'_{k-1}$  для некоторого  $c'_{k-1} \in C'_{k-1}$ . Положим  $\partial_* z''_k = c'_{k-1}$ . Корректность этого определения на уровне гомологий и точность последовательности

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_k(C'_*) \xrightarrow{i_*} H_k(C_*) \xrightarrow{p_*} H_k(C''_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(C'_*) \xrightarrow{i_*} \dots$$

доказываются точно так же, как и для точной последовательности пары.

**Пример 3.3.** Пусть  $K$  — симплициальный комплекс, и пусть  $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$  — короткая точная последовательность абелевых групп. Тогда возникает короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow C_k(K; G') \rightarrow C_k(K; G) \rightarrow C_k(K; G'') \rightarrow 0.$$

Связывающий гомоморфизм  $\beta_*: H_k(K; G'') \rightarrow H_{k-1}(K; G)$  называют гомоморфизмом Бокштейна.

Наиболее интересные примеры гомоморфизмов Бокштейна дают точные последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_{m^2} \rightarrow \mathbb{Z}_m \rightarrow 0,$$

которые определяют гомоморфизмы  $H_k(K; \mathbb{Z}_m) \rightarrow H_{k-1}(K; \mathbb{Z})$  и  $H_k(K; \mathbb{Z}_m) \rightarrow H_{k-1}(K; \mathbb{Z}_m)$ .

Для гомоморфизма  $\alpha: A \rightarrow A'$  можно определить *кядро*  $\text{Coker } \alpha = A'/\text{Im } \alpha$ .

**Задача 3.2.** Дана коммутативная диаграмма с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0. \end{array}$$

Докажите, что существует точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta \rightarrow \text{Ker } \gamma \rightarrow \text{Coker } \alpha \rightarrow \text{Coker } \beta \rightarrow \text{Coker } \gamma \rightarrow 0.$$

Для тройки симплициальных комплексов  $L_1 \subset L_2 \subset K$  можно построить точную гомологическую последовательность тройки

$$\dots \rightarrow H_k(L_2, L_1) \xrightarrow{i_*} H_k(K, L_1) \xrightarrow{p_*} H_k(K, L_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(L_2, L_1) \rightarrow \dots$$

следующим образом. Изоморфизм

$$C_*(K)/C_*(L_2) \cong (C_*(K)/C_*(L_1)) / (C_*(L_2)/C_*(L_1))$$

показывает, что имеет место короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow C_*(L_2)/C_*(L_1) \xrightarrow{i} C_*(K)/C_*(L_1) \xrightarrow{p} C_*(K)/C_*(L_2) \longrightarrow 0.$$

Эта короткая точная последовательность цепных комплексов индуцирует указанную точную последовательность гомологий.

При работе с точными последовательностями часто бывает полезно следующее утверждение.

**Т е о р е м а 3.2** (5-лемма Стинрода). *Пусть задана коммутативная диаграмма абелевых групп с точными строками:*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5. \end{array}$$

*Предположим, что  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$  — изоморфизмы. Тогда  $\varphi_3$  — изоморфизм.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим группы  $A'_2 = A_2/\text{Im } \alpha_1$  и  $A'_4 = \text{Ker } \alpha_4$ ;  $B'_2$  и  $B'_4$  определяются аналогично. Доказательство сводится к более простой ситуации

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A'_2 & \xrightarrow{\alpha'_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha'_3} & A'_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi'_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi'_4 & & \\ 0 & \longrightarrow & B'_2 & \xrightarrow{\beta'_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta'_3} & B'_4 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Здесь  $\varphi'_2$  и  $\varphi'_4$  снова изоморфизмы. Ясно, что

$$\text{Ker } \varphi_3 \subset \text{Ker}(\beta'_3 \varphi_3) = \text{Ker}(\varphi'_4 \alpha'_3) = \text{Ker}(\alpha'_3) = \text{Im}(\alpha'_2),$$

поэтому  $\text{Ker } \varphi_3 \cong \text{Ker}(\varphi_3 \alpha'_2) = \text{Ker}(\beta'_2 \varphi'_2) = 0$ , т. е.  $\varphi_3$  — мономорфизм. Кроме того,  $\text{Im}(\beta'_3 \varphi_3) = \text{Im}(\varphi'_4 \alpha'_3)$ , где  $\alpha'_3$  — эпиморфизм и  $\varphi'_4$  — изоморфизм. Поэтому  $\beta'_3 \varphi_3$  — эпиморфизм и  $B_3 = \text{Im } \varphi_3 + \text{Ker } \beta'_3$ . Но

$$\text{Ker } \beta'_3 = \text{Im } \beta'_2 = \text{Im}(\beta'_2 \varphi'_2) = \text{Im}(\varphi_3 \alpha'_2) \subset \text{Im } \varphi_3,$$

поэтому  $B_3 = \text{Im } \varphi_3$ , т. е.  $\varphi_3$  — эпиморфизм. □

**З а м е ч а н и е.** 5-лемма остаётся справедливой и в том случае, когда диаграмма коммутативна с точностью до знака, т. е.  $\varphi_2 \alpha_1 = \pm \beta_1 \varphi_1$  и т. д. Действительно, в доказательстве участвуют только группы  $\text{Ker}$  и  $\text{Im}$ , которые не изменяются при замене гомоморфизма  $\varphi$  на  $-\varphi$ .

С помощью 5-леммы легко доказывается следующее утверждение.

**Т е о р е м а 3.3.** *Предположим, что отображение пар  $f: (K, L) \rightarrow (K', L')$  таково, что индуцированные им отображения  $K \rightarrow K'$*

и  $L \rightarrow L'$  являются гомотопическими эквивалентностями. Тогда отображение  $f_*: H_k(K, L) \rightarrow H_k(K', L')$  — изоморфизм.

**Доказательство.** Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_k(L) & \xrightarrow{i_*} & H_k(K) & \xrightarrow{p_*} & H_k(K, L) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(L) & \xrightarrow{i_*} & H_{k-1}(K) \\ f_* \downarrow \text{изо} & & f_* \downarrow \text{изо} & & f_* \downarrow ? & & f_* \downarrow \text{изо} & & f_* \downarrow \text{изо} \\ H_k(L') & \xrightarrow{i_*} & H_k(K') & \xrightarrow{p_*} & H_k(K', L') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(L') & \xrightarrow{i_*} & H_{k-1}(K'). \end{array}$$

Из 5-леммы следует, что средняя вертикальная стрелка тоже является изоморфизмом.  $\square$

**Задача 3.3.** Дана коммутативная диаграмма абелевых групп

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \\ 0 & \longrightarrow & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с точными строками.

- а) Докажите, что если  $\varphi_2$  и  $\varphi_4$  — мономорфизмы, то  $\varphi_3$  — мономорфизм.  
б) Докажите, что если  $\varphi_2$  и  $\varphi_4$  — эпиморфизмы, то  $\varphi_3$  — эпиморфизм.

**Задача 3.4.** Дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 \end{array}$$

с точными строками. Докажите, что  $\varphi_2$  индуцирует изоморфизм

$$\Phi: \text{Кер}(\varphi_3 \alpha_2) / (\text{Кер} \alpha_2 + \text{Кер} \varphi_2) \rightarrow (\text{Im} \varphi_2 \cap \text{Im} \beta_1) / \text{Im}(\varphi_2 \alpha_1).$$

**Задача 3.5** [Ma1]. а) Пусть даны две коммутативные диаграммы из 5-леммы Стиррода, в которых соответствующие гомоморфизмы одинаковые, кроме изоморфизмов  $\varphi'_3 = \eta_1$  и  $\varphi''_3 = \eta_2$ . Докажите, что тогда

$$\eta_1^{-1} \eta_2(x) + \eta_2^{-1} \eta_1(x) = 2x$$

для любого  $x \in A_3$ .

б) Предположим, что данные диаграммы являются диаграммами колец и их гомоморфизмов. Докажите, что в этих диаграммах изоморфизмы  $\eta_1$  и  $\eta_2$  могут быть разными тогда и только тогда, когда существует нетривиальный аддитивный гомоморфизм  $\delta: A_3 \rightarrow A_3$ , для которого  $\delta \alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 \delta = 0$  и  $\delta(xy) = (\delta x)y + x\delta y + (\delta x)(\delta y)$  для всех  $x, y \in A_3$ .

в) Приведите пример двух диаграмм из а) с различными гомоморфизмами  $\eta_1$  и  $\eta_2$ .

### 3.2. Приведённые гомологии

Формулировки и доказательства многих теорем упрощаются, если вместо групп гомологий  $H_k(K)$  рассматривать группы *приведённых* гомологий  $\tilde{H}_k(K)$ , которые можно определить следующими эквивалентными способами.

**О п р е д е л е н и е 1.** Группа  $\tilde{H}_k(K)$  — ядро гомоморфизма  $p_*: H_k(K) \rightarrow H_k(*)$ , где  $p: K \rightarrow *$  — отображение комплекса  $K$  в одноточечное пространство.

**О п р е д е л е н и е 2.** Заменяем отображение  $\partial_0: C_0(K) \rightarrow 0$  на отображение  $\varepsilon: C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ , где  $\varepsilon(v) = 1$  для любой вершины  $v$ . Если  $c_1 \in C_1(K)$ , то  $\varepsilon \partial_1 c_1 = 0$ , поэтому для нового цепного комплекса тоже можно определить группы гомологий  $\tilde{H}_k(K)$ .

Отображение  $\varepsilon$  называют *аугментацией*. Такое название (augmentation — увеличение) связано с тем, что мы увеличиваем цепной комплекс

$$\dots \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_0} C_0(K) \longrightarrow 0,$$

заменяя его на цепной комплекс

$$\dots \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_0} C_0(K) \xrightarrow{\varepsilon} C_{-1}(K) \longrightarrow 0,$$

где  $C_{-1}(K) = \mathbb{Z}$ .

Эквивалентность определений 1 и 2 следует из того, что  $\tilde{H}_k(K) = H_k(K)$  при  $k \geq 1$ , а отображение  $p_0: C_0(K) \rightarrow C_0(*) = \mathbb{Z}$  совпадает с  $\varepsilon$ .

Если  $i: * \rightarrow X$  — любое отображение, то  $pi = \text{id}_*$ , поэтому

$$H_0(K) = \text{Im } p_* \oplus \text{Ker } i_* = \tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}.$$

Таким образом,  $\tilde{H}_0(K) \cong H_0(K, *)$ .

Точная последовательность пары имеет место и для приведённых гомологий.

Пример 3.2 показывает, что  $H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_k(S^n)$  при всех  $k$ .

Мы уже показали, что  $H_k(K, L) \cong H_k(K \cup CL)$  при  $k \geq 2$ . Используя приведённые гомологии, можно показать, что  $H_k(K, L) \cong \tilde{H}_k(K \cup CL)$  при  $k = 0$  и  $1$ .

**У п р а ж н е н и е.** Пусть симплициальный комплекс  $K$  (не обязательно связный) вложен в  $\mathbb{R}^n$ . Докажите, что  $H_i(\mathbb{R}^n, K) \cong H_{i-1}(K)$  при  $i \geq 2$  и  $H_1(\mathbb{R}^n, K) \cong \tilde{H}_0(K)$ . Более того, путь, концы которого лежат в  $K$ , представляет нулевой элемент группы  $H_1(\mathbb{R}^n, K)$  тогда и только тогда, когда эти концы лежат в одной компоненте связности комплекса  $K$ .

### 3.3. Последовательность Майера—Вьеториса

Точная последовательность Майера—Вьеториса связывает гомологии объединения двух симплициальных комплексов  $K_0$  и  $K_1$ , их пересечения и их самих. В простейшем случае, когда  $K_0$  и  $K_1$  состоят из нескольких точек, можно воспользоваться хорошо известной формулой включений и исключений:  $N = N_0 + N_1 - N_{01}$ , где  $N$  — количество точек в  $K_0 \cup K_1$ ,  $N_0$  и  $N_1$  — количества точек в  $K_0$  и  $K_1$ ,  $N_{10}$  — количество точек в  $K_0 \cap K_1$ . На языке точных последовательностей эту формулу можно записать так:

$$0 \longrightarrow H_0(K_0 \cap K_1) \longrightarrow H_0(K_0) \oplus H_0(K_1) \longrightarrow H_0(K_0 \cup K_1) \longrightarrow 0.$$

Другой простой пример точной последовательности такого вида дают гомологии букета  $K = K_0 \vee K_1$  двух симплициальных комплексов. В этом случае уже на уровне цепей имеет место изоморфизм  $C_k(K) \cong C_k(K_0) \oplus C_k(K_1)$  при  $k \geq 1$ . Кроме того, ядро граничного гомоморфизма в  $C_1(K)$  является прямой суммой ядер граничных гомоморфизмов в  $C_1(K_0)$  и в  $C_1(K_1)$ . Поэтому для любого  $k \geq 1$  имеется канонический изоморфизм  $H_k(K) \cong H_k(K_0) \oplus H_k(K_1)$ .

После этих примеров может возникнуть предположение, что имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow H_k(K_0 \cap K_1) \longrightarrow H_k(K_0) \oplus H_k(K_1) \longrightarrow H_k(K_0 \cup K_1) \longrightarrow 0.$$

Но если представить окружность  $S^1$  как объединение двух дуг  $K_0$  и  $K_1$ , пересечение которых состоит из двух точек, то при  $k = 1$  такой точной последовательности не существует. В действительности на  $k$ -мерные гомологии комплексов  $K_0 \cup K_1$  непосредственное влияние оказывают не только  $k$ -мерные гомологии комплексов  $K_0 \cap K_1$ ,  $K_0$  и  $K_1$ , но и их  $(k - 1)$ -мерные гомологии, и правильная точная последовательность записывается следующим образом.

**Т е о р е м а 3.4** (Майер—Вьеторис [Ma2], [Vi2]). *Пусть  $K$  — симплициальный комплекс,  $K_0$  и  $K_1$  — такие его подкомплексы, что  $K = K_0 \cup K_1$ . Положим  $L = K_0 \cap K_1$ . Тогда имеется точная последовательность*

$$\dots \longrightarrow H_k(L) \longrightarrow H_k(K_0) \oplus H_k(K_1) \longrightarrow H_k(K) \longrightarrow H_{k-1}(L) \longrightarrow \dots$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Последовательность Майера—Вьеториса возникает из точной последовательности

$$0 \longrightarrow C_*(L) \xrightarrow{(j_0, -j_1)} C_*(K_0) \oplus C_*(K_1) \xrightarrow{(i_0, i_1)} C_*(K) \longrightarrow 0, \quad (1)$$

которую мы сейчас опишем. Комплекс  $C_*(K_0) \oplus C_*(K_1)$  состоит из групп  $C_k(K_0) \oplus C_k(K_1)$ ; граничный гомоморфизм в нём — прямая сумма гранич-

ных гомоморфизмов, т. е.  $\partial(c^0, c^1) = (\partial c^0, \partial c^1)$ . Отображения  $j_\alpha: L \rightarrow K_\alpha$  и  $i_\alpha: K_\alpha \rightarrow K$  — естественные включения.

Проверим точность последовательности (1). Мономорфность отображения  $(j_0, -j_1)$  очевидна. Эпиморфность отображения  $(i_0, i_1)$  следует из того, что  $K = K_0 \cup K_1$ . Действительно, пусть  $c = \sum a_i \Delta_i^k \in C_k(K)$  и  $c^0$  — сумма тех слагаемых, для которых  $\Delta_i^k \subset K_0$ . Тогда носителем цепи  $c - c^0$  служит  $K_1$  и  $(i_0, i_1)(c^0, c - c^0) = c^0 + (c - c^0) = c$ .

Остаётся проверить точность в среднем члене. Образ отображения  $(j_0, -j_1)$  состоит из цепей вида  $(c, -c)$ , где  $c$  — цепь в  $L$ . Ядро отображения  $(i_0, i_1)$  состоит из цепей вида  $(c, -c)$ , где  $c$  — цепь в  $K_0 \cap K_1 = L$ .

Ясно также, что гомологии цепного комплекса  $C_*(K_0) \oplus C_*(K_1)$  изоморфны  $H_*(K_0) \oplus H_*(K_1)$ .  $\square$

Для приведённых гомологий тоже имеет место точная последовательность Майера—Вьеториса. Это следует из того, что если мы положим  $(j_0, -j_1)(n) = (n, -n)$  и  $(i_0, i_1)(m, n) = m + n$ , то получим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_0(L) & \xrightarrow{(j_0, -j_1)} & C_0(K_0) \oplus C_0(K_1) & \xrightarrow{(i_0, i_1)} & C_0(K) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon_L & & \downarrow \varepsilon_0 \oplus \varepsilon_1 & & \downarrow \varepsilon_K \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{(j_0, -j_1)} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{(i_0, i_1)} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \end{array}$$

С помощью точной последовательности Майера—Вьеториса для приведённых гомологий легко вычисляются группы гомологий надстройки.

**Теорема 3.5** (изоморфизм надстройки). Пусть  $K$  — симплициальный комплекс,  $\Sigma K$  — надстройка над  $K$ . Тогда для любого  $k \geq 1$  имеется канонический изоморфизм  $H_k(\Sigma K) \cong \tilde{H}_{k-1}(K)$ .

**Доказательство.** Представим  $\Sigma K$  в виде  $K_0 \cup K_1$ , где  $K_0$  и  $K_1$  — конусы над  $K$ , причём  $K_0 \cap K_1 = K$ . Запишем последовательность Майера—Вьеториса для приведённых гомологий:

$$\tilde{H}_k(K_0) \oplus \tilde{H}_k(K_1) \rightarrow \tilde{H}_k(\Sigma K) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(K) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(K_0) \oplus \tilde{H}_{k-1}(K_1).$$

Пространства  $K_0$  и  $K_1$  стягиваемы, поэтому крайние члены последовательности равны нулю, а значит, среднее отображение — изоморфизм.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Мы используем приведённые гомологии, потому что при использовании обычных гомологий приходится отдельно разбирать случай  $k = 1$ .

**З а д а ч а 3.6.** Вычислите гомологии тора  $T^2$ .

**З а д а ч а 3.7.** Докажите, что  $H_k(S^p \times S^q, S^p \vee S^q) \cong H_k(S^{p+q})$  для всех  $k \geq 1$ .

**З а д а ч а 3.8.** Вычислите гомологии пространства  $S^p \times S^q$ .

З а д а ч а 3.9. а) Вычислите гомологии дополнения узла в  $S^3$  (ответ не зависит от выбора узла).

б) Рассмотрим в  $S^3$  зацепление, состоящее из  $n$  связных компонент. Вычислите гомологии дополнения этого зацепления (ответ зависит только от  $n$ ).

З а д а ч а 3.10. Пусть  $M^n$  — гладкое многообразие. Докажите, что  $H_k(M^n \setminus \text{int } D^n) \cong H_k(M^n)$  при  $1 \leq k \leq n - 2$ . (Здесь  $D^n$  — шар, расположенный в некоторой карте.)

З а д а ч а 3.11. Пусть  $K$  — симплициальный комплекс,  $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$  — такое семейство его подкомплексов, что все их пересечения ациклически и они покрывают  $K$ . Докажите, что группы гомологий комплекса  $K$  изоморфны группам гомологий нерва\*) покрытия  $\mathcal{L}$ .

У теоремы Майера—Вьеториса есть такое обобщение (*относительная последовательность Майера—Вьеториса*).

Т е о р е м а 3.6. Пусть  $L_0 \subset K_0$  и  $L_1 \subset K_1$  — подкомплексы симплициального комплекса  $K$ . Тогда имеет место точная последовательность

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_k(K_0 \cap K_1, L_0 \cap L_1) &\longrightarrow H_k(K_0, L_0) \oplus H_k(K_1, L_1) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_k(K_0 \cup K_1, L_0 \cup L_1) \longrightarrow H_{k-1}(K_0 \cap K_1, L_0 \cap L_1) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Относительная последовательность Майера—Вьеториса возникает из короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow \frac{C_*(K_0 \cap K_1)}{C_*(L_0 \cap L_1)} \xrightarrow{(j_0, -j_1)} \frac{C_*(K_0)}{C_*(L_0)} \oplus \frac{C_*(K_1)}{C_*(L_1)} \xrightarrow{(i_0, i_1)} \frac{C_*(K_0 \cup K_1)}{C_*(L_0 \cup L_1)} \longrightarrow 0, \quad (2)$$

которая устроена следующим образом. Для каждой четвёрки абелевых групп  $H_1 \subset H_2$ ,  $G_1 \subset G_2$ , где  $H_1 \subset G_1$  и  $H_2 \subset G_2$ , определено каноническое отображение факторгрупп  $G_1/H_1 \rightarrow G_2/H_2$ . Отображения  $j_0$ ,  $j_1$  и  $i_0$ ,  $i_1$  — канонические отображения такого вида.

Если  $c \in C_*(L_0) \cap C_*(L_1)$ , то  $c \in C_*(L_0 \cap L_1)$ . Поэтому  $(j_0, -j_1)$  — мономорфизм.

Проверим, что  $(i_0, i_1)$  — эпиморфизм. Пусть  $c = \sum a_i \Delta_i^k \in C_*(K_0 \cup K_1)$ ,  $c^0$  — сумма тех слагаемых, для которых  $\Delta_i^k \subset K_0$ . Тогда цепь  $c - c^0$  лежит в  $C_*(K_1)$ . Поэтому паре  $(c^0, c - c^0)$  можно сопоставить элемент средней группы из последовательности (2). Образ этого элемента при отображении  $(i_0, i_1)$  совпадает с  $c \pmod{C_*(L_0 \cup L_1)}$ .

Проверим точность в среднем члене. Образ отображения  $(j_0, -j_1)$  состоит из относительных цепей вида  $(c \pmod{C_*(L_0)}, -c \pmod{C_*(L_1)})$ , где  $c$  — цепь в  $K_0 \cap K_1$ . Ядро отображения  $(i_0, i_1)$  состоит из относительных цепей вида  $(c^0 \pmod{C_*(L_0)}, c^1 \pmod{C_*(L_1)})$ , где  $c^0 + c^1 \in C_*(L_0 \cup L_1)$ .

\*) Определение нерва покрытия приведено в части I на с. 122.

Ясно, что образ содержится в ядре. Рассмотрим элемент ядра. Пусть  $\tilde{c}^0$  — сумма тех слагаемых цепи  $c^0 + c^1$ , которые лежат в  $C_*(L_0)$ ,  $\tilde{c}^1 = -(c^0 + \tilde{c}^0 + c^1)$ . Тогда  $\tilde{c}^1 \in C_*(L_1)$ , поэтому в качестве  $c$  можно взять  $c^0 + \tilde{c}^0 = -(c^1 + \tilde{c}^1)$ .  $\square$

## § 4. Когомологии и формулы универсальных коэффициентов

### 4.1. Когомологии

Пусть  $K$  — симплициальный комплекс,  $G$  — абелева группа и  $C_k(K) = C_k(K; \mathbb{Z})$ . Гомоморфизм  $c^k: C_k(K) \rightarrow G$  называют  $k$ -мерной *коцепью* с коэффициентами (или со значениями) в  $G$ . Группу  $k$ -мерных коцепей обозначают  $C^k(K; G) = \text{Hom}(C_k(K), G)$ .

Текст, который приводится ниже мелким шрифтом, относится к бесконечным симплициальным комплексам. При первом чтении его можно пропустить.

Семейству абелевых групп  $\{G_\alpha\}$  можно сопоставить их *прямую сумму*  $\bigoplus_\alpha G_\alpha$  и *прямое произведение*  $\prod_\alpha G_\alpha$ . Элементами обеих этих групп служат наборы  $(g_\alpha)$ ; сложение определяется покомпонентно. Разница между ними заключается в том, что группа  $\bigoplus_\alpha G_\alpha$  состоит из тех наборов, в которых  $g_\alpha \neq 0$  лишь для конечного множества индексов  $\alpha$ , а группа  $\prod_\alpha G_\alpha$  состоит из всех наборов. Для конечных семейств групп между прямым произведением и прямой суммой нет никакой разницы.

Пусть индекс  $\alpha$  нумерует  $k$ -мерные симплексы комплекса  $K$ . Согласно определению групп цепей  $C_k(K; G) = \bigoplus_\alpha G_\alpha$ , где  $G_\alpha \cong G$ . Но  $C^k(K; G) = \prod_\alpha G_\alpha$ ,  $G_\alpha \cong G$ . Действительно, коцепь — это функция на симплексах со значениями в  $G$ . Каждому симплексу  $\Delta_\alpha^k$  сопоставляется произвольное значение; среди этих значений не обязательно должно быть лишь конечное число отличных от нуля.

В качестве группы цепей берётся прямая сумма, а не прямое произведение, потому что для прямого произведения нельзя определить граничный гомоморфизм. Это связано с тем, что прямая сумма свободных абелевых групп свободна в отличие от прямого произведения.

Предположим, что группа  $G$  является аддитивной группой кольца с единицей. Тогда симплексу  $\Delta_\alpha^k$  можно сопоставить  $k$ -мерную коцепь  $(\Delta_\alpha^k)^*$ , которая принимает значение 1 на  $\Delta_\alpha^k$  и значение 0 на всех остальных  $k$ -мерных симплексах. Поэтому любую  $k$ -мерную коцепь можно записать в виде формальной суммы  $\sum g_\alpha (\Delta_\alpha^k)^*$ , где  $g_\alpha \in G$ . Эта сумма не обязательно состоит из конечного числа слагаемых.

Пусть  $c_k \in C_k(K)$  и  $c^k \in C^k(K; G)$ . Значение гомоморфизма  $c^k$  на элементе  $c_k$  мы будем обозначать  $\langle c^k, c_k \rangle$ . Такое спаривание позволяет сопо-



ставить граничному оператору  $\partial: C_{k+1}(K) \rightarrow C_k(K)$  двойственный оператор  $\delta: C^k(K; G) \rightarrow C^{k+1}(K; G)$ , определив его с помощью формулы

$$\langle \delta c^k, c_{k+1} \rangle = \langle c^k, \partial c_{k+1} \rangle.$$

Обратите внимание, что оператор  $\delta$  повышает размерность, а оператор  $\partial$  понижает.

**У п р а ж н е н и е.** Докажите, что коцепь  $\delta c^k$  принимает на симплексе  $[v_0, \dots, v_{k+1}]$  значение

$$\sum_{i=0}^{k+1} \langle c^k, [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}] \rangle.$$

**З а м е ч а н и е.** Иногда оператор  $\delta: C^k(K; G) \rightarrow C^{k+1}(K; G)$  определяют с помощью формулы

$$\langle \delta c^k, c_{k+1} \rangle = -(-1)^k \langle c^k, \partial c_{k+1} \rangle.$$

Такой выбора знака основан на следующем соглашении, предложенном Маклейном: если переставляются два символа размерностей  $n$  и  $m$ , то нужно ввести знак  $(-1)^{mn}$ ; при этом отображениям  $\partial$  и  $\delta$  приписываются размерности  $-1$  и  $+1$ . Мы этого соглашения не придерживаемся по двум причинам. Во-первых, двойственность отображений  $\partial$  и  $\delta$  используется очень часто, поэтому вводить для этой двойственности дополнительный знак неудобно. Во-вторых, вопрос о том, как изменяется знак при перестановке каких-то символов, достаточно содержателен. Каждый раз он связан с нетривиальными рассуждениями, которые необходимо провести.

Из равенства  $\partial\partial = 0$  следует равенство  $\delta\delta = 0$ . Поэтому можно определить группы *когомологий*

$$H^k(K; G) = Z^k(K; G)/B^k(K; G), \quad H^0(K; G) = Z^0(K; G),$$

где  $Z^k$  и  $B^{k+1}$  — ядро и образ гомоморфизма  $\delta: C^k \rightarrow C^{k+1}$ . Элементы групп  $Z^k$  и  $B^k$  называют *коциклами* и *кограницами*.

**Пример 4.1.** Пусть  $K$  — связный симплициальный комплекс. Тогда  $H^0(K; G) = G$ .

**Доказательство.** Пусть  $c_1 = [v_0, v_1]$ . Тогда  $\partial c_1 = [v_1] - [v_0]$ . Поэтому  $\langle \delta c^0, c_1 \rangle = \langle c^0, \partial c_1 \rangle = \langle c^0, [v_1] \rangle - \langle c^0, [v_0] \rangle$ . Таким образом, равенство  $\delta c^0 = 0$  означает, что коцепь  $c^0$  принимает одинаковые значения в любых двух вершинах, соединённых ребром. Для связного симплициального комплекса  $K$  это означает, что коцепь  $c^0$  принимает одинаковые значения во всех вершинах. Поэтому  $Z^0(K; G) = G$ .  $\square$

**Теорема 4.1.** Пусть  $G$  — аддитивная группа поля  $F$ . Тогда  $H^k(K; G)$  — двойственное пространство для  $H_k(K; G)$ .

**Доказательство.** Группы  $C^k(K; G)$  и  $C_k(K; G)$  являются линейными пространствами над полем  $F$ , причём  $C^k$  — двойственное пространство для  $C_k$ . Отображение  $\partial$  линейное, и отображение  $\delta$  ему сопряжено (двойственно). Поэтому нужно доказать, что если  $A: U \rightarrow V$  и  $B: V \rightarrow W$  — линейные отображения, для которых  $BA = 0$ , то  $\text{Кег } A^*/\text{Им } B^*$  — двойственное пространство для  $\text{Кег } B/\text{Им } A$ .

Линейные функции на  $\text{Кег } B$  — это линейные функции на  $V$ , рассматриваемые с точностью до функций вида  $g(Bx)$ ; функции вида  $g(Bx)$  образуют пространство  $\text{Им } B^*$ . Линейные функции на  $\text{Кег } B/\text{Им } A$  — это линейные функции на  $\text{Кег } B$ , для которых  $f(Ax) = 0$  для всех  $x$ ; функции, для которых  $f(Ax) = 0$ , образуют пространство  $\text{Кег } A^*$ .  $\square$

**Следствие.** Если  $G$  — аддитивная группа поля  $F$  и одно из линейных пространств  $H^k(K; G)$  и  $H_k(K; G)$  над  $F$  конечномерно, то  $H^k(K; G) \cong H_k(K; G)$ ; этот изоморфизм не канонический.

Симплициальное отображение  $\varphi: K \rightarrow L$  индуцирует гомоморфизм  $\varphi^*: H^k(L; G) \rightarrow H^k(K; G)$ , действующий в противоположном направлении. Действительно, коцепи  $c^k \in C^k(L; G)$  соответствует коцепь  $\varphi^k c^k \in C^k(K; G)$ , для которой  $\varphi^k c^k(\Delta) = c^k(\varphi(\Delta))$ .

*Приведённые* группы когомологий определяются посредством замены аугментации  $\varepsilon: C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$  двойственным отображением  $\tilde{\varepsilon}: G \rightarrow C^0(K; G)$ , где  $\tilde{\varepsilon}(c_0) = g\varepsilon(c_0)$ .

Группы *относительных* коцепей определяются следующим образом:

$$C^k(K, L; G) = \text{Hom}(C_k(K, L); G).$$

Группа относительных коцепей является подгруппой в группе абсолютных коцепей. Она состоит из коцепей, обращающихся в нуль на  $C_k(L)$ . Напомним, что группа относительных цепей является факторгруппой группы абсолютных цепей. При двойственности факторгруппе соответствует подгруппа.

В относительном случае кограницный гомоморфизм тоже определяется как двойственный граничному. *Относительные* группы когомологий определяются естественным образом.

**У п р а ж н е н и е.** Докажите, что если каждая компонента связности пространства  $|K|$  содержит хотя бы одну компоненту связности пространства  $|L|$ , то  $H^0(K, L; G) = 0$ .

Короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow C_k(L) \xrightarrow{i_k} C_k(K) \xrightarrow{p_k} C_k(K, L) \longrightarrow 0 \quad (1)$$

индуцирует двойственную последовательность

$$0 \longleftarrow C^k(L; G) \xleftarrow{i^k} C^k(K; G) \xleftarrow{p^k} C^k(K, L; G) \longleftarrow 0. \quad (2)$$

Эта последовательность тоже точная, но доказательство этого утверждения требует определённых усилий. Более того, доказательство точности последовательности (2) использует одно специальное свойство последовательности (1), а именно её расщепимость. Точную последовательность  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$  называют *расщепимой*, если для неё выполняется любое из трёх эквивалентных условий, сформулированных в лемме 4.1.

*Лемма 4.1. Пусть  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$  — точная последовательность. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *эта последовательность имеет вид\**)

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0, \quad (3)$$

где  $i$  — естественное включение,  $p$  — естественная проекция;

б) *гомоморфизм  $\varphi$  имеет левый обратный, т.е. существует гомоморфизм  $\Phi: B \rightarrow A$ , для которого  $\Phi\varphi = \text{id}_A$ ;*

в) *гомоморфизм  $\psi$  имеет правый обратный, т.е. существует гомоморфизм  $\Psi: C \rightarrow B$ , для которого  $\psi\Psi = \text{id}_C$ .*

*Доказательство.* Ясно, что для последовательности вида (3) выполняются свойства б) и в). Действительно, можно положить  $\Phi(a, c) = a$  и  $\Psi(c) = (0, c)$ . Поэтому остаётся проверить, что если выполнено свойство б) или в), то последовательность имеет вид (3).

Предположим, что  $\Phi\varphi = \text{id}_A$ . Покажем, что в таком случае  $B = \text{Im } \varphi \oplus \oplus \text{Ker } \Phi$ . Любой элемент  $b \in B$  можно представить в виде  $b = \varphi\Phi(b) + + (b - \varphi\Phi(b))$ , где  $\varphi\Phi(b) \in \text{Im } \varphi$  и  $b - \varphi\Phi(b) \in \text{Ker } \Phi$ . Кроме того, если  $b \in \text{Im } \varphi \cap \text{Ker } \Phi$ , то  $b = \varphi(a)$  и  $0 = \Phi(b) = \Phi\varphi(a) = a$ , поэтому  $b = 0$ .

Предположим, что  $\psi\Psi = \text{id}_C$ . Покажем, что в таком случае  $B = \text{Ker } \psi \oplus \oplus \text{Im } \Psi$ . Любой элемент  $b \in B$  можно представить в виде  $b = (b - \Psi\psi(b)) + + \Psi\psi(b)$ , где  $b - \Psi\psi(b) \in \text{Ker } \psi$  и  $\Psi\psi(b) \in \text{Im } \Psi$ . Кроме того, если  $b \in \in \text{Ker } \psi \cap \text{Im } \Psi$ , то  $b = \Psi(c)$  и  $0 = \psi(b) = \psi\Psi(c) = c$ , поэтому  $b = 0$ .  $\square$

**Задача 4.1.** Докажите лемму 4.1 с помощью 5-леммы.

**Задача 4.2.** Дано расслоение\*\*)  $p: E \rightarrow B$  со слоем  $F$ .

а) Докажите, что если существует сечение  $s: B \rightarrow E$  (т.е.  $p \circ s = = \text{id}_B$  — тождественное отображение группы  $B$ ), то  $\pi_n(E) \cong \pi_n(B) \oplus \pi_n(F)$ .

\*) Говоря формально, это означает, что существует изоморфизм  $f: B \rightarrow A \oplus C$ , для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & B & & & \\ & & \nearrow \varphi & \downarrow f & \searrow \psi & & \\ 0 & \longrightarrow & A & & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow i & & \downarrow p & & \end{array}$$

\*\*) Определение расслоения дано в части I на с. 178.

б) Докажите, что если существует ретракция  $r: E \rightarrow F$ , то  $\pi_n(E) \cong \pi_n(B) \oplus \pi_n(F)$ .

в) Докажите, что если слой  $F$  стягиваем в пространстве  $E$ , то  $\pi_n(B) \cong \pi_n(E) \oplus \pi_{n-1}(F)$ .

Легко проверить, что если группа  $C$  свободная, то точная последовательность  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$  расщепима. Действительно, отображение  $\Psi: C \rightarrow B$  можно построить следующим образом. Выберем в  $C$  базис и для каждого базисного элемента  $c$  положим  $\Psi(c) = b$ , где  $b$  — произвольный элемент множества  $\psi^{-1}(c)$ .

Группа  $C_k(K, L)$  свободная, поэтому точная последовательность (1) расщепима.

**Теорема 4.2.** а) Если последовательность  $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$  точна, то двойственная последовательность

$$\text{Hom}(A, G) \xleftarrow{\tilde{\varphi}} \text{Hom}(B, G) \xleftarrow{\tilde{\psi}} \text{Hom}(C, G) \longleftarrow 0$$

тоже точна.

б) Если последовательность  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$  точна и расщепима, то двойственная последовательность

$$0 \longleftarrow \text{Hom}(A, G) \xleftarrow{\tilde{\varphi}} \text{Hom}(B, G) \xleftarrow{\tilde{\psi}} \text{Hom}(C, G) \longleftarrow 0$$

тоже точна и расщепима.

**Доказательство.** а) Покажем сначала, что  $\text{Ker } \tilde{\psi} = 0$ . Пусть  $\tilde{c} \in \text{Ker } \tilde{\psi}$ , т.е.  $0 = \tilde{\psi}(\tilde{c}) = \tilde{c} \circ \psi$ . Это означает, что  $\tilde{c}(\psi(b)) = 0$  для всех  $b \in B$ . По условию  $\psi$  — эпиморфизм, поэтому  $\tilde{c} = 0$ .

Покажем теперь, что  $\text{Im } \tilde{\psi} = \text{Ker } \tilde{\varphi}$ . Из равенства  $\psi \circ \varphi = 0$  следует равенство  $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi} = 0$ , поэтому  $\text{Im } \tilde{\psi} \subset \text{Ker } \tilde{\varphi}$ . Пусть, далее,  $\tilde{b} \in \text{Ker } \tilde{\varphi}$ , т.е.  $0 = \tilde{\varphi}(\tilde{b}) = \tilde{b} \circ \varphi$ . Это означает, что  $\tilde{b}(\text{Im } \varphi) = 0$ , поэтому можно определить гомоморфизм  $\tilde{b}': B/\text{Im } \varphi \rightarrow G$ . Гомоморфизм  $\psi$  индуцирует изоморфизм  $\psi': B/\text{Im } \varphi \rightarrow C$ . Рассмотрим гомоморфизм  $\tilde{b}'(\psi')^{-1} \in \text{Hom}(C, G)$ . Ясно, что

$$\tilde{\psi}(b'(\psi')^{-1}) = \tilde{b}'(\psi')^{-1} \psi = \tilde{b},$$

поскольку диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & \tilde{b} \swarrow & \downarrow & \searrow \psi & \\ G & \xleftarrow{\tilde{b}'} & B/\text{Im } \varphi & \xrightarrow{\psi'} & C \end{array}$$

коммутативна.

б) Пусть  $\Phi: B \rightarrow A$  — гомоморфизм, для которого  $\Phi\varphi = \text{id}_A$ . Тогда композиция отображений

$$\text{Hom}(A, G) \xrightarrow{\Phi} \text{Hom}(B, G) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \text{Hom}(A, G)$$

тождественна. Поэтому  $\tilde{\varphi}$  — эпиморфизм, т. е. двойственная последовательность точна. Ясно также, что гомоморфизм  $\tilde{\Phi}$  её расщепляет.  $\square$

У п р а ж н е н и е. Докажите, что для точной последовательности  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$  двойственная последовательность  $0 \leftarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \leftarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$  не точна.

В заключение вычислим группы  $\text{Hom}(A, B)$  в некоторых простейших случаях.

(1)  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \cong G$ , поскольку гомоморфизм  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G$  полностью определяется элементом  $\varphi(1) \in G$ , который может быть произвольным.

(2)  $\text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$ , поскольку если  $\varphi: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$  — гомоморфизм, то  $n\varphi(1) = 0$ , а значит,  $\varphi(1) = 0$ .

(3)  $\text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_d$ , где  $d = \text{НОД}(n, m)$ . Действительно, гомоморфизм  $\varphi: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$  полностью определяется элементом  $\varphi(1)$ , который должен удовлетворять соотношению  $n\varphi(1) \equiv 0 \pmod{m}$ , т. е.  $\varphi(1) \equiv 0 \pmod{m/d}$ . Таким образом,

$$\varphi(1) \in \left\{ 0, \frac{m}{d}, \frac{2m}{d}, \dots, \frac{(d-1)m}{d} \right\}.$$

Аналогично (3) доказывается, что  $\text{Hom}(\mathbb{Z}_n, G) \cong \text{Ker}(G \xrightarrow{\times n} G)$ .

У п р а ж н е н и е. С помощью теоремы 4.2 получите точную последовательность Майера—Вьеториса для когомологий.

З а д а ч а 4.3. Пусть  $mA = \{ma \mid a \in A\}$  — подгруппа абелевой группы  $A$ . Докажите, что  $\text{Hom}(A, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(mA, \mathbb{Z})$ .

З а д а ч а 4.4. Докажите, что группа  $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  несчётна. (Здесь  $\mathbb{Q}$  — группа рациональных чисел относительно сложения.)

## 4.2. Тензорное произведение и гомологии с произвольными коэффициентами

Группы когомологий  $H^k(K; G)$  с произвольными коэффициентами мы определили исходя из групп цепей с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ . Аналогичным образом группы гомологий  $H_k(K; G)$  тоже можно определить исходя из групп цепей с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ . При этом группы  $\text{Hom}(C_k(K), G)$  заменяются на  $C_k \otimes G$ , где  $\otimes$  — *тензорное произведение* абелевых групп, которое определяется следующим образом. Пусть  $A$  и  $B$  — абелевы группы,  $F(A, B)$  — свободная абелева группа, базисом которой служат элемен-

ты множества  $A \times B$ ;  $R(A, B)$  — подгруппа в  $F(A, B)$ , порождённая элементами вида  $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$  и  $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$ . Тогда  $A \otimes B = F(A, B)/R(A, B)$ . Смежный класс, содержащий элемент  $(a, b)$ , обозначают  $a \otimes b$ . Менее формально  $A \otimes B$  можно определить как группу, порождённую элементами  $a \otimes b$ , связанными соотношениями  $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$  и  $a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$ .

*З а м е ч а н и е.* Группа  $A \otimes B$  может содержать элемент  $a_1 \otimes b_1 + \dots + a_k \otimes b_k$ , который нельзя представить в виде  $a \otimes b$ .

Легко проверить, что  $\mathbb{Z} \otimes G \cong G$ ; изоморфизм задаётся формулой  $n \otimes g \mapsto ng$ . Действительно,  $n \otimes g = 1 \otimes g + \dots + 1 \otimes g = 1 \otimes (ng)$ . Поэтому любой элемент группы  $\mathbb{Z} \otimes G \cong G$  имеет вид  $1 \otimes g$ ; между этими элементами нет никаких соотношений.

Чуть более сложные рассуждения показывают, что  $\mathbb{Z}_n \otimes G \cong G/nG$ . Действительно, любой элемент группы  $\mathbb{Z}_n \otimes G$  имеет вид  $1 \otimes g$ , причём  $1 \otimes ng = 0$ . В частности,  $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_d$ , где  $d = \text{НОД}(n, m)$ . Кроме того,  $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Q} = 0$ .

Непосредственно из определения тензорного произведения легко выводятся следующие два свойства.

1. Если отображение  $\varphi: A \times B \rightarrow C$  билинейно, т. е.  $\varphi(a + a', b) = \varphi(a, b) + \varphi(a', b)$  и  $\varphi(a, b + b') = \varphi(a, b) + \varphi(a, b')$ , то существует гомоморфизм  $\tilde{\varphi}: A \otimes B \rightarrow C$ , для которого  $\tilde{\varphi}(a \otimes b) = \varphi(a, b)$ .

2. Для любых двух гомоморфизмов  $\varphi: A \rightarrow A'$  и  $\psi: B \rightarrow B'$  существует гомоморфизм  $\varphi \otimes \psi: A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'$ , для которого  $(\varphi \otimes \psi)(a \otimes b) = \varphi(a) \otimes \psi(b)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} (\varphi \otimes \psi)[(a + a') \otimes b - a \otimes b - a' \otimes b] = \\ = [\varphi(a) + \varphi(a')] \otimes \psi(b) - \varphi(a) \otimes \psi(b) - \varphi(a') \otimes \psi(b) = 0. \end{aligned}$$

Для тензорного произведения справедлива следующая теорема, двойственная теореме 4.2.

**Теорема 4.3.** а) Если последовательность  $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$  точна, то последовательность

$$A \otimes G \xrightarrow{\varphi \otimes 1} B \otimes G \xrightarrow{\psi \otimes 1} C \otimes G \longrightarrow 0,$$

где  $1 = \text{id}_G$ , тоже точна.

б) Если последовательность  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$  точна и расщепима, то последовательность

$$0 \longrightarrow A \otimes G \xrightarrow{\varphi \otimes 1} B \otimes G \xrightarrow{\psi \otimes 1} C \otimes G \longrightarrow 0$$

тоже точна и расщепима.

**Доказательство.** а) Покажем сначала, что  $\psi \otimes 1$  — эпиморфизм и его ядро совпадает с  $\text{Кер } \psi \otimes G$ . Гомоморфизм  $\psi \otimes 1$  индуцирует гомоморфизм

$$\widetilde{\psi \otimes 1}: B \otimes G / (\text{Кер } \psi \otimes G) \rightarrow C \otimes G.$$

Достаточно проверить, что  $\widetilde{\psi \otimes 1}$  — изоморфизм. Определим отображение  $\Psi: C \times G \rightarrow B \otimes G / (\text{Кер } \psi \otimes G)$  следующим образом: положим  $\Psi(c, g) = b \otimes g + \text{Кер } \psi \otimes G$ , где  $\psi(b) = c$ . Это определение корректно, поскольку если  $\psi(b') = c$ , то  $b \otimes g - b' \otimes g = (b - b') \otimes g$ , где  $b - b' \in \text{Кер } \psi$ . Отображение  $\Psi$  билинейно, поэтому оно индуцирует гомоморфизм  $\widetilde{\Psi}: C \otimes G \rightarrow B \otimes G / (\text{Кер } \psi \otimes G)$ . Отображения  $\widetilde{\psi \otimes 1}$  и  $\widetilde{\Psi}$  взаимно обратны.

Таким образом,  $\text{Кер}(\psi \otimes 1) = \text{Кер } \psi \otimes G = \text{Im } \varphi \otimes G = \text{Im}(\varphi \otimes 1)$ ; последнее равенство следует из того, что группа  $\text{Im}(\varphi \otimes 1)$  порождена элементами вида  $\varphi(a) \otimes g$ .

б) Пусть  $\Phi: B \rightarrow A$  — гомоморфизм, для которого  $\Phi\varphi = \text{id}_A$ . Тогда

$$(\Phi \otimes 1) \circ (\varphi \otimes 1) = \Phi\varphi \otimes 1 = \text{id}_A \otimes \text{id}_G = \text{id}_{A \otimes G},$$

поэтому  $\varphi \otimes 1$  — мономорфизм и отображение  $\Phi \otimes 1$  расщепляет точную последовательность тензорных произведений.  $\square$

**У п р а ж н е н и е.** Докажите, что для точной последовательности  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2$  индуцированная последовательность  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2$  не точна.

### 4.3. Группы $\text{Тог}$ и $\text{Ext}$

Группы гомологий и когомологий с произвольными коэффициентами выражаются через группы гомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ . В эти выражения входят операции  $\text{Тог}$  и  $\text{Ext}$ , сопоставляющие паре абелевых групп  $A$  и  $B$  абелевы группы  $\text{Тог}(A, B)$  и  $\text{Ext}(A, B)$ . Отметим, что для конкретных вычислений достаточно знать  $\text{Тог}(A, B)$  и  $\text{Ext}(A, B)$  для  $A, B = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m, \mathbb{Q}$  и  $\mathbb{R}$ .

Группы  $\text{Тог}(A, B)$  и  $\text{Ext}(A, B)$  определяются следующим образом. Абелеву группу  $A$  можно задать образующими и соотношениями. Это означает, что существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0, \quad (1)$$

где  $F$  и  $R$  — свободные абелевы группы (группа  $F$  порождена образующими,  $R$  — соотношениями; группа  $R$  свободна, поскольку она является подгруппой свободной группы). Точную последовательность (1) называют *свободной резольвентой* абелевой группы  $A$ . Точная последователь-

ность (1) индуцирует точные последовательности

$$R \otimes B \xrightarrow{i \otimes 1} F \otimes B \xrightarrow{p \otimes 1} A \otimes B \longrightarrow 0,$$

$$\text{Hom}(R, B) \xleftarrow{\tilde{i}} \text{Hom}(F, B) \xleftarrow{\tilde{p}} \text{Hom}(A, B) \longleftarrow 0.$$

Положим  $\text{Tor}(A, B) = \text{Ker}(i \otimes 1)$  и  $\text{Ext}(A, B) = \text{Coker } \tilde{i} = \text{Hom}(R, B) / \text{Im } \tilde{i}$  (обратите внимание, что в обоих определениях используется только отображение  $i: R \rightarrow F$ ). Таким образом, группы  $\text{Tor}(A, B)$  и  $\text{Ext}(A, B)$  дополняют рассматриваемые точные последовательности до точных последовательностей

$$0 \longrightarrow \text{Tor}(A, B) \longrightarrow R \otimes B \xrightarrow{i \otimes 1} F \otimes B \xrightarrow{p \otimes 1} A \otimes B \longrightarrow 0,$$

$$0 \longleftarrow \text{Ext}(A, B) \longleftarrow \text{Hom}(R, B) \xleftarrow{\tilde{i}} \text{Hom}(F, B) \xleftarrow{\tilde{p}} \text{Hom}(A, B) \longleftarrow 0.$$

Прежде всего нужно проверить, что так определённые группы  $\text{Tor}(A, B)$  и  $\text{Ext}(A, B)$  не зависят от выбора свободной резольвенты (1).

*Лемма 4.2.* а) Для любого гомоморфизма  $\varphi: A \rightarrow A'$  произвольные свободные резольвенты абелевых групп  $A$  и  $A'$  можно дополнить до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{i} & F & \xrightarrow{p} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & R' & \xrightarrow{i'} & F' & \xrightarrow{p'} & A' \longrightarrow 0. \end{array}$$

б) Если  $\psi_0$  и  $\psi_1$  — ещё одна пара гомоморфизмов, дополняющих свободные резольвенты до коммутативной диаграммы, то существует гомоморфизм  $D_0: F \rightarrow R'$ , для которого  $i'D_0 = \varphi_0 - \psi_0$  и  $D_0i = \varphi_1 - \psi_1$ .

*Доказательство.* а) Выберем в свободных абелевых группах  $R$  и  $F$  базисы  $\{r_\alpha\}$  и  $\{f_\beta\}$ . Отображение  $p'$  — эпиморфизм, поэтому в  $F'$  существуют элементы  $f'_\beta$ , для которых  $p'(f'_\beta) = \varphi p(f_\beta)$ . Для базисных элементов положим  $\varphi_0(f_\beta) = f'_\beta$ , а затем продолжим  $\varphi_0$  до гомоморфизма групп  $F \rightarrow F'$ . Тогда  $p'\varphi_0 = \varphi p$ .

По условию  $pi = 0$ , поэтому  $p'\varphi_0i(r_\alpha) = \varphi pi(r_\alpha) = 0$ . Из равенства  $\text{Ker } p' = \text{Im } i'$  следует, что в  $R'$  существует элемент  $r'_\alpha$ , для которого  $i'(r'_\alpha) = \varphi_0i(r_\alpha)$ . Положим  $\varphi_1(r_\alpha) = r'_\alpha$ . Тогда  $i'\varphi_1 = \varphi_0i$ .

б) Выберем в  $F$  базис  $\{f_\alpha\}$ . По условию  $p'(\varphi_0 - \psi_0)(f_\alpha) = \varphi p(f_\alpha) - \varphi p(f_\alpha) = 0$ . Поэтому в  $R'$  существует элемент  $r'_\alpha$ , для которого  $i'(r'_\alpha) = (\varphi_0 - \psi_0)(f_\alpha)$ . Положим  $D_0(f_\alpha) = r'_\alpha$ . Тогда  $i'D_0 = \varphi_0 - \psi_0$ . Следовательно,  $i'D_0i = (\varphi_0 - \psi_0)i = i'(\varphi_1 - \psi_1)$ . Отображение  $i$  — мономорфизм, поэтому  $D_0i = \varphi_1 - \psi_1$ . □



Тяжеловесная формулировка леммы 4.2 допускает весьма естественную интерпретацию на языке гомологической алгебры. Рассмотрим для этого последовательность гомоморфизмов

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} F$$

как цепной комплекс  $C_*$  (здесь  $C_0 = F$ ,  $C_1 = R$  и  $C_k = 0$  при  $k > 1$ ). Лемма 4.2 утверждает, что любой гомоморфизм  $\varphi: A \rightarrow A'$  индуцирует цепное отображение  $C_* \rightarrow C'_*$ , которое единственно с точностью до цепной гомотопии. В таком случае однозначно определено индуцированное отображение гомологий  $H_*(C_*) \rightarrow H_*(C'_*)$ . Более того, однозначно определены отображения гомологий  $H_*(C_* \otimes G) \rightarrow H_*(C'_* \otimes G)$  и  $H_*(\text{Hom}(C'_*, G)) \rightarrow H_*(\text{Hom}(C_*, G))$ . Нас интересуют именно эти гомоморфизмы, поскольку  $H_1(C_* \otimes G) = \text{Tor}(A, G)$  и  $H_1(\text{Hom}(C_*, G)) = \text{Ext}(A, G)$ . Отметим также, что  $H_0(C_* \otimes G) = F \otimes G/R \otimes G \cong A \otimes G$  и  $H_0(\text{Hom}(C_*, G)) \cong \text{Hom}(A, G)$ .

Корректность определения группы  $\text{Tor}(A, B)$  следует теперь из того, что  $(\text{id})_* = \text{id}$  и  $(\varphi\psi)_* = \varphi_*\psi_*$ . Для  $\text{Ext}(A, B)$  доказательство аналогично, только в этом случае  $(\varphi\psi)_* = \psi_*\varphi_*$ .

Вычислим группы  $\text{Tor}(A, B)$  и  $\text{Ext}(A, B)$  в некоторых простейших случаях. Прежде всего отметим, что если группа  $A$  свободная, то  $\text{Tor}(A, B) = 0$  и  $\text{Ext}(A, B) = 0$ . В частности,  $\text{Tor}(\mathbb{Z}, B) = 0$  и  $\text{Ext}(\mathbb{Z}, B) = 0$ .

Для группы  $A = \mathbb{Z}_n$  можно рассмотреть свободную резольвенту

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0.$$

Вычислим сначала  $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, B)$ . Любой элемент группы  $\mathbb{Z} \otimes B$  можно представить в виде  $1 \otimes b$ . Нам нужно вычислить ядро отображения  $1 \otimes b \mapsto n \otimes b = 1 \otimes nb$ . Ясно, что оно состоит из элементов  $1 \otimes b$ , для которых  $nb = 0$ . Таким образом, группа  $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, B)$  изоморфна  $\text{Ker}(B \xrightarrow{\times n} B)$ . В частности,  $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$  и  $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_{(n,m)}$ .

Вычислим теперь  $\text{Ext}(\mathbb{Z}_n, B)$ . Ясно, что  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, B) \cong B$  и умножению в  $\mathbb{Z}$  на  $n$  соответствует гомоморфизм  $B \rightarrow B$ , при котором  $b$  переходит в  $nb$ . Поэтому  $\text{Ext}(\mathbb{Z}_n, B) = B/nB$ . В частности,  $\text{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$  и  $\text{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_{(n,m)}$ .

**З а д а ч а 4.5.** Пусть  $A = \mathbb{Z}^k \oplus T$ , где  $T$  — конечная абелева группа. Докажите, что  $\text{Ext}(A, \mathbb{Z}) \cong T$ .

**Т е о р е м а 4.4.** а) Пусть абелева группа  $A$  обладает тем свойством, что  $\text{Ker}(A \xrightarrow{\times n} A) = 0$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\text{Tor}(A, B) = 0$  для любой группы  $B$ .

б) Пусть абелева группа  $B$  обладает тем свойством, что  $nB = B$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\text{Ext}(A, B) = 0$  для любой группы  $A$ .

Доказательство. а) Выберем в  $A$  произвольную конечно порождённую подгруппу  $A'$ . Тогда  $A'$  — свободная абелева группа, поэтому для любой свободной резольвенты

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A' \otimes R & \xrightarrow{1' \otimes i} & A' \otimes F \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes R & \xrightarrow{1 \otimes i} & A \otimes F \end{array} \quad (2)$$

с мономорфным отображением  $1' \otimes i$ . Вертикальные стрелки в этой диаграмме тоже мономорфны, поскольку  $R$  и  $F$  — свободные группы. Чтобы доказать мономорфность отображения  $1 \otimes i$ , рассмотрим в  $A \otimes R$  произвольный элемент  $\omega = a_1 \otimes r_1 + \dots + a_k \otimes r_k$ . Группу  $A'$  можно выбрать так, чтобы она содержала элементы  $a_1, \dots, a_k$ . Тогда из коммутативности диаграммы (2) и мономорфности отображений  $1' \otimes i$  и правой вертикальной стрелки следует, что  $(1 \otimes i)(\omega) \neq 0$ .

б) Для свободной резольвенты

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0$$

получаем гомоморфизм  $\text{Hom}(F, B) \rightarrow \text{Hom}(R, B)$ ; требуется доказать его эпиморфность. Пусть  $\varphi: R \rightarrow B$  — некоторый гомоморфизм. Выберем  $y \in F \setminus R$  и продолжим  $\varphi$  на группу, порождённую  $R$  и  $y$ , следующим образом:

1) если  $ty \notin R$  для всех  $t \in \mathbb{N}$ , то положим  $\tilde{\varphi}(y) = 0$ ;

2) если  $ty \in R$  для некоторого  $t \in \mathbb{N}$ , то выберем минимальное число  $n \in \mathbb{N}$ , обладающее этим свойством, и положим  $\tilde{\varphi}(y) = b$ , где  $b$  — элемент группы  $B$ , для которого  $nb = \varphi(ny)$ .

Продолжение гомоморфизма  $\varphi$  на всю группу  $F$  теперь можно построить по индукции (если группа  $F/R$  не конечно порождённая, то индукция трансфинитная).  $\square$

Следствие. Пусть  $G = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$  (эти поля здесь рассматриваются только как группы относительно сложения). Тогда  $\text{Tor}(G, B) = 0$  и  $\text{Ext}(A, G) = 0$  для любых абелевых групп  $A$  и  $B$ .

При вычислении групп гомологий и когомологий с коэффициентами в  $G$  с помощью формул универсальных коэффициентов встречаются группы  $\text{Tor}(A, G)$  и  $\text{Ext}(A, G)$ . Если  $G = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , то равенство  $\text{Tor}(A, G) = 0$  следует из того, что  $\text{Tor}(A, B) \cong \text{Tor}(B, A)$  для любых абелевых групп  $A$  и  $B$ . Отметим, что  $\text{Ext}$  таким свойством не обладает. Например,  $\text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) = 0$  и  $\text{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$ .

**Задача 4.6.** Докажите, что  $\text{Тог}(A, B) \cong \text{Тог}(B, A)$ ; этот изоморфизм канонический.

Абелеву группу  $T$  называют *периодической*, если для любого  $t \in T$  существует натуральное число  $n$ , для которого  $nt = 0$ .

**Задача 4.7.** Докажите, что если  $\text{Ext}(T, \mathbb{Z}) = 0$  и  $T$  — периодическая группа, то  $T = 0$ .

**Задача 4.8.** Докажите, что если последовательность  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$  точна, то последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(G, A) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \text{Hom}(G, B) \xrightarrow{\tilde{\psi}} \text{Hom}(G, C)$$

тоже точна для любой абелевой группы  $G$ .

Абелеву группу  $G$  называют *делимой*, если для любого натурального  $n$  отображение  $G \rightarrow G$ , заданное формулой  $g \mapsto ng$ , является эпиморфизмом.

**Задача 4.9.** Дана точная последовательность  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$ .

а) Докажите, что для любой свободной абелевой группы  $F$  последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(F, A) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \text{Hom}(F, B) \xrightarrow{\tilde{\psi}} \text{Hom}(F, C) \rightarrow 0$$

точна.

б) Докажите, что для любой делимой группы  $G$  последовательность

$$0 \leftarrow \text{Hom}(A, G) \xleftarrow{\tilde{\varphi}} \text{Hom}(B, G) \xleftarrow{\tilde{\psi}} \text{Hom}(C, G) \leftarrow 0$$

точна.

Свободную резольвенту абелевой группы  $A$  часто называют *проективной резольвентой*. Это связано с тем, что есть двойственное понятие — инъективная резольвента. А именно, точную последовательность  $0 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ , где  $G$  и  $H$  — делимые абелевы группы, называют *инъективной резольвентой* абелевой группы  $A$ .

Инъективная резольвента существует для любой абелевой группы  $A$ . Действительно, факторгруппа делимой группы — делимая группа. Поэтому достаточно вложить  $A$  в некоторую делимую группу  $G$ . Пусть  $A = F/R$ , где  $F$  — свободная группа. Группа  $F$  является прямой суммой некоторого числа групп  $\mathbb{Z}$ . Вложим  $F$  в группу  $G$ , которая является прямой суммой того же самого числа групп  $\mathbb{Q}$ . В группе  $G$  есть подгруппа, соответствующая  $R$ . Факторгруппа  $G/R$  содержит подгруппу  $A$ .

Группу  $\text{Ext}(A, B)$  можно определить не только с помощью проективной резольвенты группы  $A$ , но и с помощью инъективной резольвенты группы  $B$ . А именно, пусть  $0 \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$  — инъективная резольвента группы  $B$ . Согласно задаче 4.8 индуцированная последовательность

$0 \rightarrow \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, G) \rightarrow \text{Hom}(A, H)$  точна. Поэтому её можно дополнить до точной последовательности

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}(A, G) \longrightarrow \text{Hom}(A, H) \longrightarrow \widetilde{\text{Ext}}(A, B) \longrightarrow 0.$$

**Задача 4.10.** Докажите, что  $\widetilde{\text{Ext}}(A, B) \cong \text{Ext}(A, B)$ .

**Задача 4.11.** Дана точная последовательность абелевых групп  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ . Докажите, что для любой абелевой группы  $X$  существуют две точные последовательности

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(X, A) \longrightarrow \text{Hom}(X, B) \longrightarrow \text{Hom}(X, C) \longrightarrow \\ \longrightarrow \text{Ext}(X, A) \longrightarrow \text{Ext}(X, B) \longrightarrow \text{Ext}(X, C) \longrightarrow 0, \\ 0 \longleftarrow \text{Ext}(A, X) \longleftarrow \text{Ext}(B, X) \longleftarrow \text{Ext}(C, X) \longleftarrow \\ \longleftarrow \text{Hom}(A, X) \longleftarrow \text{Hom}(B, X) \longleftarrow \text{Hom}(C, X) \longleftarrow 0. \end{aligned}$$

#### 4.4. Формулы универсальных коэффициентов

Группы гомологий и когомологий с произвольными коэффициентами выражаются через группы гомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ . А именно, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.5** (формулы универсальных коэффициентов). *Для любой абелевой группы  $G$  имеют место точные последовательности*

$$0 \longrightarrow H_k(K) \otimes G \longrightarrow H_k(K; G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{k-1}(K), G) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longleftarrow \text{Hom}(H_k(K), G) \longleftarrow H^k(K; G) \longleftarrow \text{Ext}(H_{k-1}(K), G) \longleftarrow 0,$$

где  $H_k(K) = H_k(K; \mathbb{Z})$ . Эти точные последовательности расщепляются, поэтому имеют место (не канонические) изоморфизмы

$$H_k(K; G) \cong (H_k(K) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H_{k-1}(K), G),$$

$$H^k(K; G) \cong \text{Hom}(H_k(K), G) \oplus \text{Ext}(H_{k-1}(K), G).$$

**Доказательство.** Рассмотрим точную последовательность цепных комплексов

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z_k & \xrightarrow{i} & C_k & \xrightarrow{\partial} & B_{k-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial=0 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial=0 \\ 0 & \longrightarrow & Z_{k-1} & \xrightarrow{i} & C_{k-1} & \xrightarrow{\partial} & B_{k-2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Здесь имеется в виду, что  $C_k = C_k(K; \mathbb{Z})$  и т. п.

Группа  $B_{k-1}$  свободная, поэтому после тензорного умножения на  $G$  снова получаем точную последовательность:

$$0 \longrightarrow Z_k \otimes G \xrightarrow{i \otimes 1} C_k \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes 1} B_{k-1} \otimes G \longrightarrow 0.$$

Короткая точная последовательность цепных комплексов индуцирует точную последовательность гомологий. Учитывая, что группы гомологий цепного комплекса с нулевыми граничными гомоморфизмами совпадают с группами цепей, получаем точную последовательность

$$\dots \longrightarrow B_k \otimes G \longrightarrow Z_k \otimes G \longrightarrow H_k(C_* \otimes G) \longrightarrow B_{k-1} \otimes G \longrightarrow Z_{k-1} \otimes G \longrightarrow \dots$$

Непосредственно из определения связывающего гомоморфизма в точной последовательности гомологий видно, что здесь отображение  $B_k \otimes G \rightarrow Z_k \otimes G$  индуцировано вложением  $j: B_k \rightarrow Z_k$ . Поэтому получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow Z_k \otimes G / B_k \otimes G \longrightarrow H_k(C_* \otimes G) \longrightarrow \text{Ker}(B_{k-1} \otimes G \xrightarrow{j \otimes 1} Z_{k-1} \otimes G) \longrightarrow 0.$$

Здесь  $Z_k \otimes G / B_k \otimes G = H_k \otimes G$  и  $H_k(C_* \otimes G) = H_k(K; G)$ . Кроме того,  $\text{Ker}(B_{k-1} \otimes G \xrightarrow{j \otimes 1} Z_{k-1} \otimes G) = \text{Tor}(H_{k-1}(K), G)$ , поскольку точная последовательность

$$0 \longrightarrow B_{k-1} \longrightarrow Z_{k-1} \longrightarrow H_{k-1} \longrightarrow 0$$

является свободной резольвентой для группы  $H_{k-1} = H_{k-1}(K; \mathbb{Z})$ .

Для когомологий аналогично получаем точную последовательность

$$0 \longleftarrow \text{Hom}(H_k(K), G) \longleftarrow H^k(K; G) \longleftarrow \text{Ext}(H_{k-1}(K), G) \longleftarrow 0.$$

Проверим, что эти точные последовательности расщепляются. В точной последовательности гомологий гомоморфизм  $\varphi: H_k(K) \otimes G \rightarrow H_k(K; G)$  на уровне циклов устроен следующим образом:  $\varphi((\sum n_i \Delta_i^k) \otimes g) = \sum n_i g \Delta_i^k$ . Требуется построить гомоморфизм  $\Phi: H_k(K; G) \rightarrow H_k(K) \otimes G$ , для которого  $\Phi \varphi = \text{id}$ . Точная последовательность

$$0 \longrightarrow Z_k \xrightarrow{i} C_k \xrightarrow{\partial} B_{k-1} \longrightarrow 0$$

расщепляется, поскольку группа  $B_{k-1}$  свободна. Пусть  $l: C_k \rightarrow Z_k$  — расщепляющее отображение, т. е.  $li = \text{id}_{Z_k}$ . Если композицию отображений

$$C_k \otimes G \xrightarrow{l \otimes 1} Z_k \otimes G \longrightarrow H_k \otimes G$$

ограничить на циклы комплекса  $C_* \otimes G$ , то полученное отображение индуцирует гомоморфизм  $\Phi: H_k(K; G) \rightarrow H_k(K) \otimes G$ , поскольку при отображении  $l \otimes 1$  граница переходит в границу. Ясно также, что если  $\sum n_i \Delta_i^k$  — цикл в  $C_k$ , то  $\Phi \varphi((\sum n_i \Delta_i^k) \otimes g) = \Phi(\sum n_i g \Delta_i^k) = (\sum n_i \Delta_i^k) \otimes g$ .

Для когомологий расщепимость точной последовательности следует из теоремы 4.2 б).  $\square$

*С л е д с т в и е.* Если  $G = \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , то  $H_k(K; G) \cong H_k(K) \otimes G$  и  $H^k(K; G) \cong \text{Hom}(H_k(K), G)$ .

При вычислении групп  $\text{Tor}$  и  $\text{Ext}$  можно пользоваться следующими достаточно очевидными изоморфизмами:

$$\begin{aligned}\text{Ext}(A_1 \oplus A_2, B) &\cong \text{Ext}(A_1, B) \oplus \text{Ext}(A_2, B), \\ \text{Tor}(A_1 \oplus A_2, B) &\cong \text{Tor}(A_1, B) \oplus \text{Tor}(A_2, B).\end{aligned}$$

*З а м е ч а н и е.* Для бесконечных семейств абелевых групп имеют место следующие изоморфизмы:

$$\begin{aligned}\text{Ext}\left(\bigoplus_{\alpha} A_{\alpha}, B\right) &= \prod_{\alpha} \text{Ext}(A_{\alpha}, B); & \text{Ext}\left(A, \prod_{\alpha} B\right) &= \prod_{\alpha} \text{Ext}(A, B_{\alpha}); \\ \text{Tor}\left(\bigoplus_{\alpha} A_{\alpha}, B\right) &= \bigoplus_{\alpha} \text{Tor}(A_{\alpha}, B); & \text{Tor}\left(A, \bigoplus_{\alpha} B\right) &= \bigoplus_{\alpha} \text{Tor}(A, B_{\alpha}).\end{aligned}$$

*З а д а ч а 4.12.* Докажите, что если  $H_1(K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r \oplus T_1$ , где  $T_1$  — конечная группа, то  $H^1(K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$ .

*З а д а ч а 4.13.* Пусть  $H_i(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{n_i} \oplus T_i$  и  $H^i(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{m_i} \oplus T^i$ , где  $T_i$  и  $T^i$  — конечные группы. Докажите, что  $m_i = n_i$  и  $T^i \cong T_{i-1}$ .

*З а д а ч а 4.14.* Решите задачу 4.13 исходя непосредственно из определения групп гомологий и когомологий, не обращаясь к формуле универсальных коэффициентов.

*З а д а ч а 4.15.* Пусть  $X$  и  $Y$  — конечные симплициальные комплексы, и пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение. Докажите, что если отображение  $f_*: H_1(X) \rightarrow H_1(Y)$  нулевое, то отображение  $f^*: H^1(Y) \rightarrow H^1(X)$  тоже нулевое.

## § 5. Некоторые вычисления

### 5.1. Фундаментальный класс

Многие гомологические свойства многообразий связаны с тем, что для замкнутого ориентируемого многообразия  $M^n$  группа  $H_n(M^n; \mathbb{Z})$  нетривиальна и порождена одним классом гомологий; для произвольного замкнутого многообразия аналогичное утверждение верно для гомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ . Такими же гомологическими свойствами обладают и псевдомногообразия\*).

---

\*). Определение псевдомногообразия дано в части I на с. 123. Напомним, что любое гладкое многообразие можно триангулировать, а триангулированное многообразие является псевдомногообразием. Поэтому все приводимые ниже теоремы о псевдомногообразиях верны и для гладких многообразий.

Теорема 5.1. Пусть  $M^n$  — псевдомногообразие,  $G$  — произвольная абелева группа.

а) Если край  $M^n$  не пуст, то  $H_n(M^n; G) = 0$ .

б) Если  $M^n$  замкнуто, то

$$H_n(M^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{если } M^n \text{ ориентируемо;} \\ \text{Ker}(G \xrightarrow{\times 2} G), & \text{если } M^n \text{ неориентируемо.} \end{cases}$$

Доказательство. Группа  $H_n(M^n; G)$  состоит из цепей  $c_n = \sum a_i \Delta_i^n$ ,  $a_i \in G$ , для которых  $\partial c_n = 0$ . Предположим, что симплексы  $\Delta_i^n$  и  $\Delta_j^n$  имеют общую грань  $\Delta_s^{n-1}$ . Согласно условию неразветвлённости грань  $\Delta_s^{n-1}$  является гранью только этих двух симплексов, поэтому она входит в  $\partial c_n$  с коэффициентом  $\pm a_i \pm a_j$ ; если ориентации симплексов  $\Delta_i^n$  и  $\Delta_j^n$  согласованы, то коэффициент равен  $\pm(a_i - a_j)$ , а если не согласованы, то он равен  $\pm(a_i + a_j)$ . Коэффициент  $\pm a_i \pm a_j$  может быть равен нулю лишь в том случае, когда  $a_i = \pm a_j$ . Поэтому из условия сильной связности следует, что если  $\partial c_n = 0$ , то  $c_n = \sum \pm a \Delta_i^n$ , где суммирование ведётся по всем  $n$ -мерным симплексам.

Если симплекс  $\Delta^{n-1}$  принадлежит краю многообразия  $M^n$ , то он входит в  $\partial c_n$  с коэффициентом  $\pm a$ . Поэтому из равенства  $\partial c_n = 0$  следует, что  $a = 0$ , т. е.  $H_n(M^n; G) = 0$  для любой группы коэффициентов  $G$ .

Изменив при необходимости ориентации некоторых симплексов, можно считать, что  $c_n = \sum a \Delta_i^n$ . Если псевдомногообразие  $M^n$  замкнуто и  $2a \neq 0$ , то  $\partial c_n = 0$  тогда и только тогда, когда все симплексы  $\Delta_i^n$  ориентированы согласованно; если же  $2a = 0$ , то  $\partial c_n = 0$ . Поэтому если  $M^n$  ориентируемо, то  $H_n(M^n; G) \cong G$ , а если  $M^n$  неориентируемо, то  $H_n(M^n; G) \cong \cong \text{Ker}(G \xrightarrow{\times 2} G)$ .  $\square$

Для произвольного замкнутого псевдомногообразия  $M^n$  гомологический класс цикла  $\sum \Delta_i^n$  в  $H_n(M^n; \mathbb{Z}_2)$  называют *фундаментальным классом* (более формально этот цикл следовало бы записать как  $\sum 1 \cdot \Delta_i^n$ ,  $1 \in \mathbb{Z}_2$ ). Для замкнутого ориентированного псевдомногообразия  $M^n$  гомологический класс цикла  $\sum \Delta_i^n$  в  $H_n(M^n; \mathbb{Z})$  (ориентации всех симплексов  $\Delta_i^n$  согласованы с ориентацией многообразия  $M^n$ ) тоже называют *фундаментальным классом*. Фундаментальный класс псевдомногообразия  $M^n$  обозначают  $[M^n]$ ; для группы коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$  иногда используют обозначение  $[M^n]_2$ .

Задача 5.1. Докажите, что если  $M^n$  — замкнутое ориентируемое многообразие, то утверждение задачи 3.10 на с. 30 остаётся верным и при  $k = n - 1$ . Существенна ли здесь замкнутость многообразия  $M^n$ ? А его ориентируемость?

Для псевдомногообразий с краем теми же самыми методами можно доказать, что

$$H_n(M^n, \partial M^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{если } M^n \text{ ориентируемо;} \\ \text{Ker}(G \xrightarrow{\times 2} G), & \text{если } M^n \text{ неориентируемо.} \end{cases}$$

Действительно, если симплекс  $\Delta^{n-1}$  принадлежит  $\partial M^n$ , то он даёт нулевой вклад в относительную цепь. Фундаментальный класс в относительных группах гомологий определяется точно так же, как и в абсолютных.

Пусть  $M^n$  и  $N^n$  — замкнутые ориентированные псевдомногообразия. Отображение  $f: M^n \rightarrow N^n$  переводит фундаментальный класс  $[M^n]$  в некоторый элемент группы  $H_n(N^n; \mathbb{Z})$ , а любой элемент этой группы имеет вид  $k[N^n]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Целое число  $\deg f$ , для которого  $(\deg f)[N^n] = f_*([M^n])$ , называют *степенью* отображения  $f$ . Если псевдомногообразия  $M^n$  и  $N^n$  замкнутые, но не обязательно ориентируемые, то аналогично можно определить *степень по модулю 2*.

**З а м е ч а н и е.** Это определение степени эквивалентно определению степени как числа прообразов точки с учётом знака, которое приводилось в части I на с. 125.

Если  $M^n$  и  $N^n$  — псевдомногообразия с краем, то для отображения  $f: (M^n, \partial M^n) \rightarrow (N^n, \partial N^n)$  тоже можно рассмотреть образ фундаментального класса  $[M^n]$  в группе  $H_n(N^n, \partial N^n; \mathbb{Z})$  (или в группе  $H_n(N^n, \partial N^n; \mathbb{Z}_2)$ ) и определить степень (или степень по модулю 2).

**Т е о р е м а 5.2.** Пусть  $i_*: H_n(\partial W^{n+1}) \rightarrow H_n(W^{n+1})$  — гомоморфизм, индуцированный естественным включением. Тогда если псевдомногообразиие  $W^{n+1}$  ориентируемо, а его край  $\partial W^{n+1}$  связан, то  $i_* = 0$  для групп коэффициентов  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Z}_2$ , а если оно неориентируемо, то  $i_* = 0$  для группы коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Группа  $H_n(\partial W^{n+1})$  циклическая, поэтому достаточно проверить, что в  $W^{n+1}$  фундаментальный цикл  $[\partial W^{n+1}]$  является границей некоторого цикла. Ясно, что он является границей фундаментального цикла  $[W^{n+1}]$ . Если псевдомногообразиие  $W^{n+1}$  неориентируемо, то его фундаментальный цикл определён только для группы коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$ .  $\square$

**С л е д с т в и е.** Если  $f: \partial W^{n+1} \rightarrow M^n$  — ограничение некоторого непрерывного отображения  $F: W^{n+1} \rightarrow M^n$ , причём псевдомногообразиие  $W^{n+1}$  ориентируемо, а его край  $\partial W^{n+1}$  связан, то  $\deg f = 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Гомоморфизм  $f_*: H_n(\partial W^{n+1}) \rightarrow H_n(M^n)$  представляется в виде композиции  $f_* = F_* i_*$ , поэтому  $f_* = 0$ .  $\square$



**Задача 5.2.** Сопоставим отображению  $f: S^n \rightarrow S^n$  отображение  $\Sigma f: \Sigma S^n \rightarrow \Sigma S^n$ , которое задано на  $S^n \times \{t\}$  посредством  $f$  для всех  $t$ . Докажите, что  $\deg f = \deg \Sigma f$ , используя изоморфизм надстройки.

## 5.2. Клеточные гомологии

Если на симплициальном комплексе  $K$  задана структура  $CW$ -комплекса  $X$ , причём каждый остов  $X^k$  является подкомплексом в  $K$ , то гомологии комплекса  $K$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  можно вычислить, используя цепной комплекс  $C_*$ , в котором  $C_k$  — свободная группа, образующие которой находятся во взаимно однозначном соответствии с  $k$ -мерными клетками комплекса  $X$ . Это существенно облегчает вычисление гомологий, поскольку количество клеток в  $X$  может быть во много раз меньше, чем количество симплексов в  $K$ . Например, минимальная триангуляция сферы  $S^n$  содержит  $2^{n+1} - 1$  симплексов (всех размерностей), а минимальное клеточное разбиение состоит всего из двух клеток ( $n$ -мерной и нульмерной).

**Лемма.** При  $i \neq k$  справедливо равенство  $H_i(X^k, X^{k-1}) = 0$ , и  $H_k(X^k, X^{k-1})$  — свободная абелева группа, образующие которой находятся во взаимно однозначном соответствии с  $k$ -мерными клетками  $X$ .

**Доказательство.** Любая цепь  $c_i \in C_i(X^k, X^{k-1})$  однозначно представляется в виде (конечной) суммы цепей  $c_{i\alpha} \in C_i(e_\alpha^k, \partial e_\alpha^k)$ , где  $\{e_\alpha^k\}$  —  $k$ -мерные клетки  $X$ . При этом  $\partial c_i = \sum \partial c_{i\alpha}$ . Каждая группа  $C_i(e_\alpha^k, \partial e_\alpha^k)$  имеет вид  $C_i(D^k, S^{k-1})$  для некоторой триангуляции диска  $D^k$ . Следовательно,  $H_i(X^k, X^{k-1})$  — прямая сумма групп  $H_i(D^k, S^{k-1})$ .  $\square$

Точная последовательность пары  $(X^{k+1}, X^k)$

$$H_{i+1}(X^{k+1}, X^k) \longrightarrow H_i(X^k) \longrightarrow H_i(X^{k+1}) \longrightarrow H_i(X^{k+1}, X^k)$$

показывает, что  $H_i(X^k) \cong H_i(X^{k+1})$  при  $i \neq k, k+1$ . Поэтому  $H_{k-1}(X^k) \cong H_{k-1}(X^{k+1}) \cong H_{k-1}(X^{k+2}) \cong \dots \cong H_{k-1}(X)$ .

Положим  $C_k = H_k(X^k, X^{k-1})$  и определим отображение  $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$  следующим образом. Запишем точные последовательности пар  $(X^k, X^{k-1})$  и  $(X^{k-1}, X^{k-2})$  горизонтально и вертикально:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_k(X^k) & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & H_{k-1}(X^{k-1}) \longrightarrow H_{k-1}(X^k) \longrightarrow 0. \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & C_{k-1} & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & H_{k-2}(X^{k-2}) & & \end{array}$$

Отображение  $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$  определяется как композиция горизонтальной и вертикальной стрелки. Группу  $H_k(X^k)$  можно рассматривать как подгруппу в  $C_k$ . При этом  $H_k(X^k)$  отождествляется с  $\text{Кег } \partial_k$ , поскольку если  $\varphi = h\varphi'$ , где  $h$  — мономорфизм, то  $\text{Кег } \varphi = \text{Кег } \varphi'$ . Отождествив аналогично  $H_{k-1}(X^{k-1})$  с  $\text{Кег } \partial_{k-1}$ , получим  $H_{k-1}(X^k) \cong \text{Кег } \partial_{k-1} / \text{Im } \partial_k$ .

Отображение  $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$  устроено следующим образом. Пусть образующей  $c_\alpha^k \in C_k$  соответствует клетка  $e_\alpha^k$ . Рассмотрим абсолютную цепь  $[e_\alpha^k]$ , представляющую относительный фундаментальный класс  $(e_\alpha^k, \partial e_\alpha^k)$ . На уровне гомологий  $H_{k-1}(X^{k-1})$  имеем равенство  $\partial[e_\alpha^k] = \sum n_{\alpha\beta}[e_\beta^{k-1}]$ . В таком случае  $\partial c_\alpha^k = \sum n_{\alpha\beta}c_\beta^{k-1}$ . Число  $n_{\alpha\beta}$  равно степени отображения  $S^{k-1} \rightarrow e_\beta^{k-1} / \partial e_\beta^{k-1} = S^{k-1}$ , индуцированного характеристическим отображением клетки  $e_\alpha^k$ .

Равенство  $\partial\partial = 0$  следует из того, что  $\partial\partial[e_\alpha^k] = 0$ .

Гомологии с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  вычисляются аналогично; в этом случае вместо степени берётся степень по модулю 2.

В качестве примера вычислим гомологии замкнутых двумерных поверхностей. Группы  $H_0$  и  $H_2$  мы уже вычислили, поэтому займёмся вычислением  $H_1$ .

**Пример 5.1.**  $H_1(nT^2) = \mathbb{Z}^{2n}$  и  $H_1(nT^2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{2n}$ .

**Доказательство.** Воспользуемся стандартным представлением  $nT^2$  с помощью  $4n$ -угольника. В таком случае комплекс для вычисления клеточных гомологий имеет вид

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^{2n} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Здесь  $\partial_1 = 0$ , поскольку нульмерная клетка ровно одна, и  $\partial_2 = 0$ , поскольку в границу двумерной клетки каждая одномерная клетка входит дважды, причём с противоположными ориентациями.

Для группы коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$  вычисления аналогичны. □

Для сферы с  $n$  ручками  $2n$  циклов, порождающих группу одномерных гомологий, можно выбрать так, как показано на рис. 3. Чтобы доказать это,

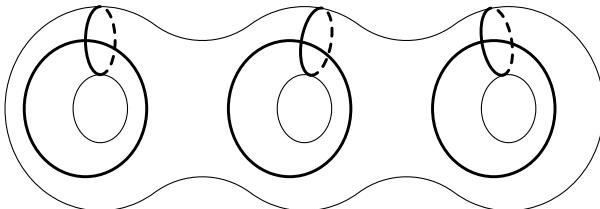


Рис. 3. Базисные циклы

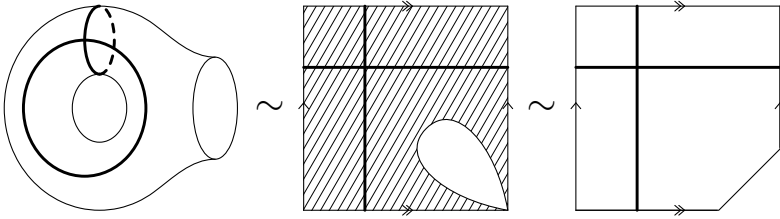


Рис. 4. Базисные циклы на одной ручке

нужно проверить, что указанные циклы гомологичны сторонам  $4n$ -угольника, из которого склеивается сфера с ручками. Рассмотрим сначала одну ручку, из которой вырезан диск (рис. 4). Теперь ясно, что циклам, изображённым на рис. 3, соответствуют циклы, изображённые на рис. 5; эти циклы гомологичны сторонам многоугольника.

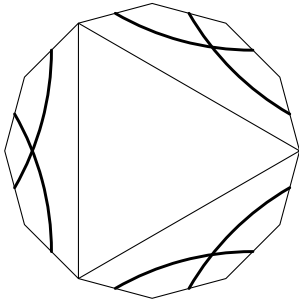


Рис. 5. Базисные циклы на многоугольнике

Пример 5.2.  $H_1(mP^2) = \mathbb{Z}^{m-1} \oplus \mathbb{Z}_2$  и  $H_1(mP^2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^m$ .

Доказательство. Комплекс для вычисления клеточных гомологий  $mP^2$  имеет вид

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Здесь снова  $\partial_1 = 0$ , но  $\partial_2(1) = (2, \dots, 2)$ , поскольку каждая одномерная клетка входит в границу двумерной клетки дважды, причём с одной и той же ориентацией. Группу  $\mathbb{Z}^m$  нужно профакторизовать по подгруппе, порождённой элементом  $(2, \dots, 2)$ . Пусть  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_{m-1} = (0, \dots, 0, 1, 0)$  и  $e_m = (1, \dots, 1)$ . Тогда

$$(a_1, \dots, a_m) = (a_1 - a_m)e_1 + \dots + (a_{m-1} - a_m)e_{m-1} + a_m e_m.$$

Условие  $(a_1, \dots, a_m) \in \text{Im } \partial_2$  эквивалентно тому, что  $a_1 - a_m = 0, \dots, a_{m-1} - a_m = 0$  и  $a_m \equiv 0 \pmod{2}$ . Поэтому факторгруппа  $\mathbb{Z}^m / \text{Im } \partial_2$  изоморфна  $\mathbb{Z}^{m-1} \oplus \mathbb{Z}_2$ ; образующими группы  $\mathbb{Z}^{m-1}$  служат  $e_1, \dots, e_{m-1}$ , а образующей группы  $\mathbb{Z}_2$  служит  $e_m$ .

Для группы коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$ , как и в предыдущем примере,  $\partial_2 = 0$ . □

Для бутылки Клейна циклы  $\alpha$  и  $\beta$ , порождающие группу гомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ , изображены на рис. 6. При этом на уровне гомологий  $2\beta = 0$ , поскольку граница листа Мёбиуса, заштрихованного на рис. 6 (а), гомологична  $2\beta$ .

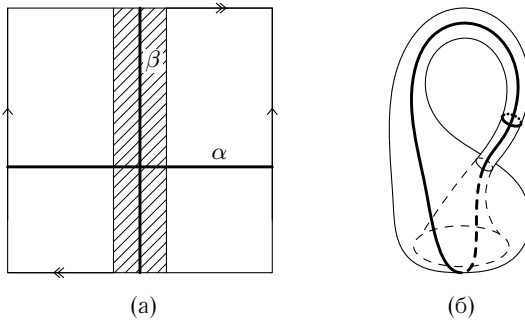


Рис. 6. Базисные циклы на бутылке Клейна

**Задача 5.3.** Вычислите группы гомологий замкнутых двумерных поверхностей с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_p$ ,  $p \neq 2$ .

**Задача 5.4.** Вычислите группы когомологий замкнутых двумерных поверхностей с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ .

**Задача 5.5.** Пусть  $H$  — тело с  $g$  ручками, т. е. трёхмерное тело, ограниченное стандартно вложенной в  $\mathbb{R}^3$  сферой с  $g$  ручками. Гладко вложим  $H$  в  $S^3$  и рассмотрим  $X = S^3 \setminus H$ . Докажите, что  $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^g$ ; опишите геометрически образующие этой группы.

**Пример 5.3.** *Справедливо равенство*

$$H_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } k = 0, 2, 4, \dots, 2n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

**Доказательство.** На  $\mathbb{C}P^n$  можно задать структуру  $CW$ -комплекса с клетками  $\mathbb{C}P^k \setminus \mathbb{C}P^{k-1}$  (см. часть I, с. 136). Триангуляцию многообразия  $\mathbb{C}P^n$ , для которой каждый остов  $X^{2k+1} = X^{2k} = \mathbb{C}P^k$  является симплициальным подкомплексом, можно построить тем же самым способом, как в части I строилась триангуляция многообразия с краем.

Цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий пространства  $\mathbb{C}P^n$  имеет вид

$$\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Группы гомологий такого цепного комплекса совпадают с группами цепей.  $\square$

**Пример 5.4.** а)  $H_{2k}(\mathbb{R}P^n) = 0$  при  $k > 0$  и  $H_{2k+1}(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$  при  $0 \leq k < \frac{n-1}{2}$ ;

б)  $H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  при  $0 \leq k \leq n$ .

**Доказательство.** Зададим на  $\mathbb{R}P^n$  структуру  $CW$ -комплекса с клетками  $\mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1}$  (см. часть I, с. 135). Тогда  $C_k = \mathbb{Z}$  при  $0 \leq k \leq n$ . Центральная симметрия сферы  $S^{k-1}$  сохраняет ориентацию при чётном  $k$  и изменяет ориентацию при нечётном  $k$ . Поэтому граничный гомоморфизм  $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$  переводит 1 в  $1 + 1 = 2$  при чётном  $k$  и в  $1 - 1 = 0$  при нечётном  $k$ . Цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий комплекса  $\mathbb{R}P^n$  при чётном  $n$  имеет вид

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

а при нечётном  $n$  он имеет вид

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Следовательно,

$$H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{для } k = 0 \text{ и } k = n, \text{ где } n \text{ нечётно;} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{для нечётных } k, \text{ где } 0 < k < n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для коэффициентов в  $\mathbb{Z}_2$  все граничные гомоморфизмы нулевые.  $\square$

**Задача 5.6.** Вычислите группы гомологий  $n$ -мерного тора  $T^n$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ .

**Задача 5.7.** Вычислите группы когомологий комплекса  $\mathbb{R}P^n$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ .

**Задача 5.8.** Приведите пример нестягиваемого ациклического двумерного  $CW$ -комплекса с одномерным остовом  $S^1 \vee S^1$ .

### 5.3. Индекс пересечения и изоморфизм Пуанкаре

Предположим, что замкнутое ориентированное многообразие  $M^n$  двумя разными способами разбито на клетки так, что между открытыми  $k$ -мерными клетками одного разбиения и открытыми  $(n - k)$ -мерными клетками другого разбиения имеется взаимно однозначное соответствие. Соответствующие открытые клетки будем обозначать  $\sigma_i$  и  $\sigma_i^*$ . Предположим, далее, что  $\sigma_i \cap \sigma_j^* = \emptyset$  при  $i \neq j$ , а клетки  $\sigma_i$  и  $\sigma_i^*$  трансверсально пересекаются в одной точке. Будем также предполагать, что клетки  $\sigma_i$  и  $\sigma_i^*$  ориентированы так, что если  $e_1, \dots, e_k$  и  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-k}$  — положительно ориентированные базисы\*) для  $\sigma_i$  и для  $\sigma_i^*$ , то  $e_1, \dots, e_k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-k}$  — положительно ориентированный базис для  $M^n$ . Наконец, предположим, что группа коэффициентов является аддитивной группой коммутативного ассоциативного

\*) Для симплекса  $[v_0, \dots, v_k]$  положительно ориентирован базис  $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ .

кольца  $R$  с единицей. В таком случае для цепей  $\sum a_i \sigma_i$  и  $\sum b_i \sigma_i^*$  можно определить их *индекс пересечения*

$$\langle\langle \sum a_i \sigma_i, \sum b_i \sigma_i^* \rangle\rangle = \sum \delta_{ij} a_i b_j = \sum a_i b_i.$$

Требуемую пару клеточных разбиений  $K$  и  $K^*$  можно построить, например, следующим образом. В качестве  $K$  возьмём произвольную триангуляцию многообразия  $M^n$ . Пусть  $K'$  — барицентрическое подразделение этой триангуляции. Для каждого симплекса  $\Delta^k$  триангуляции  $K$  рассмотрим множество всех симплексов из  $K'$ , пересекающих  $\Delta^k$  в точности по его барицентру. Их объединение представляет собой замкнутую  $(n - k)$ -мерную клетку  $(\Delta^k)^*$ . Такие клетки образуют разбиение  $K^*$ .

С помощью индекса пересечения можно построить билинейное отображение

$$\varphi: H_k(M^n; R) \times H_{n-k}(M^n; R) \rightarrow R.$$

А именно, рассмотрим клеточные разбиения  $K$  и  $K^*$ , реализуем классы гомологий  $\alpha \in H_k(M^n; R)$  и  $\beta \in H_{n-k}(M^n; R)$  циклами  $\sum a_i \sigma_i$  и  $\sum b_i \sigma_i^*$  и определим  $\varphi(\alpha, \beta)$  как индекс пересечения этих цепей (циклов). Теперь нужно проверить, что этот индекс пересечения не зависит от выбора циклов, представляющих гомологические классы  $\alpha$  и  $\beta$ .

*Л е м м а.* Пусть  $\Delta_i$  и  $\Delta_j$  — симплексы размерностей  $k$  и  $k - 1$ . Тогда

$$\langle\langle \partial \Delta_i, \Delta_j^* \rangle\rangle = (-1)^k \langle\langle \Delta_i, \partial(\Delta_j^*) \rangle\rangle.$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Прежде всего отметим, что выражения в обеих частях равенства отличны от нуля тогда и только тогда, когда  $\Delta_j$  — грань симплекса  $\Delta_i$ . При этом  $\langle\langle \partial \Delta_i, \Delta_j^* \rangle\rangle = \langle\langle \pm \Delta_j, \Delta_j^* \rangle\rangle = \pm 1$  и  $\langle\langle \Delta_i, \partial(\Delta_j^*) \rangle\rangle = \langle\langle \Delta_i, \pm \Delta_i^* \rangle\rangle = \pm 1$ . Остётся выяснить, с каким знаком входят  $\Delta_j$  в  $\partial \Delta_i$  и  $\Delta_i^*$  в  $\partial(\Delta_j^*)$ .

Пусть  $v_0$  — барицентр симплекса  $\Delta_i$ ,  $v'_0$  — барицентр симплекса  $\Delta_j$ . Тогда  $\Delta_i$  и  $\partial(\Delta_j^*)$  пересекаются в точке  $v_0$ , а  $\partial \Delta_i$  и  $\Delta_j^*$  пересекаются в точке  $v'_0$ . Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — вершины симплекса  $\Delta_j$ . Можно считать, что ориентации симплексов  $[v_0, v_1, \dots, v_k]$  и  $\Delta_i$  согласованы и, кроме того,  $\partial \Delta_i = \Delta_j + \dots$ , т.е.  $\Delta_j = [v_1, \dots, v_k]$ . Пусть  $[v'_0, v_0, v_{k+1}, \dots, v_n]$  — один из симплексов, из которых состоит клетка  $\Delta_j^*$ , причём его ориентация согласована с ориентацией этой клетки. Тогда  $\partial(\Delta_j^*) = [v_0, v_{k+1}, \dots, v_n] + \dots$ , где многоточием обозначены клетки, не пересекающиеся с  $\Delta_i$ .

Если после положительно ориентированного базиса симплекса  $\Delta_i$  взять положительно ориентированный базис клетки  $\partial(\Delta_j^*)$ , то получим положительно ориентированный базис симплекса  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ . Если после положительно ориентированного базиса симплекса  $\Delta_j = [v_1, \dots, v_k]$  взять

положительно ориентированный базис симплекса  $[v'_0, v_0, v_{k+1}, \dots, v_n]$ , то в результате получим следующее. Прежде всего заметим, что симплекс  $[v'_0, v_2, \dots, v_k]$  содержится в симплексе  $[v_1, \dots, v_k]$  и ориентирован согласованно. Таким образом, в результате мы получаем положительно ориентированный базис симплекса

$$[v'_0, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n] = (-1)^k [v_0, v'_0, v_2, \dots, v_n].$$

Остаётся заметить, что симплекс  $[v_0, v'_0, v_2, \dots, v_n]$  содержится в симплексе  $[v_0, v_1, v_2, \dots, v_n]$  и ориентирован согласованно.  $\square$

Из леммы следует корректность определения  $\varphi(\alpha, \beta)$ , так как если  $c_1 = \partial c'$  и  $\partial c_2 = 0$ , то  $\langle\langle c_1, c_2 \rangle\rangle = \langle\langle \partial c', c_2 \rangle\rangle = \pm \langle\langle c', \partial c_2 \rangle\rangle = 0$ .

Используя клеточные разбиения  $K$  и  $K^*$ , цепи  $\sum a_i \sigma_i$  можно сопоставить цепь  $\sum a_i \sigma_i^*$ . Но с точки зрения гомологий такое сопоставление не интересно, потому что цепи  $(\partial\sigma)^*$  и  $\partial(\sigma^*)$  лежат в разных пространствах (если  $\dim \sigma = k$ , то  $\dim(\partial\sigma)^* = n - k + 1$ , а  $\dim \partial(\sigma^*) = n - k - 1$ ). Более естественно цепи  $c_k = \sum a_i \sigma_i$  сопоставить коцепь  $c^{n-k}$ , для которой  $\langle c^{n-k}, \sigma_i^* \rangle = a_i$ , т. е.

$$\left\langle c^{n-k}, \sum b_i \sigma_i^* \right\rangle = \sum a_i b_i = \left\langle c_k, \sum b_i \sigma_i^* \right\rangle.$$

(Иными словами, значение коцепи  $c^{n-k}$  на данной цепи равно её индексу пересечения с  $c_k$ ; такая коцепь существует и единственна.) Тогда

$$\langle \delta c^{n-k}, d_{n-k+1} \rangle = \langle c^{n-k}, \partial d_{n-k+1} \rangle = \langle c_k, \partial d_{n-k+1} \rangle = (-1)^k \langle \partial c_k, d_{n-k+1} \rangle,$$

т. е. цепи  $\partial c_k$  сопоставляется коцепь  $\pm \delta c^{n-k}$ . Это, в частности, означает, что циклу сопоставляется коцикл, а границе — кограница. Следовательно, изоморфизм пространства  $k$ -мерных цепей в  $K$  на пространство  $(n - k)$ -мерных коцепей в  $K^*$  индуцирует изоморфизм группы  $H_k(M^n; R)$  на группу  $H^{n-k}(M^n; R)$ .

Для группы коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$  об ориентациях заботиться не нужно, поэтому для замкнутого, но не обязательно ориентируемого многообразия можно определить индекс пересечения по модулю 2 и получить изоморфизм  $H_k(M^n; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z}_2)$ .

Мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 5.3** (изоморфизм Пуанкаре). а) Пусть  $M^n$  — замкнутое ориентируемое многообразие,  $R$  — аддитивная группа коммутативного ассоциативного кольца с единицей. Тогда  $H_k(M^n; R) \cong H^{n-k}(M^n; R)$ .

б) Пусть  $M^n$  — замкнутое многообразие. Тогда  $H_k(M^n; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z}_2)$ .

С л е д с т в и е. а) Пусть  $M^n$  — замкнутое ориентируемое многообразие,  $F$  — аддитивная группа некоторого поля. Тогда  $H_k(M^n; F) \cong \cong H_{n-k}(M^n; F)$ .

б) Пусть  $M^n$  — замкнутое многообразие. Тогда  $H_k(M^n; \mathbb{Z}_2) \cong \cong H_{n-k}(M^n; \mathbb{Z}_2)$ .

Подгруппу, образованную элементами конечного порядка в  $H_k(M^n) = H_k(M^n; \mathbb{Z})$  или в  $H^k(M^n; \mathbb{Z})$ , называют *кручением*.

З а д а ч а 5.9 (двойственность Пуанкаре). Пусть  $M^n$  — замкнутое ориентируемое многообразие,  $H_k(M^n) \cong \mathbb{Z}^{a_k} \oplus T_k$  и  $H^k(M^n) \cong \mathbb{Z}^{b_k} \oplus T^k$ , где  $T_k$  и  $T^k$  — кручения. Докажите, что  $a_k = a_{n-k}$ ,  $b_k = b_{n-k}$ ,  $T_k \cong T_{n-k-1}$ ,  $T^k \cong T^{n-k+1}$  и  $T^1 = 0$ .

Используя изоморфизм Пуанкаре и формулы универсальных коэффициентов, можно доказать следующие свойства групп гомологий и когомологий многообразий.

Т е о р е м а 5.4. а) Если  $M^n$  — замкнутое (связное) многообразие, а  $R$  — аддитивная группа коммутативного ассоциативного кольца с единицей, то

$$H^n(M^n; R) \cong \begin{cases} R & \text{для ориентируемого многообразия } M^n; \\ R/2R & \text{для неориентируемого многообразия } M^n. \end{cases}$$

б) Если  $M^n$  — замкнутое ориентируемое многообразие, то группа  $H_{n-1}(M^n; \mathbb{Z})$  не имеет кручения, а если  $M^n$  — замкнутое неориентируемое (связное) многообразие, то подгруппа кручения в  $H_{n-1}(M^n; \mathbb{Z})$  изоморфна  $\mathbb{Z}_2$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Группа  $Z^n(M^n; R)$  порождена коцепями, двойственными одинаково ориентированным  $n$ -мерным симплексам в  $M^n$ . При этом две коцепи, двойственные одинаково ориентированным  $n$ -мерным симплексам с общей  $(n-1)$ -мерной гранью, отличаются на кограницу. Поэтому для ориентируемого многообразия  $H^n(M^n; R) \cong R$ , а для неориентируемого многообразия  $H^n(M^n; R) \cong R/2R$ , поскольку в неориентируемом случае для коцепи  $c^n$ , двойственной симплексу, возникает соотношение  $2c^n = 0$ .

Для ориентируемого многообразия согласно изоморфизму Пуанкаре  $T_{n-1} \cong T^1 = 0$ , а для неориентируемого многообразия согласно задаче 4.13  $T_{n-1} \cong T^n = \mathbb{Z}_2$ .  $\square$

У п р а ж н е н и е. Пусть  $M^4$  — замкнутое ориентируемое многообразие. Докажите, что если группа  $H_1(M^4)$  не имеет кручения, то все остальные группы  $H_k(M^4)$  тоже не имеют кручения.

З а д а ч а 5.10. Пусть  $M^n$  — замкнутое ориентируемое многообразие, причём его надстройка  $\Sigma M^n$  гомеоморфна некоторому замкнутому ориен-



тируемому многообразию. Докажите, что  $M^n$  — гомологическая сфера, т. е.  $H_k(M^n) \cong H_k(S^n)$  для всех  $k$ .

**З а м е ч а н и е.** Гомологическая сфера не обязательно гомеоморфна сфере. Наиболее известная гомологическая сфера, не гомеоморфная сфере, — трёхмерная сфера Пуанкаре; её различные описания можно найти, например, в [ПЗ]. Имеется бесконечно много попарно не гомеоморфных трёхмерных гомологических сфер. Интересно, что двукратная надстройка над любой трёхмерной гомологической сферой гомеоморфна сфере  $S^5$  (Эдвардс).

Билинейное отображение  $\varphi: H_k(M^n) \times H_{n-k}(M^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ , построенное с помощью индекса пересечения, обладает следующим свойством невырожденности.

**Т е о р е м а 5.5.** Пусть  $M^n$  — замкнутое ориентированное многообразие. Тогда любой гомоморфизм  $h: H_k(M^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  можно представить в виде  $h(\alpha) = \varphi(\alpha, \beta_h)$ , где  $\beta_h \in H_{n-k}(M^n)$ . Элемент  $\beta_h$  определяется гомоморфизмом  $h$  однозначно с точностью до элемента конечного порядка.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Точная последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{k-1}(M^n), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(M^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(H_k(M^n), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

показывает, что гомоморфизму  $h$  соответствует элемент группы  $H^k(M^n; \mathbb{Z})$ , определённый с точностью до элемента группы  $\text{Ext}(H_{k-1}(M^n), \mathbb{Z})$ ; последняя группа конечна. Ясно также, что равенство  $h(\alpha) = \varphi(\alpha, \beta)$  выполняется для всех  $\alpha$  тогда и только тогда, когда коцепь, соответствующая представителю класса гомологий  $\beta$ , лежит в классе когомологий, который отображается в  $h$ .

Отметим, что если  $t\beta = 0$ , то  $t\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, t\beta) = 0$ , поэтому  $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ .  $\square$

Если  $M^n$  — замкнутое ориентируемое многообразие и группа коэффициентов  $F$  является аддитивной группой некоторого поля (или если  $F = \mathbb{Z}_2$  в случае, когда многообразие  $M^n$  неориентируемо), то билинейное отображение  $\varphi: H_k(M^n; F) \times H_{n-k}(M^n; F) \rightarrow F$  невырожденно в обычном смысле.

**Т е о р е м а 5.6.** Любое линейное отображение  $h: H_k(M^n; F) \rightarrow F$  можно представить в виде  $h(\alpha) = \varphi(\alpha, \beta_h)$ , где элемент  $\beta_h \in H_{n-k}(M^n; F)$  определён однозначно.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Линейное отображение  $h$  является элементом двойственного к  $H_k(M^n; F)$  пространства, т. е. элементом пространства  $H^k(M^n; F)$ , которое изоморфно  $H_{n-k}(M^n; F)$ . При этом изоморфизме  $h$  переходит в  $\beta_h$ .  $\square$

С л е д с т в и е. В пространствах  $H_k(M^n; F)$  и  $H_{n-k}(M^n; F)$  можно выбрать базисы  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  и  $\beta_1, \dots, \beta_m$  так, что  $\langle\langle \alpha_i, \beta_j \rangle\rangle = \delta_{ij}$ .

Доказательство. Базис  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  выбираем произвольно, а в качестве  $\beta_j$  берём элемент, соответствующий линейному отображению  $h_j(\sum x_i \alpha_i) = x_j$ . Тогда  $\langle\langle \alpha_i, \beta_j \rangle\rangle = \varphi(\alpha_i, \beta_j) = h_j(\alpha_i) = \delta_{ij}$ .  $\square$

Аналогично можно доказать, что если  $M^n$  — замкнутое ориентируемое многообразие, то в свободных группах  $H_k(M^n)/T_k$  и  $H_{n-k}(M^n)/T_{n-k}$ , где  $T_k$  и  $T_{n-k}$  — подгруппы кручения, можно выбрать базисы  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  и  $\beta_1, \dots, \beta_m$  так, что  $\langle\langle \alpha_i, \beta_j \rangle\rangle = \delta_{ij}$ .

### Коэффициент зацепления

Пусть  $c_1$  и  $c_2$  — замкнутые ориентированные кривые в  $S^3$ . Им можно сопоставить одномерные циклы (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ ), которые мы тоже будем обозначать  $c_1$  и  $c_2$ . Пусть  $d_1$  — двумерная цепь, для которой  $\partial d_1 = c_1$ . Индекс пересечения  $\langle\langle d_1, c_2 \rangle\rangle$  называют *коэффициентом зацепления* кривых  $c_1$  и  $c_2$  и обозначают  $\text{lk}(c_1, c_2)$ . Легко проверить, что индекс пересечения  $\langle\langle d_1, c_2 \rangle\rangle$  не зависит от выбора цепи  $d_1$ . Действительно, если  $d'_1$  — другая цепь, для которой  $\partial d'_1 = \partial d_1$ , то  $d'_1 - d_1$  — цикл, а значит, граница (поскольку двумерные гомологии сферы  $S^3$  нулевые). Пусть  $e$  — трёхмерная цепь, для которой  $d'_1 - d_1 = \partial e$ . Тогда  $\langle\langle d'_1 - d_1, c_2 \rangle\rangle = \langle\langle \partial e, c_2 \rangle\rangle = \langle\langle e, \partial c_2 \rangle\rangle = 0$ .

Нетрудно убедиться, что такое определение коэффициента зацепления эквивалентно другому определению, приведённому, например, в [ПЗ]. Напомним, что там коэффициент зацепления замкнутых ориентированных кривых  $J$  и  $K$  определяется так. Рассмотрим диаграмму ориентированного зацепления, образованного этими кривыми. Будем учитывать только те перекрёстки, на которых кривая  $J$  проходит под  $K$ . Такие перекрёстки бывают двух типов (рис. 7). Для каждого рассматриваемого перекрёстка возьмём соответствующее значение  $\varepsilon_i = \pm 1$  и сложим все числа  $\varepsilon_i$ . Полученное в результате число называют коэффициентом зацепления замкнутых ориентированных кривых  $J$  и  $K$ .

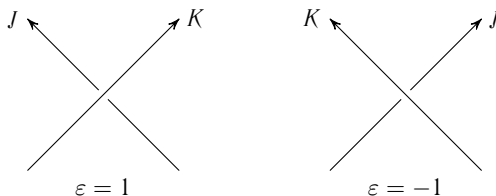


Рис. 7. Два типа перекрёстков

Чтобы убедиться в эквивалентности этих двух определений, расположим кривые  $c_1$  и  $c_2$  так, чтобы они выходили из плоскости диаграммы лишь

в малых окрестностях перекрёстков. Поверхность  $d_1$  можно выбрать так, чтобы она была расположена над плоскостью диаграммы за исключением малых окрестностей перекрёстков (рис. 8). Нас интересуют только перекрёстки, на которых кривая  $c_2$  проходит над  $c_1$ . Им как раз соответствуют точки пересечения кривой  $c_2$  с поверхностью  $d_1$ . Со знаками тоже всё в порядке. Например, на рис. 8 базис  $e_1, e_2, \varepsilon_1$  положительно ориентирован (мы пользуемся теми же обозначениями, что и при определении индекса пересечения); это как раз соответствует

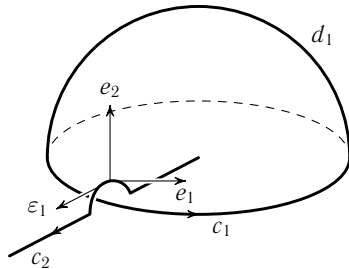


Рис. 8. Поверхность  $d_1$

положительному типу перекрёстка.

Коэффициент зацепления кривых  $J$  и  $K$  можно определить и многими другими способами. Построим, например, отображение  $f: J \times K \rightarrow S^2$  следующим образом:

$$f(x, y) = \frac{K(y) - J(x)}{\|K(y) - J(x)\|}$$

( $J$  и  $K$  мы одновременно рассматриваем и как окружности, и как отображения  $J, K: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ).

**Задача 5.11.** Докажите, что  $\deg f = \pm \text{lk}(J, K)$ . Укажите, как нужно выбрать ориентации тора  $J \times K$  и сферы  $S^2$ , чтобы выполнялось равенство  $\deg f = \text{lk}(J, K)$ .

### Когомологии с компактными носителями и гомологии с замкнутыми носителями

Для некомпактных многообразий теорема об изоморфизме Пуанкаре в том виде, как она была сформулирована, неверна. Это видно уже на примере многообразия  $\mathbb{R}^n$ . Тем не менее, для некомпактного многообразия тоже можно построить двойственные разбиения, и после этого можно попытаться сопоставить цепи  $c_k$  коцепь  $c^{n-k}$ , а коцепи  $c^{n-k}$  цепь  $c_k$ . Здесь нас, естественно, ожидает неудача, но можно проследить за тем, что происходит, и попытаться это исправить.

Напомним, что по определению любая цепь  $c_k$  является суммой конечного числа симплексов, поэтому, когда мы сопоставляем цепи  $c_k$  коцепь  $c^{n-k}$ , в случае некомпактного многообразия у нас получаются не все коцепи, а лишь коцепи, каждая из которых обращается в нуль на симплексах,

лежащих вне некоторого компактного множества. Такие коцепи называют *коцепями с компактными носителями*. Ясно, что применение оператора  $\delta$  к коцепи с компактным носителем даёт коцепь с компактным носителем. Поэтому с помощью коцепей с компактными носителями можно построить группы *когомологий с компактными носителями*  $H_c^k(K)$ . Если  $K$  и  $K^*$  — двойственные разбиения ориентируемого многообразия, то мы получаем изоморфизм  $H_k(K; R) \cong H_c^{n-k}(K^*; R)$ ; изоморфизм имеет место уже на уровне (ко)цепей.

Попытаемся теперь сопоставить коцепи  $c^{n-k}$  цепь  $c_k$ . Когда мы сопоставляли цепи коцепь, у нас получилось нечто меньшее, чем множество всех коцепей. Теперь, наоборот, получится нечто большее, чем множество всех цепей. А именно, получатся не конечные суммы симплексов  $\sum a_i \Delta_i^k$ , а произвольные суммы  $k$ -мерных симплексов, в которые каждый симплекс входит с определённым коэффициентом, но самих симплексов может быть бесконечно много. Такие «цепи» называют *цепями с замкнутыми носителями*, потому что объединение всех симплексов, входящих в цепь с ненулевым коэффициентом, представляет собой замкнутое множество (возможно, некомпактное).

Отметим, что при определении цепей с замкнутыми носителями для произвольных симплициальных комплексов нужно дополнительно потребовать, чтобы каждая точка принадлежала лишь конечному числу симплексов, входящих в сумму  $\sum a_i \Delta_i^k$ . Иначе может оказаться, что некий симплекс является гранью бесконечного числа симплексов, входящих в сумму  $\sum a_i \Delta_i^k$ , и поэтому цепь  $\partial(\sum a_i \Delta_i^k)$  нельзя определить. Но для триангулированных многообразий каждый симплекс является гранью лишь конечного числа симплексов, поэтому оба условия эквивалентны.

С помощью цепей с замкнутыми носителями можно построить группы *гомологий с замкнутыми носителями*  $H_k^{\text{cl}}(K)$ . Если  $K$  и  $K^*$  — двойственные разбиения ориентируемого многообразия, то мы получаем изоморфизм  $H_k^{\text{cl}}(K; R) \cong H_c^{n-k}(K^*; R)$ ; изоморфизм имеет место уже на уровне (ко)цепей.

**З а м е ч а н и е.** Обратите внимание, что группы  $H_c^*(K)$  и  $H_*^{\text{cl}}(K)$ , в отличие от обычных групп когомологий и гомологий, не являются гомотопическими инвариантами пространства  $K$ . Например,  $H_c^n(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  и  $H_n^{\text{cl}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ .

#### 5.4. Реализация гомологических классов поверхностей

Для любой гладкой кривой  $f: S^1 \rightarrow M^2$  можно рассмотреть гомоморфизм  $f_*: H_1(S^1) \rightarrow H_1(M^2)$ . Будем говорить, что кривая  $f$  *реализует* гомологический класс  $f_*[S^1] \in H_1(M^2)$ . Достаточно очевидно, что если

допустить самопересекающиеся кривые, то можно реализовать любой гомологический класс замкнутого двумерного многообразия  $M^2$ . Поэтому займёмся вопросом о реализации гомологических классов несамопересекающимися кривыми. Мы ограничимся рассмотрением только ориентируемых многообразий.

Будем называть гомологический класс  $\alpha$  над  $\mathbb{Z}$  *примитивным*, если  $\alpha \neq t\beta$ , где  $t \in \mathbb{N}$ ,  $t > 1$ , и  $\beta$  — некоторый гомологический класс над  $\mathbb{Z}$ . Отметим, что если  $t\alpha = 0$ , то  $\alpha = (t + 1)\alpha$ , поэтому элемент конечного порядка не может быть примитивным.

**Теорема 5.7.** *Предположим, что замкнутая несамопересекающаяся кривая  $f$  реализует гомологический класс  $\alpha \in H_1(M^2)$ , где  $M^2$  — замкнутое ориентируемое многообразие. Тогда либо  $\alpha = 0$ , либо  $\alpha$  — примитивный гомологический класс.*

**Доказательство** (Самельсон). Если кривая  $f$  разбивает  $M^2$ , то  $\alpha = 0$ . Действительно, возьмём одну из частей, на которые кривая  $f$  разбивает  $M^2$ , и представим её в виде двумерной цепи. Граница этой цепи является представителем гомологического класса  $\pm\alpha$ .

Если кривая  $f$  не разбивает  $M^2$ , то существует замкнутая несамопересекающаяся кривая  $g$ , трансверсально пересекающая  $f$  ровно в одной точке. Чтобы построить такую кривую, нужно взять маленький отрезок, трансверсально пересекающий  $f$ , и соединить его концы кривой в  $M^2 \setminus f$  (рис. 9). Пусть  $\gamma$  — гомологический класс, реализованный кривой  $g$ . Тогда  $\langle\langle \alpha, \gamma \rangle\rangle = \pm 1$ . С другой стороны, если  $\alpha = t\beta$ , то  $\langle\langle \alpha, \gamma \rangle\rangle = t\langle\langle \beta, \gamma \rangle\rangle$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Ориентируемостью многообразия мы пользовались для того, чтобы определить целое число  $\langle\langle \alpha, \gamma \rangle\rangle$ . Образующая группы  $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$  не примитивна, но она реализуется замкнутой несамопересекающейся кривой.

**Теорема 5.8 [Me].** *Любой примитивный гомологический класс замкнутого ориентируемого многообразия  $M^2$  реализуется замкнутой несамопересекающейся кривой.*

**Доказательство.** Чтобы упростить обозначения, будем обозначать кривую и представленный ею гомологический класс одинаково. На сфере с  $g$  ручками выберем кривые  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  и  $\gamma_1, \dots, \gamma_{g-1}$  так, как показано на рис. 10 (для  $g = 4$ ). Гомологические классы  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  являются образующими одномерной группы гомологий. Гомологический класс  $a_1\alpha_1 + \dots + a_g\alpha_g + b_g\beta_1 + \dots + b_g\beta_g$  будем обо-

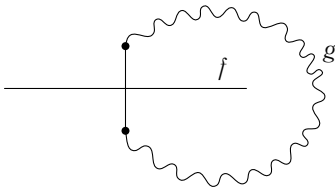


Рис. 9. Построение кривой  $g$

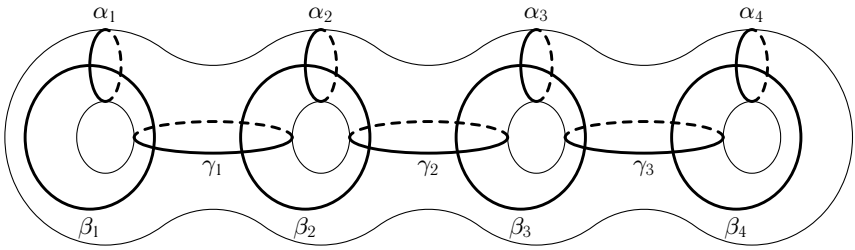


Рис. 10. Кривые на сфере с ручками

значать  $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$ . Этот класс примитивен тогда и только тогда, когда  $\text{НОД}(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g) = 1$ .

Для каждой замкнутой несамопересекающейся кривой  $\gamma$  на двумерной ориентируемой поверхности  $M^2$  можно определить гомеоморфизм  $M^2 \rightarrow M^2$ , называемый *скручиванием Дена* вдоль кривой  $\gamma$ . А именно, рассмотрим малую окрестность кривой  $\gamma$  и выберем одну из двух частей, на которые её разбивает  $\gamma$  (на рис. 11 слева выбранная часть заштрихована).

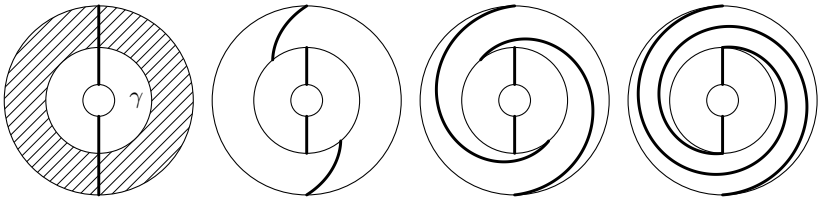


Рис. 11. Скручивание Дена

Сделаем разрез вдоль кривой  $\gamma$  и будем деформировать выбранную часть её окрестности так, чтобы точки внешней границы оставались неподвижными, а точки кривой  $\gamma$  скользили по  $\gamma$ . После поворота на  $360^\circ$  точки разреза возвращаются на исходные места и в результате получается гомеоморфизм. Подробно скручивания Дена обсуждаются в [ПЗ] и в [П1].

Если кривая  $\alpha$  трансверсально пересекает кривую  $\gamma$  в одной точке, то скручивание Дена вдоль кривой  $\gamma$  переводит гомологический класс  $\alpha$  в  $\alpha \pm \gamma$  (знак определяется выбором направления вращения при скручивании Дена). Легко также проверить, что гомологический класс  $\gamma_k$  равен  $\pm(\alpha_k - \alpha_{k+1})$  (см. рис. 12). Поэтому скручивания Дена следующим обра-

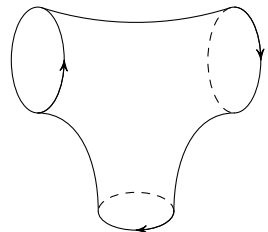


Рис. 12. Гомологичность циклов

зом действуют на гомологические классы:

$$\begin{aligned} \alpha_k \xrightarrow{\beta_k} \alpha_k \pm \beta_k, \quad \beta_k \xrightarrow{\alpha_k} \beta_k \pm \alpha_k; \\ \beta_k \xrightarrow{\gamma_k} \beta_k \pm (\alpha_k - \alpha_{k+1}), \quad \beta_{k+1} \xrightarrow{\gamma_k} \beta_{k+1} \pm (\alpha_k - \alpha_{k+1}). \end{aligned}$$

Пусть  $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$  — некоторый элемент группы  $H_1(M^2)$ . Используя алгоритм Евклида, с помощью скручиваний вдоль  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  этот элемент можно перевести в  $(d_1, 0, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g)$ , где  $d_1 = \pm \text{НОД}(a_1, b_1)$ . Аналогично полученный элемент можно перевести в  $(d_1, 0, d_2, 0, \dots, d_g, 0)$ , где  $d_k = \pm \text{НОД}(a_k, b_k)$ .

Операции  $(0, d_k) \xrightarrow{\beta_k} (d_k, d_k) \xrightarrow{\alpha_k} (d_k, 0)$  и  $(d_k, 0, 0, d_{k+1}) \xrightarrow{\gamma_k} (d_k, \pm d_k, 0, d_{k+1} \pm d_k)$  позволяют применить алгоритм Евклида к числам  $d_k$  и  $d_{k+1}$ . Поэтому можно последовательно получить элементы

$$(0, 0, \pm \text{НОД}(d_1, d_2), 0, d_3, \dots), \dots, (0, 0, \dots, 0, \pm \text{НОД}(d_1, \dots, d_g), 0).$$

Если исходный элемент  $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$  примитивен, то  $\text{НОД}(d_1, \dots, d_g) = \pm 1$ , поэтому полученный элемент представлен кривой  $\pm \alpha_g$ . Это означает, что существует гомеоморфизм  $h: M^2 \rightarrow M^2$ , для которого отображение  $h_*: H_1(M^2) \rightarrow H_1(M^2)$  переводит элемент  $(a_1, \dots, b_g)$  в элемент, представленный несамопересекающейся кривой. Образ этой кривой при гомеоморфизме  $h^{-1}$  представляет элемент  $(a_1, \dots, b_g)$ .  $\square$

## § 6. Эйлерова характеристика и теорема Лефшеца

### 6.1. Эйлерова характеристика

Пусть  $K$  — конечный симплициальный комплекс размерности  $n$ . Его *эйлеровой характеристикой* называют число

$$\chi(K) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n,$$

где  $a_i$  — количество  $i$ -мерных симплексов в  $K$ .

**Теорема 6.1.** Пусть  $b_k = \dim H_k(K; F)$ , где  $F$  — аддитивная группа некоторого поля. Тогда

$$\chi(K) = b_0 - b_1 + b_2 - \dots + (-1)^n b_n.$$

**Доказательство.** Из точности последовательности

$$0 \longrightarrow Z_k(K; F) \xrightarrow{i} C_k(K; F) \xrightarrow{\partial} B_{k-1}(K; F) \longrightarrow 0$$

следует, что  $\dim Z_k + \dim B_{k-1} = \dim C_k = a_k$ . Поэтому

$$\begin{aligned}\chi(K) &= \sum (-1)^k \dim Z_k + \sum (-1)^k \dim B_{k-1} = \\ &= \sum (-1)^k (\dim Z_k - \dim B_k) = \\ &= \sum (-1)^k \dim H_k(K; F),\end{aligned}$$

поскольку  $H_k(K; F) = Z_k/B_k$ . □

*С л е д с т в и е.* Эйлеровы характеристики гомотопически эквивалентных симплициальных комплексов одинаковы.

Пример 6.1.  $\chi(D^n) = 1$ .

Пример 6.2.  $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{при нечётном } n; \\ 2 & \text{при чётном } n. \end{cases}$

Пример 6.3.  $\chi(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0 & \text{при нечётном } n; \\ 1 & \text{при чётном } n. \end{cases}$

Пример 6.4.  $\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1$ .

У п р а ж н е н и е. а) Пусть конечный симплициальный комплекс  $K$  покрыт двумя подкомплексами  $K_1$  и  $K_2$ . Докажите, что

$$\chi(K) = \chi(K_1) + \chi(K_2) - \chi(K_1 \cap K_2),$$

двумя способами: непосредственным подсчётом количеств симплексов в этих комплексах и с помощью последовательности Майера—Вьеториса.

б) Пусть конечный симплициальный комплекс  $K$  покрыт подкомплексами  $K_1, K_2, \dots, K_m$ . Докажите, что

$$\chi(K) = \sum \chi(K_i) - \sum_{i < j} \chi(K_i \cap K_j) + \sum_{i < j < k} \chi(K_i \cap K_j \cap K_k) - \dots$$

З а д а ч а 6.1. Пусть  $K$  и  $L$  — конечные симплициальные комплексы,  $p: K \rightarrow L$  —  $n$ -листное накрытие. Докажите, что  $\chi(K) = n\chi(L)$ .

З а д а ч а 6.2. Пусть  $K$  и  $L$  — конечные симплициальные комплексы. Докажите, что  $\chi(K \times L) = \chi(K)\chi(L)$ .

З а д а ч а 6.3. Пусть  $K$  — конечный симплициальный комплекс,  $f: K \rightarrow K$  — непрерывное отображение, для которого отображение  $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$  тождественно. Докажите, что если  $\chi(K) \not\equiv 0 \pmod{n}$ , то отображение  $f$  имеет неподвижную точку.

Для замкнутого многообразия  $M^n$  эйлерова характеристика определялась в части I как сумма индексов особых точек любого гладкого векторного поля (с изолированными особыми точками). С другой стороны,  $M^n$  можно триангулировать и вычислить эйлерову характеристику полученно-



го симплициального комплекса. Эквивалентность этих двух определений вытекает из следующего утверждения.

**Теорема 6.2.** *Предположим, что замкнутое многообразие  $M^n$  триангулировано. Тогда на  $M^n$  существует гладкое векторное поле, особыми точками которого служат барицентры симплексов триангуляции, причём барицентр  $k$ -мерного симплекса имеет индекс  $(-1)^k$ .*

**Доказательство.** Построим на триангулированном многообразии  $M^n$  векторное поле индукцией по размерности остова. При этом дополнительные интегральные траектории при переходе от  $(k-1)$ -мерного остова к  $k$ -мерному для барицентров симплексов размерности  $k$  («новые» особые точки) будут входящими, а для барицентров симплексов размерности меньше  $k$  («старые» особые точки) будут выходящими. Построение этого векторного поля для симплексов размерностей 1, 2 и 3 изображено на рис. 13.

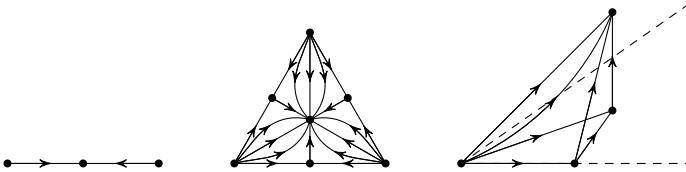


Рис. 13. Построение векторного поля

В окрестности барицентра симплекса размерности  $k$  построенное векторное поле имеет вид  $v(x) = Ax$ , где

$$A = \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_k, 1, \dots, 1).$$

Индекс такой особой точки равен  $(-1)^k$ . □

**Теорема 6.3.** *Если  $M^{2n+1}$  — замкнутое многообразие, то  $\chi(M^{2n+1}) = 0$ .*

**Доказательство.** Одно доказательство этой теоремы уже было приведено в части I. Другое доказательство можно получить с помощью изоморфизма  $H_k(M^{2n+1}; \mathbb{Z}_2) \cong H_{2n+1-k}(M^{2n+1}; \mathbb{Z}_2)$ . Действительно, пусть  $b_k = \dim H_k(M^{2n+1}; \mathbb{Z}_2)$ . Тогда  $b_k = b_{2n+1-k}$ , поэтому

$$\begin{aligned} \chi(M^{2n+1}) &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k b_k = \sum_{k=0}^n ((-1)^k b_k + (-1)^{2n+1-k} b_{2n+1-k}) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (b_k - b_{2n+1-k}) = 0. \end{aligned} \quad \square$$

**Теорема 6.4.** Пусть  $M^{2n}$  — замкнутое многообразие. Тогда  $\chi(M^{2n}) \equiv \dim H_n(M^{2n}; \mathbb{Z}_2) \pmod{2}$ .

**Доказательство.** Пусть  $b_k = \dim H_k(M^{2n}; \mathbb{Z}_2)$ . Тогда  $b_k = b_{2n-k}$ , поэтому

$$\begin{aligned} \chi(M^{2n}) &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k b_k = b_n + \sum_{k=0}^{n-1} ((-1)^k b_k + (-1)^{2n-k} b_{2n-k}) = \\ &= b_n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (b_k + b_{2n-k}) \equiv b_n \pmod{2}. \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 6.5.** Если замкнутое многообразие  $M^m$  является краем компактного многообразия  $W^{m+1}$ , то  $\chi(M^m)$  — чётное число.

**Доказательство.** Нужно рассмотреть лишь случай  $m = 2n$ , потому что иначе  $\chi(M^m) = 0$ . Триангулируем многообразие  $W^{2n+1}$  и рассмотрим замкнутое многообразие  $\tilde{W}^{2n+1}$ , которое получается из двух экземпляров  $W^{2n+1}$  склейкой их краёв  $M^{2n}$ . Одновременно  $\tilde{W}^{2n+1}$  является симплициальным комплексом с подкомплексом  $M^{2n}$ . При этом все симплексы, не лежащие в  $M^{2n}$ , разбиты на пары. Следовательно,  $\chi(\tilde{W}^{2n+1}) \equiv \chi(M^{2n}) \pmod{2}$ . Но  $\chi(\tilde{W}^{2n+1}) = 0$ .  $\square$

**Следствие.** Многообразия  $\mathbb{R}P^{2n}$  и  $\mathbb{C}P^{2n}$  не являются краями компактных многообразий.

Покажем, что многообразия  $\mathbb{R}P^{2n+1}$  и  $\mathbb{C}P^{2n+1}$  являются краями компактных многообразий. Для этого можно, например, воспользоваться следующим утверждением.

**Теорема 6.6.** Пусть  $M^n$  — замкнутое многообразие и  $\sigma: M^n \rightarrow M^n$  — гладкая инволюция без неподвижных точек, т. е.  $\sigma(\sigma(x)) = x$  и  $\sigma(x) \neq x$  для всех  $x \in M^n$ . Тогда  $M^n$  — край компактного многообразия.

**Доказательство.** Рассмотрим факторпространство

$$W^{n+1} = (M^n \times [0, 1]) / (x, 0) \sim (\sigma(x), 0).$$

Инволюция  $\sigma$  не имеет неподвижных точек, поэтому в  $W^{n+1}$  окрестность любой точки  $(x, 0)$  гомеоморфна шару, который склеен из двух полушаров  $D_+^{n+1}$  и  $\sigma D_+^{n+1}$ . Следовательно,  $W^{n+1}$  — многообразие с краем  $M^n \times \{1\}$ .  $\square$

Инволюции без неподвижных точек на  $\mathbb{R}P^{2n+1}$  и  $\mathbb{C}P^{2n+1}$  строятся следующим образом:

$$\sigma(x_0, x_1, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}) = (-x_1, x_0, \dots, -x_{2n+1}, x_{2n});$$

$$\sigma(z_0, z_1, \dots, z_{2n}, z_{2n+1}) = (-\bar{z}_1, \bar{z}_0, \dots, -\bar{z}_{2n+1}, \bar{z}_{2n}).$$

**У п р а ж н е н и е.** Докажите, что ориентирующая накрывающая замкнутого многообразия является краем компактного многообразия.

**Теорема 6.7.** Если замкнутое многообразие  $M^{2n}$  является краем компактного многообразия, то размерность пространства  $H_n(M^{2n}; \mathbb{Z}_2)$  чётна.

**Доказательство.** Согласно теореме 6.4 мы имеем  $\chi(M^{2n}) \equiv \dim H_n(M^{2n}; \mathbb{Z}_2) \pmod{2}$ , а согласно теореме 6.5 число  $\chi(M^{2n})$  чётно.  $\square$

**Задача 6.4.** Дана конечная точная последовательность векторных пространств

$$\dots \longrightarrow V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i-1} \longrightarrow \dots$$

Докажите, что  $\sum (-1)^i \dim V_i = 0$ .

**Задача 6.5.** Докажите, что эйлерова характеристика дополнения любого зацепления в  $S^3$  равна 0.

Если  $A$  — конечный симплициальный комплекс, а  $B$  — его подкомплекс, то можно определить *эйлерову характеристику пары*  $(A, B)$  следующим образом:

$$\chi(A, B) = \sum (-1)^i \dim H_i(A, B),$$

где гомологии берутся с коэффициентами в некотором поле.

**Задача 6.6.** Докажите, что  $\chi(A, B) = \chi(A) - \chi(B)$ .

**Задача 6.7\*** [Wal]. Пусть  $K$  — евклидов клеточный комплекс, для которого  $|K| \approx M^n$ , где  $M^n$  — замкнутое многообразие. Рассмотрим альтернированную сумму

$$\Psi(K) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij},$$

где  $\alpha_{ij}$  — количество упорядоченных пар непересекающихся (замкнутых) граней комплекса  $K$  размерностей  $i$  и  $j$ . (Отметим, что  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  и  $\alpha_{ii}$  — это удвоенное количество неупорядоченных пар непересекающихся граней размерности  $i$ .) Докажите, что  $\Psi(K) = \chi^2(M^n) - \chi(M^n)$ , где  $\chi(M^n)$  — эйлерова характеристика многообразия  $M^n$ .

**З а м е ч а н и е.** Число  $\Psi(K)$  из задачи 6.7\* можно интерпретировать как эйлерову характеристику взрезанного квадрата многообразия  $M^n$ . (Определение взрезанного квадрата приведено в части I на с. 177.)

Нередко геометрические условия влекут разного рода условия на эйлерову характеристику. Одним из таких примеров являются транснормальные вложения (см. [Ro1]). Вложение многообразия  $M^k$  в  $\mathbb{R}^n$  называют *транснормальным*, если из того, что точка  $x \in M^k$  лежит в нормальном подпространстве в точке  $y \in M^k$ , следует, что нормальные подпространства в точках  $x$  и  $y$  совпадают. Примерами транснормальных вложений служат стандартные вложения  $\mathbb{R}^k$  и  $S^k$  в  $\mathbb{R}^n$ .

**Задача 6.8.** Докажите, что число точек пересечения транснормально вложенного (связного) многообразия с нормальным подпространством

не зависит от выбора нормального подпространства. (Если это число равно  $r$ , то вложение называют  $r$ -транснаормальным.)

**З а д а ч а 6.9.** Докажите, что если для замкнутого многообразия существует  $r$ -транснаормальное вложение, то число  $r$  чётно.

**З а д а ч а 6.10.** Докажите, что если для замкнутого многообразия  $M^k$  существует  $r$ -транснаормальное вложение, то  $\chi(M^k) = 0$  или  $r$ .

**З а д а ч а 6.11.** Пусть  $M^k$  — замкнутое многообразие, для которого существует транснаормальное вложение. Докажите, что если  $\chi(M^k) \neq 0$ , то  $H_i(M^k; G) = 0$  для всех нечётных  $i$ .

## 6.2. Теорема Лефшеца о неподвижной точке

Пусть  $K$  — конечный симплициальный комплекс,  $f: |K| \rightarrow |K|$  — непрерывное отображение. Индуцированное отображение  $(f_*)_k: H_k(|K|; \mathbb{R}) \rightarrow H_k(|K|; \mathbb{R})$  является линейным оператором в конечномерном пространстве, поэтому можно рассмотреть его след  $\text{tr}(f_*)_k$ . Числом Лефшеца отображения  $f$  называют число  $\Lambda(f) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(f_*)_k$ .

Если комплекс  $K$  линейно связан, то  $(f_*)_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — тождественное отображение, поэтому  $\text{tr}(f_*)_0 = 1$ .

**Пример 6.5.** Если комплекс  $K$  ацикличесен относительно группы коэффициентов  $\mathbb{R}$ , то  $\Lambda(f) = 1$  для любого непрерывного отображения  $f: |K| \rightarrow |K|$ .

**Пример 6.6.** Справедливо равенство  $\Lambda(\text{id}_K) = \chi(K)$ .

**Теорема 6.8** (Лефшеца о неподвижной точке [Le1]). Пусть  $K$  — конечный симплициальный комплекс. Если  $\Lambda(f) \neq 0$ , то отображение  $f: K \rightarrow K$  имеет неподвижную точку.

**Доказательство.** Предположим, что отображение  $f$  не имеет неподвижных точек. Тогда из компактности комплекса  $K$  следует, что некоторое его подразделение  $K'$  обладает следующим свойством: для любой точки  $x \in |K|$  расстояние между  $x$  и  $f(x)$  во много раз больше наибольшего диаметра симплексов  $K'$ . Из этого, в свою очередь, следует, что если  $K''$  — подразделение  $K'$  и  $\varphi: K'' \rightarrow K'$  — симплициальная аппроксимация отображения  $f$ , то для любого симплекса  $\Delta'' \subset K''$  множества  $\Delta''$  и  $\varphi(\Delta'')$  не пересекаются. Таким образом, чтобы доказать теорему Лефшеца, достаточно дать такую интерпретацию числа  $\Lambda(\varphi)$ , что если  $\Delta'' \cap \varphi(\Delta'') = \emptyset$  для всех симплексов  $\Delta'' \subset K''$ , то  $\Lambda(\varphi) = 0$ .

**Л е м м а.** а) (Хопф [НоЗ]) Пусть  $K$  — конечный симплициальный комплекс,  $\varphi_k: C_k(K, \mathbb{R}) \rightarrow C_k(K, \mathbb{R})$  — цепное отображение. Тогда

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr} \varphi_k = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(\varphi_*)_k.$$

б) [Sh2] Пусть  $K$  — конечный симплициальный комплекс,  $K'$  — его конечное подразделение,  $\varphi: K' \rightarrow K$  — симплициальное отображение. Тогда

$$\Lambda(\varphi) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \Phi_k,$$

где  $\Phi_k$  — количество  $k$ -мерных симплексов  $\Delta^k \subset K'$ , для которых  $\Delta^k \subset \varphi(\Delta^k)$ , с учётом знака\*).

Доказательство. а) Достаточно проверить, что

$$\text{tr } \varphi_k = \text{tr}(\varphi_k|_{B_k}) + \text{tr}(\varphi_k)_* + \text{tr}(\varphi_{k-1}|_{B_{k-1}}).$$

Пусть  $C_k = Z_k \oplus \tilde{C}_k$ . Линейный оператор  $\varphi_k$  переводит  $Z_k$  в  $Z_k$ , поэтому он индуцирует оператор  $\tilde{\varphi}_k: \tilde{C}_k \rightarrow \tilde{C}_k$ ; при этом  $\text{tr } \varphi_k = \text{tr}(\varphi_k|_{Z_k}) + \text{tr } \tilde{\varphi}_k$ .

Пусть  $Z_k = B_k \oplus \tilde{Z}_k$ . Тогда  $\tilde{Z}_k \cong H_k(K; \mathbb{R})$  и оператор в пространстве  $H_k(K; \mathbb{R})$ , индуцированный оператором  $\varphi_k$ , совпадает с  $(\varphi_*)_k$ . Поэтому  $\text{tr}(\varphi_k|_{Z_k}) = \text{tr}(\varphi_k|_{B_k}) + \text{tr}(\varphi_*)_k$ .

Отображение  $\partial: C_k \rightarrow B_{k-1}$  индуцирует изоморфизм  $\tilde{C}_k \rightarrow B_{k-1}$ . Равенство  $\partial\varphi_k = \varphi_{k-1}\partial$  показывает, что при этом изоморфизме оператор  $\tilde{\varphi}_k$  переходит в  $\varphi_{k-1}$ .

б) Симплициальное отображение  $\varphi: K' \rightarrow K$  индуцирует цепное отображение  $\varphi_k: C_k(K'; \mathbb{R}) \rightarrow C_k(K; \mathbb{R})$ . Рассмотрим также цепное отображение  $i_k: C_k(K; \mathbb{R}) \rightarrow C_k(K'; \mathbb{R})$ , которое сопоставляет симплексу  $\Delta \subset K$ , разрезанному на симплексы  $\Delta_1, \dots, \Delta_s$ , их сумму  $\Delta_1 + \dots + \Delta_s$  (ориентации этих симплексов согласованы с ориентацией симплекса  $\Delta$ ; формальное определение отображения  $i_k$  для барицентрического подразделения приведено на с. 17). Композиция  $\varphi_k i_k: C_k(K; \mathbb{R}) \rightarrow C_k(K; \mathbb{R})$  сопоставляет симплексу  $\Delta$  сумму симплексов  $\varphi(\Delta_1) + \dots + \varphi(\Delta_s)$ . Поэтому  $\Phi_k = \text{tr}(\varphi_k i_k)$ . Согласно а) мы имеем

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(\varphi_k i_k) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(\varphi_*)_k;$$

здесь мы пользуемся тем, что после отождествления  $H_k(K'; \mathbb{R})$  с  $H_k(K; \mathbb{R})$  посредством изоморфизма  $i_*$  отображение гомологий, индуцированное цепным отображением  $\varphi_k i_k$ , совпадает с  $(\varphi_*)_k$ .  $\square$

Теорема Лefшеца следует из утверждения б) леммы, поскольку если  $\Delta' \cap \varphi(\Delta') = \emptyset$  для всех симплексов  $\Delta' \subset K'$ , то  $\Phi_k = 0$  для всех  $k$ .  $\square$

**Пример 6.7.** Для отображения  $f: S^n \rightarrow S^n$  выполняется равенство  $\Lambda(f) = 1 + (-1)^n \text{deg } f$ , поэтому если  $\text{deg } f \neq (-1)^{n+1}$ , то отображение  $f$  имеет неподвижную точку.

\* Если симплексы  $\Delta^k$  и  $\varphi(\Delta^k)$  одинаково ориентированы, то берётся знак плюс, а если они противоположно ориентированы, то берётся знак минус.

*Следствие.* На сфере  $S^{2n}$  не существует непрерывного векторного поля без особых точек.

*Доказательство.* Пусть  $v$  — векторное поле на  $S^{2n}$ ,  $v(x)$  — вектор этого поля в точке  $x \in S^{2n}$ ,  $f(x)$  — точка пересечения  $S^{2n}$  с лучом, идущим из центра сферы в конец вектора  $v(x)$  (рис. 14). Ясно, что  $f \sim \text{id}_{S^{2n}}$ , поэтому  $\deg f = 1 \neq -1 = (-1)^{2n+1}$ . Следовательно, отображение  $f$  имеет неподвижную точку  $x_0$ ; при этом  $v(x_0) = 0$ .  $\square$

*З а м е ч а н и е.* Напомним, что в части I (с. 222 и замечание на с. 223) приведены более элементарные доказательства того, что на сфере  $S^{2n}$  не существует непрерывного векторного поля без особых точек.

*Пример 6.8.* Для группы коэффициентов  $\mathbb{R}$  пространство  $\mathbb{R}P^{2n}$  ациклично, поэтому любое отображение  $f: \mathbb{R}P^{2n} \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$  имеет неподвижную точку.

*Задача 6.12 [Ре].* Пусть  $K$  — конечный симплициальный комплекс,  $f: K \rightarrow K$  — непрерывное отображение,  $p$  — простое число, причём  $f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_p$ . Докажите, что  $\Lambda(f^p) \equiv \Lambda(f) \pmod{p}$ .

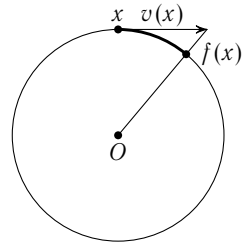


Рис. 14. Построение отображения  $f$

## Глава II

# Кольцо когомологий

### § 7. Умножение в когомологиях

Применения когомологий во многом связаны с тем, что на множестве  $H^*(K) = \bigoplus H^k(K)$  есть не только структура группы, но и структура кольца, задаваемая *умножением Колмогорова—Александера*, которое в последнее время обычно называют *сир-произведением*. Эту операцию впервые ввели А. Н. Колмогоров [Ko1], [Ko2] и Александер [Al3]. Затем определение этой операции усовершенствовали Чех [Če] и Уитни [Wh4].

До Колмогорова и Александера была известна операция умножения в гомологиях многообразий (пересечение циклов). Изоморфизм Пуанкаре превращает это умножение в гомологиях в умножение Колмогорова—Александера. Конечно, значительная часть приложений умножения в когомологиях связана именно с этим давно известным умножением, но есть и другие приложения, которые относятся не к многообразиям.

Чтобы определить сир-произведение для симплициального комплекса, нужно занумеровать его вершины. Это определение не инвариантно на уровне коцепей, но оно инвариантно на уровне когомологий. Для доказательства инвариантности нам потребуется вспомогательный объект — тотальный цепной комплекс.

#### 7.1. Гомологии тотального цепного комплекса

В некоторых случаях бывает удобно предполагать, что задана нумерация вершин симплекса. Важнейшие примеры подобных ситуаций — определение умножения в когомологиях и доказательство изоморфности сингулярных и симплициальных гомологий. Для этих целей попробуем определить гомологии симплициального комплекса, рассматривая не ориентированные симплексы, а упорядоченные наборы  $(v_0, \dots, v_k)$ , где  $v_0, \dots, v_k$  — попарно различные вершины некоторого симплекса. Простейший пример показывает, что эта попытка неудачна. Действительно, при таком подходе для  $K = [v_0, v_1]$  получаем, что группа  $\text{Ker } \partial_1$  порождена элементом  $(v_0, v_1) + (v_1, v_0)$ , а  $\text{Im } \partial_2 = 0$ .

Причина этой неудачи достаточно понятна: мы фактически занялись вычислением гомологий  $CW$ -комплекса, гомеоморфного окружности (рис. 15). Удивительным образом положение очень легко исправляется: достаточно отказаться от, казалось бы, естественного условия, что вершины  $v_0, \dots, v_k$  должны быть попарно различны. Это действительно неожиданное явление, потому что теперь для вычисления гомологий комплекса  $K = [v_0, v_1]$  используется бесконечный цепной комплекс, имеющий  $2^{k+1}$  образующих размерности  $k$  для всех  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Но зато теперь, по крайней мере, одномерная группа гомологий оказывается такой, как нужно. Действительно, группа  $\text{Кег } \partial_1$  порождена элементами  $(v_0, v_1) + (v_1, v_0)$ ,  $(v_0, v_0)$  и  $(v_1, v_1)$ , но все они входят в  $\text{Im } \partial_2$ :  $(v_0, v_0) = \partial(v_0, v_0, v_0)$ ,  $(v_1, v_1) = \partial(v_1, v_1, v_1)$  и  $(v_0, v_1) + (v_1, v_0) = \partial(v_0, v_1, v_0) + \partial(v_0, v_0, v_0)$ .

Цепной комплекс  $\hat{C}_*(K)$ , порождённый упорядоченными наборами  $(v_0, \dots, v_k)$ , где  $v_0, \dots, v_k$  — вершины одного и того же симплекса в  $K$  (среди них могут быть совпадающие), будем называть *тотальным* или *упорядоченным* цепным комплексом. Граничный гомоморфизм для  $\hat{C}_*(K)$  определяется точно так же, как и для  $C_*(K)$ .

**Теорема 7.1.** Пусть  $K$  — симплицальный комплекс, вершины которого занумерованы\*). Тогда группы гомологий цепных комплексов  $\hat{C}_*(K)$  и  $C_*(K)$  канонически изоморфны.

**Доказательство.** Рассмотрим гомоморфизм  $\varphi: \hat{C}_*(K) \rightarrow C_*(K)$ , при котором  $(v_0, \dots, v_k)$  переходит в  $[v_0, \dots, v_k]$ , если все точки  $v_0, \dots, v_k$  различны, и в 0, если среди этих точек есть совпадающие. Можно проверить, что  $\varphi$  — цепное отображение; это делается примерно так же, как при доказательстве того, что симплицальное отображение  $K \rightarrow L$  индуцирует цепное отображение  $C_*(K) \rightarrow C_*(L)$ : снова нужно отдельно рассмотреть случай, когда среди точек  $v_0, \dots, v_k$  есть ровно две совпадающие. Рассмотрим также гомоморфизм  $\Phi: C_*(K) \rightarrow \hat{C}_*(K)$ , индуцированный нумерацией вершин комплекса. А именно, мы предполагаем, что ориентация симплекса задаётся упорядоченным набором вершин, номера которых идут в порядке возрастания; ориентированному симплексу сопоставляется именно этот упорядоченный набор вершин. Отображение  $\Phi$  тоже цепное.

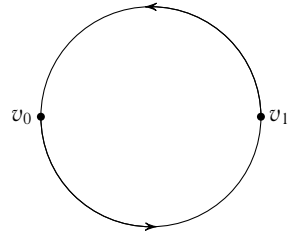


Рис. 15.  $CW$ -комплекс, гомеоморфный окружности

\*) Достаточно предполагать, что множество вершин симплицального комплекса линейно упорядочено.



Отображение  $\varphi\Phi: C_*(K) \rightarrow C_*(K)$  тождественно. Отображение  $\Phi\varphi$  не тождественно, но оно цепно гомотопно тождественному. Чтобы доказать это, мы воспользуемся такими же рассуждениями, как и при доказательстве теоремы об ациклических носителях (теорема 2.1 на с. 16). Но вместо того чтобы сопоставлять симплексу  $\Delta \subset K$  ациклический подкомплекс  $L(\Delta)$ , мы сопоставим упорядоченному набору вершин  $v = (v_0, \dots, v_k)$ , являющихся вершинами симплекса  $\Delta_v \subset K$ , цепной подкомплекс  $\hat{C}_*(\Delta_v) \subset \hat{C}_*(K)$ . При этом выполняются следующие свойства:

1) если  $\Delta' \subset \Delta$ , то  $\hat{C}_*(\Delta') \subset \hat{C}_*(\Delta)$ ;

2) цепной комплекс  $\hat{C}_*(\Delta_v)$  является носителем цепей  $\Phi\varphi(v)$  и  $v = \text{id}(v)$ .

Если  $v_0$  — вершина, то  $\Phi\varphi(v_0) = v_0 = \text{id}(v_0)$ . Поэтому остаётся проверить, что если  $z$  — цикл в  $\hat{C}_k(\Delta_v)$ ,  $k \geq 1$ , то  $z = \partial d$ , где  $d \in \hat{C}_{k+1}(\Delta_v)$ . Каждой цепи  $c \in \hat{C}_k(\Delta_v)$  можно сопоставить цепь  $(v_0, c) \in \hat{C}_{k+1}(\Delta_v)$ . При этом  $\partial(v_0, c) = c - (v_0, \partial c)$  в случае  $k \geq 1$ . Если же  $z$  — цикл, то  $z = \partial(v_0, z)$ , поскольку  $\partial z = 0$ .  $\square$

Любое симплициальное отображение  $f: K \rightarrow L$  индуцирует гомоморфизм  $\hat{f}_k: \hat{C}_k(K) \rightarrow \hat{C}_k(L)$ , заданный формулой

$$\hat{f}_k((v_0, \dots, v_k)) = (f(v_0), \dots, f(v_k)).$$

Легко проверить, что  $\hat{f}_k$  — цепное отображение (при проверке не нужно заботиться о том, чтобы точки  $f(v_i)$  и  $f(v_j)$  были различны).

Легко также проверить, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_k(\hat{C}_*(K)) & \xrightarrow{\hat{f}_*} & H_k(\hat{C}_*(L)) \\ \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\ H_k(K) & \xrightarrow{f_*} & H_k(L) \end{array}$$

коммутативна. Действительно, уже на уровне цепей выполняется равенство  $f_k\varphi = \varphi\hat{f}_k$ . Из равенства  $f_*\varphi_* = \varphi_*\hat{f}_*$  следует равенство  $\Phi_*f_* = \hat{f}_*\Phi_*$ , поскольку  $\Phi_* = \varphi_*^{-1}$  (но только на уровне гомологий, а не на уровне цепей).

## 7.2. Определение умножения в когомологиях

Тотальный цепной комплекс естественным образом задаёт коцепной комплекс. Когомологии тотального цепного комплекса тоже канонически изоморфны симплициальным когомологиям. Это следует из того, что цепно гомотопные цепные отображения индуцируют не только одинаковые отображения гомологий, но и одинаковые отображения когомологий. Чтобы доказать это, прежде всего отметим, что цепное отображение  $\varphi_k: C_k \rightarrow C'_k$  индуцирует коцепное отображение  $\varphi^k: \text{Hom}(C'_k, G) \rightarrow \text{Hom}(C_k, G)$ . Пусть

$\varphi_k$  и  $\psi_k$  — цепно гомотопные цепные отображения и  $\alpha = \varphi^k - \psi^k$ . Тогда если  $c_2$  — цикл, то

$$\langle \alpha c^1, c_2 \rangle = \langle c^1, (\partial D + D\partial)c_2 \rangle = \langle c^1, \partial Dc_2 \rangle = \langle \delta c^1, Dc_2 \rangle.$$

Ясно, что если  $c^1$  — коцикл, то последнее выражение равно нулю.

Предположим, что группа коэффициентов  $R$  является аддитивной группой коммутативного ассоциативного кольца с единицей. Тогда для коцепей  $c^p \in \hat{C}^p(K; R)$  и  $c^q \in \hat{C}^q(K; R)$  можно определить их *сир-произведение*  $c^p \cup c^q \in \hat{C}^{p+q}(K; R)$  следующим образом:

$$\langle c^p \cup c^q, (v_0, \dots, v_{p+q}) \rangle = \langle c^p, (v_0, \dots, v_p) \rangle \cdot \langle c^q, (v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) \rangle;$$

здесь  $\langle c^p, (v_0, \dots, v_p) \rangle$  и  $\langle c^q, (v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) \rangle$  рассматриваются как элементы кольца и берётся их произведение.

Для определённого таким образом умножения коцепей единицей является коцепь  $c^0$ , принимающая значение 1  $\in R$  на каждой вершине  $v$ . Коцепь  $c^0$  является коциклом. Действительно, если  $c_1 = \sum a_i[v_{i1}, v_{i2}]$ , то  $\partial c_1 = \sum a_i v_{i1} - \sum a_i v_{i2}$ , поэтому

$$\langle \delta c^0, c_1 \rangle = \langle c^0, \partial c_1 \rangle = \sum a_i - \sum a_i = 0.$$

**З а м е ч а н и е.** Сир-произведение можно определить и в несколько более общей ситуации. Пусть  $c^p \in \hat{C}^p(K; G)$  и  $c^q \in \hat{C}^q(K; G')$ . Тогда коцепь  $c^p \cup c^q \in \hat{C}^{p+q}(K; G \otimes G')$  задаётся формулой

$$\langle c^p \cup c^q, (v_0, \dots, v_{p+q}) \rangle = \langle c^p, (v_0, \dots, v_p) \rangle \otimes \langle c^q, (v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) \rangle.$$

В том случае, когда  $G = G' = R$  — аддитивная группа коммутативного кольца с единицей, умножение в кольце задаёт отображение  $R \otimes R \rightarrow R$  и мы приходим к предыдущему определению.

Ясно, что сир-произведение билинейно и ассоциативно. Оказывается, его можно перенести в когомологии благодаря следующему свойству.

**Л е м м а.**  $\delta(c^p \cup c^q) = (\delta c^p) \cup c^q + (-1)^p c^p \cup (\delta c^q)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Значения коцепей  $(\delta c^p) \cup c^q$  и  $(-1)^p c^p \cup (\delta c^q)$  на  $(v_0, \dots, v_{p+q+1})$  равны

$$\sum_{0 \leq i \leq p+1} (-1)^i c^p(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{p+1}) c^q(v_{p+1}, \dots, v_{p+q+1})$$

и

$$(-1)^p \sum_{p \leq i \leq p+q+1} (-1)^{i-p} c^p(v_0, \dots, v_p) c^q(v_p, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{p+q+1}).$$

Последний член первой суммы сокращается с первым членом второй суммы, а сумма всех остальных членов этих сумм как раз равна значению коцепи  $\delta(c^p \cup c^q)$  на  $(v_0, \dots, v_{p+q+1})$ .  $\square$

Выражение для  $\delta(c^p \cup \hat{c}^q)$  показывает, что если  $z^p$  и  $z^q$  — коциклы, то  $\delta(z^p \cup z^q)$  тоже коцикл. Кроме того, когомологический класс сир-произведения двух коциклов зависит только от их когомологических классов, поскольку

$$\begin{aligned}(z^p + \delta c^{p-1}) \cup z^q &= z^p \cup z^q + \delta(c^{p-1} \cup z^q), \\ z^p \cup (z^q + \delta c^{q-1}) &= z^p \cup z^q + (-1)^p \delta(z^p \cup c^{q-1}).\end{aligned}$$

Таким образом, сир-произведение определено для когомологий.

Непосредственно из определений видно, что если  $f: K \rightarrow L$  — симплициальное отображение, то  $\hat{f}^*(c^p \cup c^q) = (\hat{f}^*c^p) \cup (\hat{f}^*c^q)$ , где  $\hat{f}^*$  — индуцированное отображение когомологий тотального цепного комплекса.

Изоморфизм  $\varphi^*: H^*(K) \rightarrow H^*(\hat{C}_*(K))$  позволяет перенести сир-произведение в симплициальные когомологии. А именно, если  $\alpha, \beta \in H^*(K)$ , то мы определим  $\alpha \cup \beta$  как элемент из  $H^*(K)$ , для которого  $\varphi^*(\alpha \cup \beta) = (\varphi^*\alpha) \cup (\varphi^*\beta)$ . На уровне коциклов сир-произведение в симплициальных когомологиях устроено так: коцикл  $z^p \cup z^q$  лежит в том же самом классе когомологий, что и коцикл  $z$ , заданный формулой

$$\langle z, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle = \langle z^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle z^q, [v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}] \rangle. \quad (1)$$

Здесь предполагается, что вершины симплициального комплекса  $K$  занумерованы и мы записываем вершины ориентированного симплекса в порядке возрастания их номеров. Иначе формула (1) не задаёт никакого коцикла  $z$ , потому что при перестановке вершин  $v_0, \dots, v_{p+q}$  правая часть изменяется непредсказуемым образом.

Тотальный цепной комплекс нам был нужен для чисто технических целей. Теперь для симплициальных когомологий сир-произведение можно определить следующим образом. Фиксируем нумерацию вершин и положим

$$\langle c^p \cup c^q, [v_{i_0}, \dots, v_{i_{p+q}}] \rangle = \langle c^p, [v_{i_0}, \dots, v_{i_p}] \rangle \cdot \langle c^q, [v_{i_p}, v_{i_{p+1}}, \dots, v_{i_{p+q}}] \rangle,$$

где  $i_0 < i_1 < \dots < i_{p+q}$ . Такое умножение коцепей задаёт корректно определённое умножение классов когомологий, которое не зависит от выбора нумерации. Тотальный цепной комплекс нужен только для доказательства этого факта и для доказательства естественности сир-произведения в том смысле, что если  $f: |K| \rightarrow |L|$  — непрерывное отображение, то  $f^*(\alpha \cup \beta) = f^*(\alpha) \cup f^*(\beta)$ .

Умножение в когомологиях обладает следующим свойством *косокоммутативности*.

**Теорема 7.2.** Если  $\alpha \in H^p(K)$  и  $\beta \in H^q(K)$ , то  $\alpha \cup \beta = (-1)^{pq} \beta \cup \alpha$ .

**Доказательство.** Пусть  $z^p$  и  $z^q$  — коциклы, представляющие  $\alpha$  и  $\beta$ . Вычислим  $z^p \cup z^q$ , используя одну нумерацию вершин  $K$ , а  $z^q \cup z^p$  —

используя другую, а именно противоположную. В результате получим

$$\begin{aligned}\langle z^p \cup z^q, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle &= \langle z^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle z^q, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle, \\ \langle z^q \cup z^p, [v_{p+q}, \dots, v_0] \rangle &= \langle z^q, [v_{p+q}, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle z^p, [v_p, \dots, v_0] \rangle.\end{aligned}$$

Ясно также, что  $[v_r, \dots, v_0] = (-1)^{r(r+1)/2} [v_0, \dots, v_r]$  и  $(p+q)(p+q+1) - p(p+1) - q(q+1) = 2pq$ .  $\square$

Для относительных когомологий сир-произведение определяется точно так же, как и для абсолютных. При этом если  $\alpha \in H^p(K, L_1)$  и  $\beta \in H^q(K, L_2)$ , то  $\alpha \cup \beta \in H^{p+q}(K, L_1 \cup L_2)$ . Действительно, пусть  $z^p$  и  $z^q$  — коциклы, представляющие  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $[v_0, \dots, v_{p+q}]$  — симплекс в  $L_1 \cup L_2$ . Симплекс  $[v_0, \dots, v_{p+q}]$ , как и любой симплекс из  $L_1 \cup L_2$ , целиком лежит в  $L_1$  или в  $L_2$ . В первом случае  $[v_0, \dots, v_p]$  лежит в  $L_1$ , а во втором случае  $[v_p, \dots, v_{p+q}]$  лежит в  $L_2$ . Следовательно,

$$\langle z^p \cup z^q, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle = \langle z^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle z^q, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle = 0.$$

Поэтому коцикл  $z^p \cup z^q$  лежит в  $C^{p+q}(K, L_1 \cup L_2)$ .

**Задача 7.1.** Пусть  $\alpha, \beta \in H^*(K, L)$ . Докажите, что  $(\alpha|_K) \cup \beta = \alpha \cup \beta$ , где  $\alpha|_K$  — образ элемента  $\alpha$  при естественном гомоморфизме  $H^*(K, L) \rightarrow H^*(K)$ .

**Задача 7.2.** а) Пусть  $K = \bigcup_{i=1}^n L_i$ , где  $L_i$  — стягиваемые подкомплексы. Докажите, что для любых  $n$  элементов  $\alpha_i \in H^{p_i}(K)$ ,  $p_i > 0$ , произведение  $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n$  равно нулю.

б) Докажите, что когомологическое умножение в  $\Sigma K$  тривиально, т. е. сир-произведение любых двух когомологических классов положительной размерности равно нулю.

**Задача 7.3.** Пусть многообразие  $M^k$  вложено в  $S^n$ . Докажите, что в кольце  $H^*(S^n, M^k)$  произведение любых двух классов положительной размерности равно нулю.

**Задача 7.4.** Пусть  $A \subset X$  — подкомплекс, являющийся ретрактом.

а) Докажите, что  $H_*(X) = \text{Im } i_* \oplus \text{Ker } r_*$  и  $H^*(X) = \text{Ker } i^* \oplus \text{Im } r^*$ , где  $i: A \rightarrow X$  — естественное включение,  $r: X \rightarrow A$  — ретракция.

б) В случае когомологий докажите, что  $\text{Ker } i^*$  — идеал, а  $\text{Im } r^*$  — подкольцо.

**Задача 7.5.** Опишите умножение в кольце  $H^*(X \vee Y)$ , если известны умножения в кольцах  $H^*(X)$  и  $H^*(Y)$ .

**Задача 7.6.** Пусть  $p, q \geq 1$ . Докажите, что  $S^p \vee S^q = (S^p \times \{x_0\}) \cup \cup (\{y_0\} \times S^q)$  не является ретрактом произведения  $S^p \times S^q$ .

**Задача 7.7.** а) Докажите, что при  $m < n$  стандартно вложенное пространство  $\mathbb{R}P^m \subset \mathbb{R}P^n$  не является ретрактом.

б) Докажите, что при  $m < n$  стандартно вложенное пространство  $\mathbb{C}P^m \subset \mathbb{C}P^n$  не является ретрактом.

### 7.3. Кольца когомологий двумерных поверхностей

Вычислим теперь кольца когомологий замкнутых двумерных поверхностей исходя непосредственно из определения сир-умножения. Отметим, что если воспользоваться изоморфизмом Пуанкаре и интерпретировать умножение в когомологиях двумерной поверхности как пересечение двойственных циклов, то требуемый результат можно получить без труда (см. п. 8.2).

Для двумерных поверхностей нужно вычислить только сир-произведение элементов группы  $H^1$ , поскольку произведение элементов групп  $H^1$  и  $H^2$  лежит в  $H^3 = 0$ . Прежде чем заняться вычислениями, обсудим геометрический смысл коциклов и кограниц.

Каждому (ориентированному)  $k$ -мерному симплексу симплицального комплекса соответствует двойственная ему  $k$ -мерная коцепь, принимающая на нём значение 1 и обращающаяся в нуль на всех остальных  $k$ -мерных симплексах. Мы будем рассматривать только коцепи, являющиеся суммами коцепей, двойственных различным симплексам. Коцепи такого вида отождествляются с наборами ориентированных симплексов.

Формула  $\langle \delta c^1, c_2 \rangle = \langle c^1, \partial c_2 \rangle$  показывает, что одномерная коцепь  $c^1$  указанного вида является коциклом тогда и только тогда, когда для любого двумерного симплекса либо ни один из трёх одномерных симплексов его границы не входит в  $c^1$ , либо в  $c^1$  входят ровно два из трёх симплексов границы, причём для группы коэффициентов  $\mathbb{Z}$  они должны входить в  $c^1$  с разными ориентациями по отношению к ориентации границы двумерного симплекса. Пример коцикла на торе изображён на рис. 16 (а); другой коцикл вместе с двойственным ему на уровне гомологий циклом изображён на рис. 16 (б). Эти два коцикла двойственны циклам, образующим

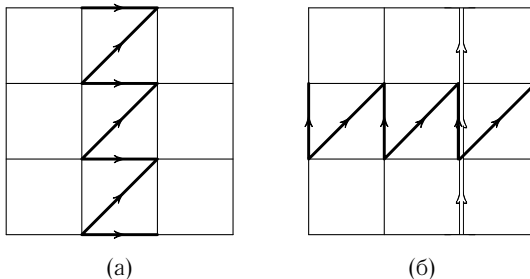


Рис. 16. Базисные коциклы на торе

базис гомологий тора, поэтому они образуют базис когомологий (как для коэффициентов в  $\mathbb{Z}$ , так и для коэффициентов в  $\mathbb{Z}_2$ ).

Аналогичным образом строится базис когомологий для сферы с любым числом ручек. На рис. 17 изображены базисные коциклы для отдельной ручки. На том же рисунке справа показано, как ориентированы звенья ломаной.

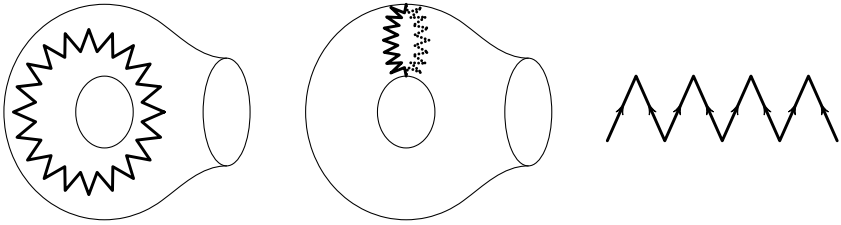


Рис. 17. Базисные коциклы на ручке

Базис двумерных когомологий сферы с ручками образует любая коцепь, двойственная двумерному симплексу. Если симплексы  $\Delta_1^2, \dots, \Delta_p^2$  одинаково ориентированы, то коцепь  $\sum a_i (\Delta_i^2)^*$  является образующей тогда и только тогда, когда  $\sum a_i = \pm 1$ . Это следует из того, что коцепи, двойственные одинаково ориентированным двумерным симплексам, когомологичны. Например, разность двух коцепей, двойственных одинаково ориентированным двумерным симплексам с общим ребром  $\Delta^1$ , является кограницей коцепи, двойственной  $\Delta^1$ .

Формула  $\langle \alpha \smile \beta, [ijk] \rangle = \langle \alpha, [ij] \rangle \cdot \langle \beta, [jk] \rangle$  показывает, что при вычислении  $\alpha \smile \beta$  нужно рассматривать лишь те двумерные симплексы, которые имеют общую границу как с  $\alpha$ , так и с  $\beta$ .

Для выбранных ранее базисных коциклов в одномерных когомологиях тора таких двумерных симплексов два (на рис. 18 они заштрихованы). При этом

$$\langle \alpha, [01] \rangle \cdot \langle \beta, [12] \rangle = 1, \quad \langle \alpha, [02] \rangle \cdot \langle \beta, [23] \rangle = 0,$$

поскольку  $\langle \beta, [23] \rangle = 0$ . Таким образом,  $\alpha \smile \beta$  — базисный элемент двумерных когомологий тора.

Для группы коэффициентов  $\mathbb{Z}$  из кососимметричности сир-произведения следует, что  $\alpha \smile \alpha = 0$  для любого класса когомологий нечётной размерности. Но для группы коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$  бывают одномерные классы когомологий, для которых  $\gamma \smile \gamma \neq 0$ . Поэтому приведём доказа-

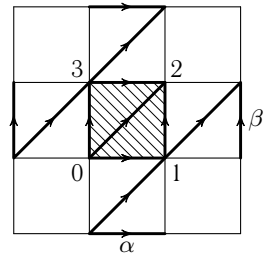


Рис. 18. Вычисление  $\alpha \smile \beta$  для тора



что коцепь  $\sum a_i(\Delta_i^2)^*$  является образующей группы когомологий тогда и только тогда, когда число  $\sum a_i$  нечётно; если же число  $\sum a_i$  чётно, то эта коцепь представляет нулевой класс когомологий.

Вычислим кольцо когомологий поверхности  $mP^2$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ . Каждому листу Мёбиуса, вклеенному в  $S^2$ , соответствует одно прямое слагаемое  $\mathbb{Z}_2$  в одномерных гомологиях и когомологиях. Для листа Мёбиуса, вклеенного в сферу, базисный цикл представляется диагональю прямоугольника (рис. 20). На рис. 21 базисный цикл изображён пунктиром; двойственный ему коцикл  $\alpha$  изображён на том же рисунке ломаной.

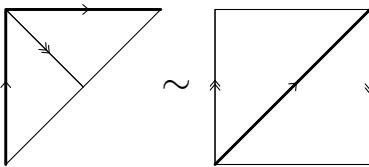


Рис. 20. Базисный цикл на листе Мёбиуса

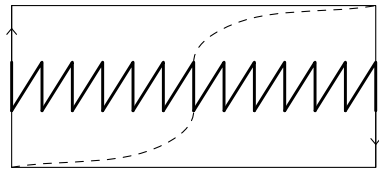


Рис. 21. Базисный коцикл на листе Мёбиуса

При вычислении  $\alpha \circ \alpha$  можно поступить так же, как и в случае ручки, т. е. заменить  $\alpha$  на коцикл  $\alpha'$ , который получается из  $\alpha$  добавлением некоторых кограниц коцепей, двойственных точкам. Но в неориентируемом случае полностью развести коциклы в разные стороны не удаётся, потому что  $A$  и  $B$  на рис. 22 (а) — это одна и та же точка. Добавим к  $\alpha$  когра-

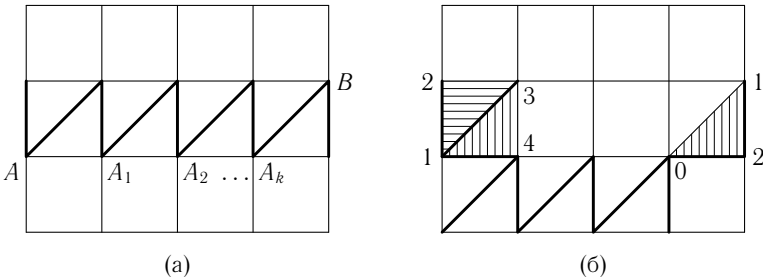


Рис. 22. Базисный коцикл  $\alpha'$  на листе Мёбиуса

ницы коцепей, двойственных точкам  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . В результате получим коцикл  $\alpha'$ , изображённый на рис. 22 (б). С коциклами  $\alpha$  и  $\alpha'$  имеют общую границу три двумерных симплекса; на рис. 22 (б) они заштрихованы.



Занумеруем их вершины. Для такой нумерации, как на рис. 22 (б), получим

$$\begin{aligned}\langle \alpha \cup \alpha', [012] \rangle &= 1; \\ \langle \alpha \cup \alpha', [123] \rangle &= 0, \text{ поскольку } \langle \alpha', [23] \rangle = 0; \\ \langle \alpha \cup \alpha', [134] \rangle &= 0, \text{ поскольку } \langle \alpha', [34] \rangle = 0.\end{aligned}$$

Поэтому цикл  $\alpha \cup \alpha'$  представляет образующую двумерной группы когомологий. Мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 7.4.** *В одномерных когомологиях с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  сферы с вклеенными  $m$  листами Мёбиуса можно выбрать базис  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  так, что  $\alpha_i \cup \alpha_j = 0$  при  $i \neq j$  и  $\alpha_i \cup \alpha_i = \Lambda$ , где  $\Lambda$  — образующая двумерных когомологий.*

**Задача 7.8.** Пусть  $M_1^2$  и  $M_2^2$  — замкнутые ориентируемые двумерные поверхности, отличные от сферы  $S^2$ .

а) Пусть  $f: M_1^2 \rightarrow M_2^2$  — непрерывное отображение. Докажите, что гомоморфизм  $f_2^*: H^2(M_2^2) \rightarrow H^2(M_1^2)$  полностью определяется гомоморфизмом  $f_1^*: H^1(M_2^2) \rightarrow H^1(M_1^2)$ .

б) Докажите, что существует гомоморфизм  $h: H^1(M_2^2) \rightarrow H^1(M_1^2)$ , который не может быть индуцирован никаким непрерывным отображением  $f: M_1^2 \rightarrow M_2^2$ .

## § 8. Гомологии и когомологии многообразий

Важнейшую роль при изучении гомологий и когомологий многообразий играет изоморфизм Пуанкаре, который выражается через сар-произведение. Сар-произведение определяется для произвольных симплициальных комплексов, но основные его применения связаны с многообразиями. Для многообразий сар-произведение после отождествления когомологий с гомологиями посредством изоморфизма Пуанкаре превращается в отображение  $H_k(M^n) \times H_l(M^n) \rightarrow H_{k+l-n}(M^n)$ , которое сопоставляет паре циклов их пересечение. Исторически сар-произведение появилось именно как обобщение на произвольные комплексы пересечения циклов в многообразии.

### 8.1. Сар-произведение

Сар-произведение — это билинейное отображение

$$\frown: H^p(K; R) \times H_{p+q}(K; R) \rightarrow H_q(K; R),$$

где  $R$  — аддитивная группа коммутативного ассоциативного кольца с единицей. Сар-произведение можно корректно определить для тотального

цепного комплекса, а затем перенести в симплициальные гомологии и когомологии. Но мы не будем повторять эту процедуру, а сразу фиксируем нумерацию вершин комплекса и будем работать с симплициальными цепями и коцепями, не повторяя проверку корректности определений (на уровне гомологий и когомологий).

Мы будем предполагать, что симплициальный комплекс  $K$  линейно связан. Для  $c^p \in C^p(K; R)$  положим

$$c^p \frown [v_0, \dots, v_{p+q}] = \langle c^p, [v_q, \dots, v_{p+q}] \rangle [v_0, \dots, v_q];$$

здесь предполагается, что номера вершин  $v_0, \dots, v_{p+q}$  идут в порядке возрастания. При  $q = 0$  полагаем

$$c^p \frown [v_0, \dots, v_p] = \langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle \in R \cong C_0(K; R).$$

Продолжая это отображение по линейности, получаем билинейное отображение

$$\frown : C^p(K; R) \times C_{p+q}(K; R) \rightarrow C_q(K; R).$$

Это отображение индуцирует отображение для (ко)гомологий благодаря следующему свойству.

$$\text{Л е м м а. } \partial(d^p \frown c_{p+q}) = (-1)^q (\delta d^p \frown c_{p+q}) + d^p \frown \partial c_{p+q}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Требуемое равенство достаточно проверить для  $c_{p+q} = [v_0, \dots, v_{p+q}]$ . Согласно определению

$$\begin{aligned} d^p \frown \partial[v_0, \dots, v_{p+q}] &= \\ &= \sum_{0 \leq i \leq q-1} (-1)^i \langle d^p, [v_q, \dots, v_{p+1}] \rangle [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q] + \\ &\quad + \sum_{q \leq i \leq p+q} (-1)^i \langle d^p, [v_{q-1}, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{p+q}] \rangle [v_0, \dots, v_{q-1}]; \\ (-1)^q \delta d^p \frown [v_0, \dots, v_{p+q}] &= \\ &= (-1)^q \langle \delta d^p, [v_{q-1}, \dots, v_{p+q}] \rangle [v_0, \dots, v_{q-1}] = \\ &= \sum_{q-1 \leq i \leq p+q} (-1)^{i+1} \langle d^p, [v_{q-1}, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{p+q}] \rangle [v_0, \dots, v_q]. \end{aligned}$$

Если вторую сумму для первого выражения сложить со вторым выражением, то все слагаемые, кроме слагаемого с  $i = q$ , взаимно уничтожаются. Ясно также, что если к первой сумме (для первого выражения) добавить это слагаемое, то как раз получится  $\partial(d^p \frown [v_0, \dots, v_{p+q}])$ .  $\square$

Формула для  $\partial(d^p \frown c_{p+q})$  показывает, что сар-произведение определено для (ко)гомологий.

**Теорема 8.1.** Сар-произведение естественно в том смысле, что если  $f: |K| \rightarrow |L|$  — непрерывное отображение, то  $f_*(f^*\alpha \cap \beta) = \alpha \cap f_*(\beta)$ .

**Доказательство.** Требуемое равенство выполняется уже на уровне (ко)цепей:

$$\begin{aligned} f_*(f^*c^p \cap [v_0, \dots, v_{p+q}]) &= f_*(\langle f^*c^p, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle [v_0, \dots, v_q]) = \\ &= \langle f^*c^p, [v_q, \dots, v_{p+q}] \rangle f_*[v_0, \dots, v_q] = \\ &= \langle c^p, f_*[v_q, \dots, v_{p+q}] \rangle f_*[v_0, \dots, v_q] = \\ &= c^p \cap f_*[v_q, \dots, v_{p+q}]. \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 8.2.** Сар-произведение двойственно сир-произведению в том смысле, что

$$\langle \alpha^q, \beta^p \cap \gamma_{p+q} \rangle = \langle \alpha^q \cup \beta^p, \gamma_{p+q} \rangle.$$

**Доказательство.** Требуемое равенство выполняется уже на уровне (ко)цепей:

$$\begin{aligned} \langle c^q, c^p \cap [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle &= \langle c^q, \langle c^p, [v_q, \dots, v_{p+q}] \rangle [v_0, \dots, v_q] \rangle = \\ &= \langle c^q, [v_0, \dots, v_q] \rangle \langle c^p, [v_q, \dots, v_{p+q}] \rangle = \\ &= \langle c^q \cup c^p, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 8.3.** Сар-произведение и сир-произведение связаны формулой

$$\alpha^p \cap (\beta^q \cap \gamma_{p+q+r}) = (\alpha^p \cup \beta^q) \cap \gamma_{p+q+r}.$$

**Доказательство.** Требуемое равенство выполняется уже на уровне (ко)цепей. Если  $\gamma_{p+q+r} = [v_0, \dots, v_{p+q+r}]$ , то оба выражения равны

$$\langle \alpha^p, [v_r, \dots, v_{r+p}] \rangle \langle \beta^q, [v_{r+p}, \dots, v_{p+q+r}] \rangle [v_0, \dots, v_r]. \quad \square$$

В относительном случае аналогичное определение сар-произведения даёт отображение

$$\frown: H^p(K, L_1) \times H_{p+q}(K, L_1 \cup L_2) \rightarrow H_q(K, L_2).$$

Действительно, пусть симплекс  $[v_0, \dots, v_{p+q}]$  лежит в  $L_1 \cup L_2$ . Тогда он целиком лежит в  $L_1$  или в  $L_2$ . Если он лежит в  $L_1$ , то любая коцепь из  $C^p(K, L_1)$  принимает нулевое значение на симплексе  $[v_q, \dots, v_{p+q}]$ , а если он лежит в  $L_2$ , то симплекс  $[v_0, \dots, v_q]$  соответствует нулевому элементу группы  $C_q(K, L_2)$ .

Важное значение сар-произведения в топологии многообразий связано с тем, что определённый на с. 54 изоморфизм Пуанкаре  $H^{n-k}(M^n; R) \rightarrow H_k(M^n; R)$ , где  $M^n$  — замкнутое многообразие ( $R = \mathbb{Z}_2$ , если  $M^n$  неори-

ентируемо), с помощью сар-произведения описывается следующим образом.

**Теорема 8.4.** *Изоморфизм Пуанкаре имеет вид  $\alpha^{n-k} \mapsto \alpha^{n-k} \cap [M^n]$ , где  $[M^n]$  — фундаментальный класс многообразия  $M^n$ .*

**Доказательство.** Пусть  $K$  — триангуляция многообразия  $M^n$ ,  $K'$  — её барицентрическое подразделение. Занумеруем вершины комплекса  $K'$  так, чтобы наименьшие номера имели вершины комплекса  $K$ , за ними шли барицентры одномерных симплексов в  $K$ , затем барицентры двумерных симплексов и т. д. В качестве представителя гомологического класса  $[M^n]$  выберем сумму  $\sum \pm [v_0, \dots, v_n]$ , где суммирование ведётся по всем симплексам  $K'$ , вершины которых записаны в порядке возрастания их номеров; знак соответствует согласованности ориентаций симплекса и многообразия.

Нумерация вершин комплекса  $K'$  выбрана так, что любой симплекс  $[v_0, \dots, v_k]$  содержится в одном из  $k$ -мерных симплексов  $\sigma_i$ , входящих в  $K$ . Вершина  $v_k$  однозначно задаёт  $k$ -мерный симплекс  $\sigma_i$ . При этом  $(n-k)$ -мерная клетка  $\sigma_i^*$  представляется в виде  $\sum \pm [v_k, \dots, v_n]$ ; здесь вершины снова записаны в порядке возрастания номеров.

На уровне (ко)цепей при изоморфизме Пуанкаре цепи  $c_k = \sum a_i \sigma_i$  сопоставляется коцепь  $c^{n-k}$ , для которой  $\langle c^{n-k}, \sigma_i^* \rangle = a_i$ . Поэтому

$$\begin{aligned} c^{n-k} \cap \sum \pm [v_0, \dots, v_n] &= \sum \langle c^{n-k}, \pm [v_k, \dots, v_n] \rangle [v_0, \dots, v_k] = \\ &= \langle c^{n-k}, \sigma_i^* \rangle \sigma_i = \sum a_i \sigma_i = c_k, \end{aligned}$$

что и требовалось.  $\square$

Теперь можно объединить эти два подхода к изоморфизму Пуанкаре и извлечь из этого важные следствия:

1) отображение  $\alpha^{n-k} \mapsto \alpha^{n-k} \cap [M^n]$  является изоморфизмом группы  $H^{n-k}(M^n; R)$  на  $H_k(M^n; R)$ ;

2) сопоставление цепи  $c_k$  коцепи  $c^{n-k}$ , не инвариантное на уровне (ко)цепей, инвариантно на уровне (ко)гомологий.

Инвариантное определение изоморфизма Пуанкаре позволяет дать инвариантное определение индекса пересечения циклов, представляющих гомологические классы циклов  $\alpha_k \in H_k(M^n; R)$  и  $\beta_{n-k} \in H_{n-k}(M^n; R)$ . А именно, пусть  $\alpha_k = \alpha^{n-k} \cap [M^n]$  и  $\beta_{n-k} = \beta^k \cap [M^n]$ . Тогда

$$\langle \alpha_k, \beta_{n-k} \rangle = (\alpha^{n-k} \cup \beta^k) \cap [M^n] = \langle \alpha^{n-k} \cup \beta^k, [M^n] \rangle. \quad (1)$$

Действительно, пусть на уровне цепей  $\alpha_k = \sum a_i \sigma_i$  и  $\beta_{n-k} = \sum b_i \sigma_i^*$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\alpha^{n-k} \cup \beta^k) \cap [M^n] &= \alpha^{n-k} \cap (\beta^k \cap [M^n]) = \alpha^{n-k} \cap \beta_{n-k} = \\ &= \langle \alpha^{n-k}, \sum b_i \sigma_i^* \rangle = \sum b_i \langle \alpha^{n-k}, \sigma_i^* \rangle = \sum b_i a_i. \end{aligned}$$

Формулу (1) можно переписать по-другому, чтобы выразить сир-произведение через индекс пересечения. А именно, пусть  $\Lambda$  — такой элемент из  $H^n(M^n; R)$ , что  $\Lambda \cap [M^n] = 1 \in H_0(M^n; R) \cong R$ . Тогда

$$\alpha^{n-k} \cup \beta^k = \langle \alpha_k, \beta_{n-k} \rangle \Lambda. \quad (2)$$

Из формулы (1) и косокоммутативности сир-произведения следует, что

$$\langle \alpha_k, \beta_{n-k} \rangle = (-1)^{k(n-k)} \langle \beta_{n-k}, \alpha_k \rangle. \quad (3)$$

Формула (3) очевидна на уровне цепей, если в качестве представителей классов  $\alpha_k$  и  $\beta_{n-k}$  выбраны цепи из цепных комплексов  $C_k(K)$  и  $C_{n-k}(K^*)$ . Поэтому формула (3) следует также непосредственно из инвариантности определения индекса пересечения.

Известная из линейной алгебры формула  $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$  показывает, что если  $\dim V = k$ ,  $\dim W = l$  и пространства  $V$  и  $W$  расположены в  $n$ -мерном пространстве, то  $\dim(V \cap W) \geq k + l - n$ . Если  $\dim(V \cap W) = k + l - n$ , то говорят, что подпространства  $V$  и  $W$  *трансерсальны*. В соответствии с этой терминологией будем говорить, что  $k$ -мерный и  $l$ -мерный циклы в  $n$ -мерном многообразии *трансерсальны*, если для каждой пары симплексов, входящих в разные циклы, их пересечение либо пусто, либо имеет размерность  $k + l - n$ . В частности, циклы дополнительной размерности трансерсальны тогда и только тогда, когда их пересечение состоит из конечного числа точек.

Формула (1) имеет следующую геометрическую интерпретацию: если у нас есть два трансерсальных цикла  $\alpha_k$  и  $\beta_{n-k}$  дополнительной размерности, то когомологический класс, двойственный их пересечению, — это сир-произведение классов  $\alpha^{n-k}$  и  $\beta^k$ , двойственных  $\alpha_k$  и  $\beta_{n-k}$ . В такой формулировке утверждение верно для произвольных трансерсальных циклов, а не только для циклов дополнительной размерности. Докажем это. Пусть есть циклы  $\alpha_k$  и  $\beta_l$ ; им двойственны коциклы  $\alpha^{n-k}$  и  $\beta^{n-l}$ . Тогда

$$\langle \alpha^{n-k} \cup \beta^{n-l}, [v_0, \dots, v_{2n-k-l}] \rangle = \langle \alpha^{n-k}, [v_0, \dots, v_{n-k}] \rangle \cdot \langle \beta^{n-l}, [v_{n-k}, \dots, v_{2n-k-l}] \rangle.$$

Пусть  $\alpha_k = \sum x_i \sigma_i^k$  и  $\beta_l = \sum y_j \sigma_j^l$ . Тогда  $\alpha^{n-k} = \sum x_i (\sigma_i^k)^*$  и  $\beta^{n-l} = \sum y_j (\sigma_j^l)^*$ . Далее, для трансерсальных циклов  $\alpha_k \cap \beta_l = \gamma_{k+l-n} = \sum \alpha_i \beta_j \sigma_i^k \cap \sigma_j^l$ , поэтому  $\gamma^{2n-k-l} = \sum \alpha_i \beta_j (\sigma_i^k \cap \sigma_j^l)^*$ . Таким образом, нужно проверить, что если  $[v_0, \dots, v_{n-k}] = (\sigma^k)^*$  и  $[v_{n-k}, \dots, v_{2n-k-l}] = (\sigma^l)^*$ , то  $[v_0, \dots, v_{2n-k-l}] = (\sigma^k \cap \sigma^l)^*$ . В барицентрических координатах клетка  $\sigma^k$  задаётся уравнениями  $x_0 = x_1 = \dots = x_{n-k}$ , а клетка  $\sigma^l$  задаётся уравнениями  $x_{n-k} = \dots = x_{2n-k-l}$ . Поэтому клетка  $\sigma^k \cap \sigma^l$  задаётся уравнениями  $x_0 = x_1 = \dots = x_{2n-k-l}$ . Теперь уже ясно, что  $[\sigma^k \cap \sigma^l]^*$  — это симплекс  $(v_0, \dots, v_{2n-k-l})$ .

Задача 8.1. а) Вычислите кольцо когомологий  $S^k \times S^k$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ .

б) Найдите индекс самопересечения диагонали в  $S^k \times S^k$ .

Задача 8.2. Докажите, что при положительных  $m$  и  $n$  любое отображение  $f: S^{n+m} \rightarrow S^n \times S^m$  индуцирует тривиальное отображение  $f^*: H^{n+m}(S^n \times S^m) \rightarrow H^{n+m}(S^{n+m})$ .

### 8.2. Кольца когомологий многообразий

Изоморфизм Пуанкаре и формула

$$\alpha^{n-k} \cup \beta^k = \langle\langle \alpha_k, \beta_{n-k} \rangle\rangle \Lambda \tag{1}$$

существенно облегчают вычисление колец когомологий для многообразий (здесь  $\Lambda \in H^n(M^n; \mathbb{R})$  — элемент, для которого  $\Lambda \cap [M^n] = 1$ , т. е.  $\langle \Lambda, [M^n] \rangle = 1$ ). Например, те вычисления, которые мы провели для замкнутых двумерных поверхностей, теперь становятся почти очевидными, поскольку нужно лишь посмотреть на взаиморасположение двойственных циклов.

Для сферы с  $n$  ручками базисные циклы  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  и  $\beta_1, \dots, \beta_n$  изображены на рис. 23 (а). Попарно пересекаются только циклы с одинаковыми номерами. Но рис. 23 (б) показывает, что для цикла  $\alpha$  есть цикл  $\alpha'$ , который ему гомологичен и с ним не пересекается.

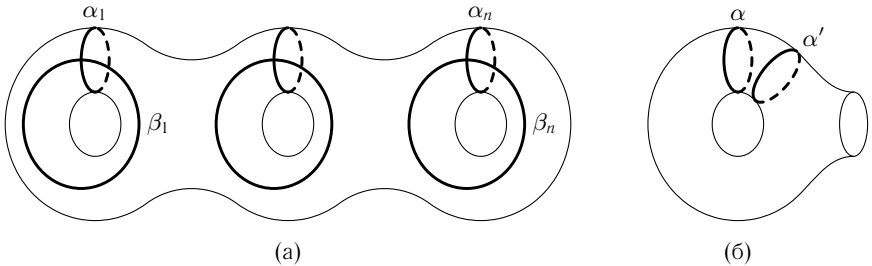


Рис. 23. Базисные циклы на сфере с ручками

Для листа Мёбиуса, вклеенного в сферу, базисный цикл  $\alpha$  представляется диагональю (рис. 24). Ему гомологичен цикл  $\alpha'$ , который трансверсально пересекает  $\alpha$  ровно в одной точке. Для проективной плоскости  $\alpha$  и  $\alpha'$  соответствуют двум проективным прямым.

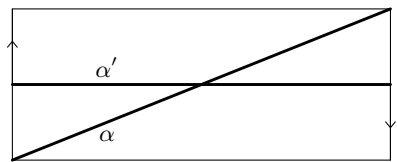


Рис. 24. Базисный цикл на листе Мёбиуса

Важную информацию о строении кольца когомологий замкнутого многообразия даёт следующее утверждение, которое нами уже фактически было доказано.

**Теорема 8.5.** Пусть  $M^n$  — замкнутое многообразие,  $F$  — некоторое поле, причём  $F = \mathbb{Z}_2$ , если  $M^n$  неориентируемо. Тогда в пространствах  $H^{n-k}(M^n; F)$  и  $H^k(M^n; F)$  можно выбрать базисы  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  и  $\beta_1, \dots, \beta_m$  так, что  $\alpha_i \cup \beta_j = \delta_{ij}\Lambda$ , где  $\Lambda$  — базисный элемент одномерного пространства  $H^n(M^n; F)$ .

**Доказательство.** Изоморфизм Пуанкаре и формула (1) показывают, что эквивалентное утверждение таково: В пространствах  $H_k(M^n; F)$  и  $H_{n-k}(M^n; F)$  можно выбрать базисы  $\alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*$  и  $\beta_1^*, \dots, \beta_m^*$  так, что  $\langle\langle \alpha_i^*, \beta_j^* \rangle\rangle = \delta_{ij}$ . Это утверждение совпадает со следствием теоремы 5.6 на с. 56.  $\square$

Аналогичные рассуждения с использованием теоремы 5.5 доказывают следующее утверждение.

**Теорема 8.6.** Пусть  $M^n$  — замкнутое ориентируемое многообразие. Тогда в свободных абелевых группах  $H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z})/T^{n-k}$  и  $H^k(M^n; \mathbb{Z})/T^k$ , где  $T^{n-k}$  и  $T^k$  — подгруппы кручения, можно выбрать базисы  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  и  $\beta_1, \dots, \beta_m$  так, что  $\alpha_i \cup \beta_j = \delta_{ij}\Lambda$ , где  $\Lambda$  — образующая группы  $H^n(M^n; \mathbb{Z})$ .

С помощью теорем 8.5 и 8.6 можно вычислить кольца когомологий  $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$  и  $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ .

**Теорема 8.7.** При  $0 \leq k \leq n$  группа  $H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$  содержит единственный ненулевой элемент  $\alpha^k$ , причём

$$\alpha^k \cup \alpha^l = \begin{cases} \alpha^{k+l} & \text{при } k+l \leq n; \\ 0 & \text{при } k+l > n. \end{cases}$$

**Доказательство.** Мы уже знаем, что  $H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$  при  $0 \leq k \leq n$ , поэтому  $H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$  при  $0 \leq k \leq n$ . Остаётся проверить, что  $\alpha^k \cup \alpha^l \neq 0$  при  $k+l \leq n$ . Из теоремы 8.5 следует, что  $\alpha^k \cup \alpha^l \neq 0$  при  $k+l = n$ , поскольку  $\alpha^k$  и  $\alpha^l$  — единственные ненулевые элементы групп  $H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$  и  $H^l(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ . Если же  $k+l = m < n$ , то можно воспользоваться тем, что гомоморфизм  $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ , индуцированный естественным вложением, является изоморфизмом колец в размерностях, не превосходящих  $m$ . В кольце  $H^*(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$  произведение  $\alpha^k \cup \alpha^l$  отлично от нуля, поэтому оно отлично от нуля и в кольце  $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ .  $\square$

**Теорема 8.8.**  $H^k(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  при  $k = 0, 2, 4, \dots, 2n$ , а при всех остальных  $k$  группа когомологий нулевая. При этом можно выбрать образующие  $\alpha^2, \alpha^4, \dots, \alpha^{2n}$  так, что  $\alpha^{2k} \cup \alpha^{2l} = \alpha^{2(k+l)}$  при  $k+l \leq n$ .

**Доказательство.** Группы когомологий легко вычисляются по группам гомологий с помощью формулы универсальных коэффициентов.

Группы когомологий  $CP^n$  не имеют кручения, поэтому теорема 8.6 применяется к самим группам когомологий. Пусть  $\beta^2, \beta^4, \dots, \beta^{2n}$  — образующие групп когомологий. Согласно теореме 8.6 мы имеем  $\beta^{2k} \cup \beta^{2(n-k)} = \pm \beta^{2n}$ . При  $k+l=m < n$  аналогично случаю  $RP^n$  можно доказать, что  $\beta^{2k} \cup \beta^{2l} = \pm \beta^{2m}$ . Теперь образующие с правильными знаками можно выбрать так:  $\alpha^2 = \beta^2, \alpha^4 = \beta^2 \cup \beta^2 = \pm \beta^4, \alpha^6 = \beta^2 \cup \beta^2 \cup \beta^2 = \pm \beta^6, \dots$   $\square$

**Задача 8.3.** а) Докажите, что если  $m > n$ , то любое непрерывное отображение  $f: RP^m \rightarrow RP^n$  индуцирует нулевое отображение  $f_*: H^k(RP^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^k(RP^m; \mathbb{Z}_2)$  для всех  $k \geq 1$ .

б) Докажите, что если  $m > n$ , то любое непрерывное отображение  $f: RP^m \rightarrow RP^n$  индуцирует нулевое отображение  $f_*: H_k(RP^m; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_k(RP^n; \mathbb{Z}_2)$  для всех  $k \geq 1$ .

**Задача 8.4.** Докажите, что если  $m > n \geq 1$ , то не существует непрерывного отображения  $g: S^m \rightarrow S^n$ , для которого  $g(-x) = -g(x)$  для всех  $x \in S^n$  (*теорема Борсука—Улама*).

**Задача 8.5.** а) Докажите, что  $RP^n$  и  $CP^n$  нельзя представить в виде объединения  $n$  стягиваемых подкомплексов.

б) Представьте  $RP^n$  и  $CP^n$  в виде объединения  $n+1$  стягиваемых подкомплексов.

**Задача 8.6.** Пусть  $f: CP^n \rightarrow CP^n$  — непрерывное отображение. Докажите, что  $\Lambda(f) = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n$ , где  $\lambda \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 8.7.** Докажите, что если  $n$  чётно, то любое непрерывное отображение  $f: CP^n \rightarrow CP^n$  имеет неподвижную точку.

**Задача 8.8.** Докажите, что степень отображения  $f: CP^n \rightarrow CP^n$  имеет вид  $\lambda^n$ , где  $\lambda \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 8.9.** а) Докажите, что при чётном  $n$  не существует диффеоморфизма  $f: CP^n \rightarrow CP^n$ , обращающего ориентацию.

б) Постройте диффеоморфизм  $CP^{2n+1} \rightarrow CP^{2n+1}$ , обращающий ориентацию.

**Задача 8.10.** Докажите, что пространства  $CP^2$  и  $S^2 \vee S^4$  гомотопически не эквивалентны, и выведите из этого, что расслоение Хопфа  $S^3 \rightarrow S^2$  не гомотопно постоянному отображению.

### 8.3. Два примера

Здесь мы приведём два примера, показывающие, что *кольца* когомологий не определяются теми данными, которыми полностью задаются *группы* когомологий. Во-первых,  $CW$ -комплексы с изоморфными клеточными цепными комплексами могут иметь неизоморфные кольца когомологий. С этим связана необходимость обращаться непосредственно к симплициальной структуре при определении умножения в когомологиях; клеточной



структуры\*) для этих целей не достаточно. Во-вторых, кольцо когомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  не определяет колец когомологий с другими коэффициентами: пространства с изоморфными кольцами когомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  могут иметь неизоморфные кольца когомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ .

Мы будем пользоваться тем, что для любого кольца коэффициентов  $H^i(X \vee Y) = H^i(X) \oplus H^i(Y)$  при  $i > 0$ , причём  $(x + y) \cup (x' + y') = x \cup x' + y \cup y'$  для когомологических классов положительной размерности (задача 7.5).

**Пример 8.1.** *Клеточные цепные комплексы для тора  $T^2$  и для пространства  $S^1 \vee S^1 \vee S^2$  изоморфны, но кольца когомологий этих пространств не изоморфны.*

**Доказательство.** Клеточные цепные комплексы для обоих пространств имеют вид

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0;$$

все граничные гомоморфизмы нулевые.

Для пространства  $S^1 \vee S^1 \vee S^2$  одномерные когомологии изоморфны  $H^1(S^1 \vee S^1)$ , поскольку  $H^1(S^2) = 0$ . Поэтому произведение любых одномерных классов коциклов равно нулю. А для тора произведение образующих группы  $H^1(T^2)$  не равно нулю.  $\square$

**Задача 8.11.** Докажите, что пространства  $S^m \times S^n$  и  $S^m \vee S^n \vee S^{n+m}$  имеют одинаковые группы когомологий, но кольца когомологий у них разные.

**Пример 8.2.** *Кольца когомологий пространств  $\mathbb{R}P^3$  и  $\mathbb{R}P^2 \vee S^3$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  изоморфны, а с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  не изоморфны.*

**Доказательство.** Для обоих пространств одномерные группы когомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  нулевые, поэтому умножение в когомологиях тривиальное. В кольце когомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  пространства  $\mathbb{R}P^3$  есть элемент  $\alpha$ , для которого  $\alpha \cup \alpha \cup \alpha \neq 0$ . А в кольце когомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  пространства  $\mathbb{R}P^2 \vee S^3$  такого элемента нет. Действительно, там есть только такие ненулевые элементы:  $\alpha' \in H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$ ,  $\alpha' \cup \alpha' \in H^2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$  и  $\beta \in H^3(S^3; \mathbb{Z}_2)$ .  $\square$

## 8.4. Изоморфизм Лефшеца

Изоморфизм Лефшеца обобщает изоморфизм Пуанкаре на случай компактных ориентируемых многообразий с краем. Он представляет собой изоморфизм между группами  $H^{n-k}(M^n)$  и  $H_k(M^n, \partial M^n)$  и между группа-

---

\*) Под клеточной структурой здесь подразумевается задание только граничного гомоморфизма, т.е. задание клеточного цепного комплекса. Конечно, если задан не только граничный гомоморфизм, но и характеристические отображения клеток, то  $CW$ -комплекс задан с точностью до гомеоморфизма, а тем самым задано и его кольцо когомологий.

ми  $H^{n-k}(M^n, \partial M^n)$  и  $H_k(M^n)$ . Оба изоморфизма задаются одной и той же формулой  $x \mapsto x \cap [M^n]$ , где  $[M^n] \in H_n(M^n, \partial M^n)$  — фундаментальный класс. Дело в том, что сар-умножение

$$\frown: H^{n-k}(K, L_1) \times H_n(K, L_1 \cup L_2) \rightarrow H_k(K, L_2),$$

где  $K = M^n$  и  $L_1 \cup L_2 = \partial M^n$ , можно задать двумя разными способами. Во-первых, можно положить  $L_1 = \emptyset$  и  $L_2 = \partial M^n$ , а во-вторых, можно положить  $L_1 = \partial M^n$  и  $L_2 = \emptyset$ .

При доказательстве теоремы об изоморфизме Лефшеца нам понадобится следующее утверждение, которое часто бывает полезно при работе с многообразиями с краем.

**Теорема 8.9** (о воротнике). *Пусть  $M^n$  — компактное многообразие с краем  $\partial M^n$ . Тогда существует гладкое вложение  $F: \partial M^n \times [0, 1] \rightarrow M^n$ , для которого  $F(x, 0) = x$  при  $x \in \partial M^n$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим координатные окрестности в  $M^n$  и выберем среди них конечный набор  $U_1, \dots, U_m$ , покрывающий  $\partial M^n$ . Пусть  $\{\lambda_i\}$  — гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию  $\{U_i \cap \partial M^n\}$ . Множество  $U_i$  можно отождествить с подмножеством в  $\mathbb{R}^n$  так, чтобы  $\partial M^n$  задавалось уравнением  $x_1 = 0$  и вектор  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$  был направлен внутрь  $M^n$ . Рассмотрим на множестве  $U_i$  векторное поле  $w_i(x_1, \dots, x_n) = \lambda_i(x_2, \dots, x_n)e_i$ . На множестве  $U = \bigcup_{i=1}^m U_i$  определено векторное поле  $\sum_{i=1}^m w_i$ ; это векторное поле нигде не обращается в нуль и на  $\partial M^n$  направлено внутрь  $M^n$ . Пусть  $H_t(x)$  — сдвиг точки  $x$  за время  $t$  по траектории этого векторного поля. Из компактности многообразия  $\partial M^n$  следует, что можно выбрать  $\varepsilon > 0$  так, что сдвиг  $H_t(x)$  будет определён для всех  $x \in \partial M^n$  и всех  $t \in [0, \varepsilon]$ . Отображение  $F(x, t) = H_t(x)$  является требуемым гладким вложением  $\partial M^n \times [0, \varepsilon] \rightarrow M^n$ .  $\square$

Пусть  $M$  — компактное многообразие с краем  $\partial M$ . Рассмотрим замкнутое многообразие  $\tilde{M}$ , которое получено из двух экземпляров многообразия  $M$  отождествлением соответствующих точек их краёв; эти экземпляры будем обозначать  $M$  и  $M'$ . Из теоремы о воротнике следует, что в  $\tilde{M}$  можно выбрать подмногообразие  $N \approx \partial M \times [-1, 1]$  ( $\partial M$  соответствует подмножеству  $\partial M \times \{0\}$ ) так, что замыкание множества  $\tilde{M} \setminus N$  состоит из двух непересекающихся подмножеств  $L$  и  $L'$ , гомеоморфных  $M$  (рис. 25). Многообразие  $\tilde{M}$  можно триангули-

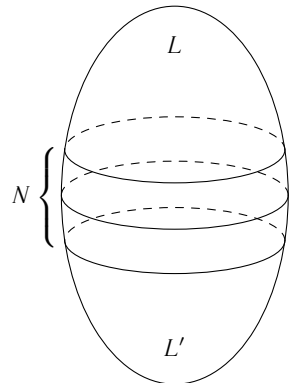


Рис. 25. Многообразие  $\tilde{M}$

ровать так, чтобы его подмножества  $N$ ,  $L$  и  $L'$  были подкомплексами.

Запишем относительную последовательность Майера—Вьеториса

$$\dots \longrightarrow H_k(\tilde{M}, L \cap L') \longrightarrow H_k(\tilde{M}, L') \oplus H_k(\tilde{M}, L) \longrightarrow H_k(\tilde{M}, L \cup L') \longrightarrow \dots$$

В этой последовательности  $H_k(\tilde{M}, L \cap L') \cong H_k(\tilde{M})$ , поскольку  $L \cap L' = \emptyset$ . Чтобы преобразовать остальные группы гомологий, мы воспользуемся изоморфизмом  $H_*(A, B) \cong H_*(A \cup C, B \cup C)$ , где  $A \cup C$  — симплициальный комплекс,  $A$  и  $C$  — его подкомплексы,  $B$  — подкомплекс в  $A$ . Этот изоморфизм очевиден уже на уровне относительных цепей.

Ясно, что пары  $(\tilde{M}, M')$  и  $(\tilde{M}, L')$  гомотопически эквивалентны и  $(\tilde{M}, M') = (M \cup M', \partial M \cup M')$ , поэтому  $H_k(\tilde{M}, L') \cong H_k(M, \partial M)$ . Кроме того,  $(\tilde{M}, L \cup L') = (N \cup (L \cup L'), \partial N \cup (L \cup L'))$ , поэтому  $H_k(\tilde{M}, L \cup L') \cong \cong H_k(N, \partial N)$ . Покажем, что  $H_k(N, \partial N) \cong H_{k-1}(\partial M)$  при  $k > 1$ . Если к  $N$  приклеить два экземпляра конусов над  $\partial M$ , то получится симплициальный комплекс, гомеоморфный  $\Sigma(\partial M)$ . Поэтому  $H_k(N, \partial N) \cong H_k(\Sigma(\partial M), C \cup C')$ , где  $C' \approx C = C(\partial M)$ . Точная последовательность пары  $(\Sigma(\partial M), C \cup C')$  показывает, что  $H_k(N, \partial N) \cong H_k(\Sigma(\partial M))$  при  $k > 1$ . Кроме того,  $H_k(\Sigma(\partial M)) \cong \cong H_{k-1}(\partial M)$ .

В новой точной последовательности

$$\longrightarrow H_k(\tilde{M}) \longrightarrow H_k(M, \partial M) \oplus H_k(M', \partial M') \longrightarrow H_{k-1}(\partial M) \longrightarrow H_{k-1}(\tilde{M}) \longrightarrow$$

гомоморфизм  $H_k(M, \partial M) \rightarrow H_{k-1}(\partial M)$  представляет собой композицию гомоморфизмов

$$H_k(M, \partial M) \longrightarrow H_k(N, \partial N) \longrightarrow H_k(\Sigma(\partial M), C \cup C') \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(\partial M),$$

поэтому он совпадает с гомоморфизмом  $\partial_*$ , который сопоставляет относительному циклу его абсолютную границу. Остальные два гомоморфизма индуцированы включениями.

Запишем ещё одну последовательность Майера—Вьеториса, на этот раз абсолютную:

$$\dots \longrightarrow H^{n-k}(\tilde{M}) \longrightarrow H^{n-k}(M) \oplus H^{n-k}(M') \longrightarrow H^{n-k}(\partial M) \longrightarrow \dots$$

Эту точную последовательность можно отобразить в первую точную последовательность следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow H^{n-k}(\tilde{M}) & \longrightarrow & H^{n-k}(M) \oplus H^{n-k}(M') & \longrightarrow & H^{n-k}(\partial M) & \rightarrow & H^{n-k+1}(\tilde{M}) \rightarrow \\ & & \downarrow \cap [\tilde{M}] & & \downarrow \cap [\partial M] & & \downarrow \cap [\tilde{M}] \\ \rightarrow H_k(\tilde{M}) & \longrightarrow & H_k(M, \partial M) \oplus H_k(M', \partial M') & \longrightarrow & H_{k-1}(\partial M) & \longrightarrow & H_{k-1}(\tilde{M}) \rightarrow \end{array}$$

В полученной диаграмме левый квадрат коммутативен, потому что все встречающиеся там операции (в том числе и переход от  $[\tilde{M}]$  к  $[M]$  и  $[M']$ ) индуцированы включениями и ограничениями.

Средний квадрат тоже коммутативен, потому что если  $z^{n-k}$  — коцикл, то  $\partial(z^{n-k} \frown [M]) = (-1)^k(\delta z^{n-k} \frown [M]) + z^{n-k} \frown \partial[M] = z^{n-k} \frown \partial[M]$ .

В правом квадрате верхнее отображение  $H^{n-k}(\partial M) \rightarrow H^{n-k+1}(\tilde{M})$  устроено следующим образом. Возьмём коцикл  $z^{n-k} \in C^{n-k}(\partial M)$ . Ему можно сопоставить коцепь  $c^{n-k} \in C^{n-k}(M)$ , ограничение которой на  $\partial M$  совпадает с  $z^{n-k}$ . Рассмотрим в  $C^{n-k+1}(\tilde{M})$  коцепь  $d^{n-k+1}$ , которая совпадает с  $\delta c^{n-k}$  на  $M$  и равна нулю вне  $M$  (это можно сделать, потому что  $\delta c^{n-k}$  обращается в нуль на  $\partial M$ ). Искомое отображение имеет вид  $[z^{n-k}] \mapsto [d^{n-k+1}]$ . Нижнее отображение  $i_*: H_{k-1}(\partial M) \rightarrow H_{k-1}(\tilde{M})$  в этом квадрате индуцировано включением. Ясно, что  $d^{n-k+1} \frown [\tilde{M}] = \delta c^{n-k} \frown [M]$  и  $i_*(z^{n-k} \frown [\partial M]) = i_*(i^*(c^{n-k}) \frown [\partial M]) = c^{n-k} \frown i_*[\partial M] = c^{n-k} \frown [\partial M]$ . Наконец, равенство  $\partial(c^{n-k} \frown [M]) = (-1)^k(\delta c^{n-k} \frown [M]) + c^{n-k} \frown \partial[M]$  показывает, что цепи  $(-1)^{k+1}\delta c^{n-k} \frown [M]$  и  $c^{n-k} \frown \partial[M]$  отличаются на границу, т. е. они лежат в одном классе гомологий. Таким образом, правый квадрат коммутативен с точностью до знака.

Мы построили диаграмму, которая коммутативна с точностью до знака. Отображения  $\frown[\tilde{M}]$  и  $\frown[\partial M]$  в этой диаграмме являются изоморфизмами в силу теоремы об изоморфизме Пуанкаре. Поэтому из 5-леммы следует, что отображение  $H^{n-k}(M) \xrightarrow{\frown[M]} H_k(M, \partial M)$  является изоморфизмом.

Аналогично можно построить диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^{n-k+1}(\partial M) & \longrightarrow & H^{n-k}(M, \partial M) \oplus H^{n-k}(M', \partial M) & \longrightarrow & H^{n-k}(\tilde{M}) & \longrightarrow \\ & \downarrow \frown[\partial M] & & \downarrow \frown[M] \oplus \frown[M'] & & \downarrow \frown[\tilde{M}] & \\ \longrightarrow & H_k(\partial M) & \longrightarrow & H_k(M) \oplus H^k(M') & \longrightarrow & H_k(\tilde{M}) & \longrightarrow \end{array}$$

и показать, что отображение  $H^{n-k}(M, \partial M) \xrightarrow{\frown[M]} H_k(M)$  является изоморфизмом. В результате получаем следующее утверждение.

**Т е о р е м а 8.10** (изоморфизм Лефшеца [Le2]). *Пусть  $M^n$  — компактное ориентируемое многообразие с краем  $\partial M^n$ . Тогда отображения  $H^{n-k}(M) \xrightarrow{\frown[M]} H_k(M, \partial M)$  и  $H^{n-k}(M, \partial M) \xrightarrow{\frown[M]} H_k(M)$  являются изоморфизмами.*

Такие же изоморфизмы имеют место и для (ко)гомологий с коэффициентами в  $R$ , где  $R$  — аддитивная группа коэффициентов некоторого кольца.

Для неориентируемого многообразия такие изоморфизмы имеют место в случае коэффициентов в  $\mathbb{Z}_2$ .

**З а д а ч а 8.12.** Докажите, что если многообразие  $M^n$  стягиваемо, то его край является  $(n-1)$ -мерной гомологической сферой, т. е.  $H_k(\partial M^n) \cong \cong H_k(S^{n-1})$  для всех  $k$ .

**Задача 8.13.** Пусть  $M^3$  — компактное ориентируемое многообразие с непустым краем  $\partial M^3$ . Докажите, что для гомологий с коэффициентами в поле  $\mathbb{Q}$  размерность образа отображения  $\partial: H_2(M^3, \partial M^3) \rightarrow H_1(\partial M^3)$  равна половине размерности пространства  $H_1(\partial M^3)$ .

## 8.5. Двойственность Александера

Из теоремы Лефшеца об изоморфизме можно вывести ещё одну важную теорему двойственности.

**Теорема 8.11** (двойственность Александера [A11], [A12]). Пусть  $M \subsetneq S^n$  — замкнутое подмногообразие. Тогда  $\tilde{H}^k(M) \cong \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus M)$  и аналогично  $\tilde{H}_k(M) \cong \tilde{H}^{n-k-1}(S^n \setminus M)$  при  $0 \leq k \leq n-1$ .

**Доказательство.** Начнём с того, что докажем изоморфизм  $H^k(S^n, M) \cong H_{n-k}(S^n \setminus M)$ . Выколов из  $S^n$  точку  $x \notin M$ , отождествим  $S^n \setminus \{x\}$  с  $\mathbb{R}^n$  и применим к  $M \subset \mathbb{R}^n$  теорему о трубчатой окрестности. Пусть  $M_\varepsilon$  — открытая трубчатая окрестность многообразия  $M$ . Тогда пара  $(S^n, M)$  гомотопически эквивалентна  $(S^n, M_\varepsilon)$ , а пространство  $S^n \setminus M$  гомотопически эквивалентно  $S^n \setminus M_\varepsilon$ . Согласно изоморфизму Лефшеца  $H^k(S^n \setminus M_\varepsilon, \partial M_\varepsilon) \cong H_{n-k}(S^n \setminus M_\varepsilon)$ . Кроме того,  $H^k(S^n \setminus M_\varepsilon, \partial M_\varepsilon) \cong \cong H^k(S^n, M_\varepsilon) \cong H^k(S^n, M)$  и  $H_{n-k}(S^n \setminus M_\varepsilon) \cong H_{n-k}(S^n \setminus M)$ .

Чтобы получить первый из требуемых изоморфизмов, рассмотрим точную последовательности пары  $(S^n, M)$ :

$$\tilde{H}^k(S^n) \longrightarrow \tilde{H}^k(M) \xrightarrow{\delta^*} H^{k+1}(S^n, M) \longrightarrow \tilde{H}^{k+1}(S^n).$$

Если  $k$  отлично от  $n-1$ , то  $\tilde{H}^k(S^n) = \tilde{H}^{k+1}(S^n) = 0$ , поэтому  $\delta^*$  — изоморфизм. Следовательно,  $\tilde{H}^k(M) \cong H^{k+1}(S^n, M) \cong H_{n-k-1}(S^n \setminus M)$ ; здесь  $n-k-1 \neq 0$ , поэтому  $H_{n-k-1} \cong \tilde{H}_{n-k-1}$ .

В случае, когда  $k = n-1$ , рассматриваемая точная последовательность принимает вид

$$0 \longrightarrow \tilde{H}^{n-1}(M) \xrightarrow{\delta^*} H^n(S^n, M) \xrightarrow{i^*} H^n(S^n) \cong \mathbb{Z}.$$

Здесь гомоморфизм  $i^*$  индуцирован включением пар  $i: (S^n, \emptyset) \rightarrow (S^n, M)$ . Рассмотрим также включение  $j: (S^n \setminus M) \rightarrow S^n$  и индуцированный им гомоморфизм нульмерных гомологий. Гомоморфизмы  $i^*$  и  $j_*$  входят в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^n(S^n, M) & \xrightarrow{i^*} & H^n(S^n) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_0(S^n \setminus M) & \xrightarrow{j_*} & H_0(S^n), \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки — изоморфизмы Лефшеца и Пуанкаре. Эта диаграмма коммутативна с точностью до знака, поэтому  $\text{Ker } i^* \cong \text{Ker } j_*$ . Гомоморфизм  $p_*: H_0(S^n \setminus M) \rightarrow H_0(*)$ , где  $*$  — точка из  $S^n \setminus M$ , можно представить в виде композиции  $H_0(S^n \setminus M) \xrightarrow{j_*} H_0(S^n) \xrightarrow{\cong} H_0(*)$ , поэтому  $\tilde{H}_0(S^n \setminus M) = \text{Ker } p_* = \text{Ker } j_*$ . В итоге получаем  $\tilde{H}^{n-1}(M) \cong \text{Im } \delta^* = \text{Ker } i^* \cong \text{Ker } j_* = \tilde{H}_0(S^n \setminus M)$ .

Второй из требуемых изоморфизмов доказывается аналогично.  $\square$

**С л е д с т в и е 1.** Если  $L$  — образ при вложении в  $S^3$  несвязного многообразия, состоящего из  $n$  окружностей, то  $H_1(S^3 \setminus L) \cong H^1(L) \cong \mathbb{Z}^n$  и  $H_2(S^3 \setminus L) \cong \tilde{H}^0(L) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ .

**С л е д с т в и е 2 [Br6].** Пусть  $M^{n-1} \subset S^n$  — связное замкнутое подмногообразие. Тогда  $M^{n-1}$  ориентируемо и  $S^n \setminus M^{n-1}$  состоит из двух связных компонент.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно двойственности Александера имеем  $H^{n-1}(M^{n-1}) \cong \tilde{H}_0(S^n \setminus M^{n-1})$ . Если  $M^{n-1}$  — связное замкнутое неориентируемое многообразие, то  $H^{n-1}(M^{n-1}) \cong \mathbb{Z}_2$  (теорема 5.4 на с. 55). С другой стороны, группа  $\tilde{H}_0(S^n \setminus M^{n-1})$  — свободная абелева. Поэтому многообразие  $M^{n-1}$  ориентируемо, а значит,  $H^{n-1}(M^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ . Изоморфизм  $\tilde{H}_0(S^n \setminus M^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  означает, что  $S^n \setminus M^{n-1}$  состоит из двух линейно связных компонент.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Двойственность Александера имеет место не только для подмногообразия, но и для произвольного подкомплекса  $K \subsetneq S^n$  (см. теорему 17.7).

**З а д а ч а 8.14.** Предположим, что в сферу  $S^n$ ,  $n \geq 3$ , вложено  $m$  парно непересекающихся сфер  $S^{n-2}$ . Пусть  $X$  — их дополнение. Вычислите гомологии пространства  $X$ .

**З а д а ч а 8.15.** Сфера  $S^p$  произвольно вложена в сферу  $S^{n+1}$ . Докажите, что пространство  $X = S^{n+1} \setminus S^p$  имеет такие же гомологии, как сфера  $S^{n-p}$ .

**З а д а ч а 8.16.** Сферы  $S^p$  и  $S^q$  произвольно вложены в сферу  $S^{n+1}$ . Докажите, что пространство  $X = S^{n+1} \setminus (S^p \sqcup S^q)$  имеет такие же гомологии, как  $S^{n-p} \vee S^{n-q} \vee S^n$ .

### Коэффициент зацепления и умножение в когомологиях

Коэффициент зацепления можно определить не только для окружностей, вложенных в  $S^3$ , но и для связных замкнутых ориентированных многообразий  $M_1^p$  и  $M_2^q$ , вложенных в  $S^n$ , где  $n = p + q + 1$ . Для этого нужно почти дословно повторить определение, приведённое на с. 57. А именно, рассмотрим фундаментальные циклы  $[M_1^p]$  и  $[M_2^q]$  как циклы в  $S^n$ . Тривиальность гомологий сферы  $S^n$  в размерности  $p$  влечёт, что

существует цепь  $W_1^{p+1}$ , для которой  $\partial W_1^{p+1} = [M_1^p]$ . Определим коэффициент зацепления  $\text{lk}(M_1^p, M_2^q)$  как индекс пересечения  $\langle\langle W_1^{p+1}, [M_2^q] \rangle\rangle$ . Этот индекс пересечения не зависит от выбора цепи  $W_1^{p+1}$ ; это доказывается точно так же, как и для окружностей, вложенных в  $S^3$ . Если мы возьмём цепь  $W_2^{q+1}$ , для которой  $\partial W_2^{q+1} = [M_2^q]$ , и рассмотрим индекс пересечения  $\langle\langle [M_1^p], W_2^{q+1} \rangle\rangle$ , то с точностью до знака получим то же самое число; это следует из леммы на с. 53.

С помощью двойственности Александра коэффициент зацепления можно интерпретировать через умножение в когомологиях. Это делается следующим образом. Введём для краткости обозначение  $X = M_1^p \sqcup M_2^q$ . Согласно двойственности Александра  $\tilde{H}^k(S^n \setminus X) \cong \tilde{H}_{p+q-k}(X)$ ; здесь мы воспользовались тем, что  $n = p + q + 1$ . Поэтому в  $H^q(S^n \setminus X)$  есть класс, соответствующий фундаментальному классу  $[M_1^p]$ , а в  $H^p(S^n \setminus X)$  есть класс, соответствующий фундаментальному классу  $[M_2^q]$ . Произведение этих когомологических классов лежит в  $H^{p+q}(S^n \setminus X) \cong \tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}$ , т. е. является целым числом. Это число и есть коэффициент зацепления (с точностью до знака). Чтобы доказать это, заметим, что двойственность Александра строится как композиция изоморфизмов

$$H^{p+q}(S^n \setminus X) \longrightarrow H_1(S^n, X) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_0(X).$$

В  $H_1(S^n, M_1^p \sqcup M_2^q)$  произведению рассматриваемых когомологических классов соответствует пересечение цепей  $W_1^{p+1}$  и  $W_2^{q+1}$  (предполагается, что эти цепи трансверсальны). Действительно, двойственность Александра строится как композиция изоморфизмов

$$H^q(S^n \setminus X) \longrightarrow H_{p+1}(S^n, X) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_p(X),$$

поэтому в  $H_{p+1}(S^n, X)$  фундаментальному классу  $[M_1^p]$  соответствует гомологический класс, представленный цепью  $W_1^{p+1}$ . Когда мы берём границу пересечения  $W_1^{p+1} \cap W_2^{q+1}$  (состоящего из дуг кривых), получается объединение двух пересечений  $W_1^{p+1} \cap [M_2^q]$  и  $[M_1^p] \cap W_2^{q+1}$ . Однако мы не только берём границу, но и переходим к приведённым гомологиям, а потому остаётся только одно из этих пересечений (например, первое). Действительно, дуги из  $W_1^{p+1} \cap W_2^{q+1}$ , оба конца которых лежат на одном многообразии  $M_1^p$  или  $M_2^q$ , дают нулевой вклад. Ненулевой вклад дают только те дуги, один конец которых лежит на  $M_1^p$ , а другой — на  $M_2^q$ . Чтобы учесть такие вклады, достаточно взять одно из двух пересечений.

### 8.6. Тройное произведение Масси

Пусть когомологические классы  $[\alpha^p] \in H^p(X)$ ,  $[\beta^q] \in H^q(X)$  и  $[\gamma^r] \in H^r(X)$  представлены коциклами  $\alpha^p$ ,  $\beta^q$  и  $\gamma^r$ . Предположим, что  $[\alpha^p] \cup [\beta^q] = 0$  и  $[\beta^q] \cup [\gamma^r] = 0$ . Тогда  $\alpha^p \cup \beta^q = \delta c^{p+q-1}$  и  $\beta^q \cup \gamma^r = \delta d^{q+r-1}$  для некоторых коцепей  $c^{p+q-1}$  и  $d^{q+r-1}$ . Образует коцепь

$$z = c^{p+q-1} \cup \gamma^r + (-1)^p \alpha^p \cup d^{q+r-1}.$$

Легко проверить, что эта коцепь является коциклом. Действительно,  $\delta \gamma^r = 0$  и  $\delta \alpha^p = 0$ , поэтому

$$\begin{aligned} \delta z &= \delta c^{p+q-1} \cup \gamma^r + (-1)^{p-1} (-1)^p \alpha^p \cup \delta d^{q+r-1} = \\ &= \alpha^p \cup \beta^q \cup \gamma^r - \alpha^p \cup \beta^q \cup \gamma^r = 0. \end{aligned}$$

Коциклу  $z$  соответствует когомологический класс  $[z] \in H^{p+q+r-1}(X)$ . Этот класс  $[z]$  определён не однозначно: к коциклам  $\alpha^p$ ,  $\beta^q$  и  $\gamma^r$  мы можем прибавлять кограницы, а кроме того, к коцепям  $c^{p+q-1}$  и  $d^{q+r-1}$  мы можем прибавлять коциклы. Множество всех когомологических классов  $[z]$ , получающихся при этом, называют *тройным произведением Масси* классов  $[\alpha^p]$ ,  $[\beta^q]$  и  $[\gamma^r]$  и обозначают  $\langle [\alpha^p], [\beta^q], [\gamma^r] \rangle$ .

**Теорема 8.12.** *Тройное произведение Масси когомологических классов  $[\alpha^p]$ ,  $[\beta^q]$  и  $[\gamma^r]$  является элементом факторгруппы  $H^{p+q+r-1}(X)$  по  $[\alpha^p] \cup H^{q+r-1}(X) + H^{p+q-1}(X) \cup [\gamma^r]$ .*

**Доказательство.** Выберем коцепи  $c_1^{p+q-1}$  и  $c_2^{p+q-1}$  так, что  $\alpha^p \cup \beta^q = \delta c_1^{p+q-1} = \delta c_2^{p+q-1}$ , и образуем с их помощью коциклы  $z_1$  и  $z_2$ . Тогда  $z_1 - z_2 = (c_1^{p+q-1} - c_2^{p+q-1}) \cup \gamma^r$ . Здесь  $c_1^{p+q-1} - c_2^{p+q-1}$  — коцикл, поэтому  $[z_1] - [z_2] \in H^{p+q-1}(X) \cup [\gamma^r]$ . Аналогично доказывается, что если мы выберем разные коцепи  $d_1^{q+r-1}$  и  $d_2^{q+r-1}$ , то  $[z_1] - [z_2] \in [\alpha^p] \cup H^{q+r-1}(X)$ .

Пусть теперь  $\alpha_2^p = \alpha_1^p + \delta a^{p-1}$ . Тогда если  $\alpha_1^p \cup \beta^q = \delta c_1^{p+q-1}$ , то  $\alpha_2^p \cup \beta^q = \delta c_1^{p+q-1} + \delta a^{p-1} \cup \beta^q = \delta(c_1^{p+q-1} + a^{p-1} \cup \beta^q)$ , поскольку  $\delta \beta^q = 0$ . Таким образом, можно положить  $c_2^{p+q-1} = c_1^{p+q-1} + a^{p-1} \cup \beta^q$ . В таком случае

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= a^{p-1} \cup \beta^q \cup \gamma^r + (-1)^p \delta a^{p-1} \cup d^{q+r-1} = \\ &= a^{p-1} \cup \delta d^{q+r-1} + (-1)^p \delta a^{p-1} \cup d^{q+r-1} = (-1)^p \delta (a^{p-1} \cup d^{q+r-1}), \end{aligned}$$

поэтому  $[z_2] = [z_1]$ . Аналогично рассматривается случай, когда изменяется коцикл  $\gamma^r$ .

Рассмотрим, наконец, случай, когда  $\beta_2^q = \beta_1^q + \delta b^{q-1}$ . В этом случае  $c_2^{p+q-1} = c_1^{p+q-1} + (-1)^p \alpha^p \cup b^{q-1}$  и  $d_2^{q+r-1} = d_1^{q+r-1} + b^{q-1} \cup \gamma^r$ . Следовательно,  $z_2 - z_1 = 2(-1)^p \alpha^p \cup b^{q-1} \cup \gamma^r$ .  $\square$



Тройное произведение Масси можно применить для того, чтобы доказать зацепленность колец Борромео (рис. 26). Следует, правда, отметить, что для обычных колец Борромео это можно сделать совсем элементарно с помощью раскрасок диаграммы зацепления (см. [П1], с. 38). Но для многомерного обобщения колец Борромео уже нужно применить тройное произведение Масси.

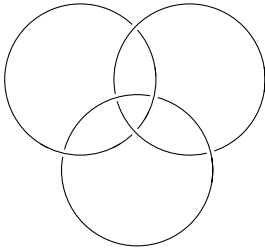


Рис. 26. Кольца Борромео

Для вычислений нам удобно задать кольца Борромео уравнениями

$$x = 0, \quad y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \quad (\text{окружность } S_1);$$

$$y = 0, \quad z^2 + \frac{x^2}{4} = 1 \quad (\text{окружность } S_2);$$

$$z = 0, \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (\text{окружность } S_3).$$

Рис. 27 показывает, что эти уравнения действительно задают кольца Борромео.

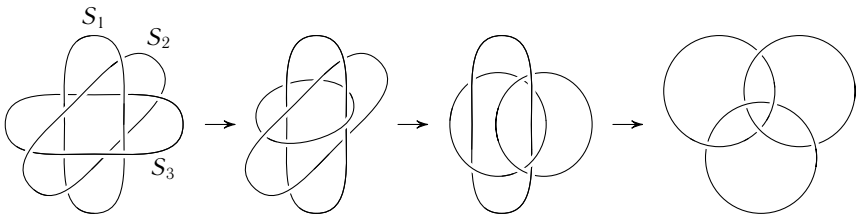


Рис. 27. Преобразование диаграммы

Вместо пространства  $\mathbb{R}^3$ , в которое вложены данные окружности, нам будет удобнее рассмотреть его одноточечную компактификацию  $S^3$ . Согласно двойственности Александра имеем  $\tilde{H}^k(S^3 \setminus (S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3)) \cong \tilde{H}_{2-k}(S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3)$ . Окружности  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  попарно не зацеплены, поэтому попарные произведения когомологических классов  $\alpha^1$ ,  $\beta^1$  и  $\gamma^1$ , соответствующих при двойственности Александра фундаментальным классам  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , нулевые. В такой ситуации можно определить тройное произведение  $\langle \alpha^1, \beta^1, \gamma^1 \rangle$ .

Покажем, что для коэффициентов в  $\mathbb{Z}_2$  это тройное произведение Масси отлично от нуля. Прежде всего заметим, что оно лежит в группе  $H^2(S^3 \setminus (S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3)) \cong \tilde{H}_0(S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3)$ , поскольку группа  $\alpha^1 \cup H^1(X) + H^1(X) \cup \gamma^1$ , где  $X = S^3 \setminus (S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3)$ , нулевая. Действительно, равны нулю не только попарные произведения классов  $\alpha^1$ ,  $\beta^1$  и  $\gamma^1$ , но и про-

изведения  $\alpha^1 \cup \alpha^1$ ,  $\beta^1 \cup \beta^1$  и  $\gamma^1 \cup \gamma^1$ , поскольку окружности  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  незаузлены, а потому  $S_i$  можно малым шевелением перевести в  $S'_i$  так, чтобы диски  $D_i$  и  $D'_i$ , натянутые на  $S_i$  и  $S'_i$ , не пересекались.

Пусть  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  — цепи (относительные циклы), соответствующие дискам, натянутым на  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . При изоморфизме  $H_2(S^3, S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3) \cong \cong H^1(S^3 \setminus (S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3))$  гомологические классы этих относительных циклов переходят в  $\alpha^1$ ,  $\beta^1$  и  $\gamma^1$ . Пусть  $c$  и  $d$  — полудиски, для которых в группах относительных цепей имеют место равенства  $\omega_1 \cap \omega_2 = \partial c$  и  $\omega_2 \cap \omega_3 = \partial d$  (рис. 28). Тогда тройному произведению Масси  $\langle \alpha^1, \beta^1, \gamma^1 \rangle$  в  $H_1(S^3, S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3)$  соответствует относительный цикл  $c \cap \omega_3 + \omega_1 \cap d$ ; на рис. 28 этот цикл выделен. При изоморфизме

$$H_1(S^3, S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_0(S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3)$$

гомологический класс этого цикла переходит в элемент, отличный от нуля, поскольку его концы лежат в разных компонентах связности: один конец лежит в  $S_1$ , а другой — в  $S_3$ .

С другой стороны, если зацепление  $S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3 \subset S^3$  тривиально (т. е., в частности,  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  можно заключить в три попарно не пересекающихся шара), то диски  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  можно выбрать попарно не пересекающимися, а в таком случае тройное произведение Масси  $\langle \alpha^1, \beta^1, \gamma^1 \rangle$  равно нулю. Таким образом, кольца Борромео образуют нетривиальное зацепление.

Аналогично можно доказать нетривиальность следующего многомерного обобщения колец Борромео. Пусть  $n = p + q + r$ ,  $x = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_q)$  и  $z = (z_1, \dots, z_r)$ . Рассмотрим в  $\mathbb{R}^n$  три сферы, заданные уравнениями

$$x = 0, \quad \|y\|^2 + \frac{\|z\|^2}{4} = 1 \quad (\text{сфера } S_1^{q+r-1});$$

$$y = 0, \quad \|z\|^2 + \frac{\|x\|^2}{4} = 1 \quad (\text{сфера } S_2^{p+r-1});$$

$$z = 0, \quad \|x\|^2 + \frac{\|y\|^2}{4} = 1 \quad (\text{сфера } S_3^{p+q-1}).$$

Для каждой пары этих сфер существует разделяющая их сфера размерности  $n - 1$ . Например, если мы возьмём сферу

$$\frac{\|x\|^2}{3^2} + \frac{\|y\|^2}{(1/2)^2} + \frac{\|z\|^2}{(3/2)^2} = 1,$$

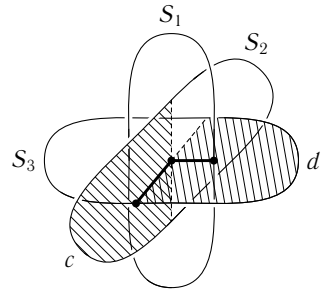


Рис. 28. Пересечение цепей

то сфера  $S_1^{q+r-1}$  лежит вне её, а сфера  $S_3^{p+q-1}$  — внутри. Таким образом, рассматриваемые сферы попарно не зацеплены. Поэтому попарные произведения когомологических классов  $\alpha^p$ ,  $\beta^q$  и  $\gamma^r$ , соответствующих при двойственности Александра фундаментальным классам  $S_1^{q+r-1}$ ,  $S_2^{p+r-1}$  и  $S_3^{p+q-1}$ , нулевые. Равны нулю также произведения  $\alpha^p \cup \alpha^p$ ,  $\beta^q \cup \beta^q$  и  $\gamma^r \cup \gamma^r$ . Покажем, что для коэффициентов в  $\mathbb{Z}_2$  тройное произведение  $\langle \alpha^p, \beta^q, \gamma^r \rangle \in H^{n-1}(S^n \setminus S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3) \cong \tilde{H}_0(S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3)$  не равно нулю. Для этого рассмотрим диски  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , натянутые на  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \left\{ (x, y, z) \mid x = 0, \|y\|^2 + \frac{\|z\|^2}{4} \leq 1 \right\}, \\ \omega_2 &= \left\{ (x, y, z) \mid y = 0, \|z\|^2 + \frac{\|x\|^2}{4} \leq 1 \right\}, \\ \omega_3 &= \left\{ (x, y, z) \mid z = 0, \|x\|^2 + \frac{\|y\|^2}{4} \leq 1 \right\}.\end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}\omega_1 \cap \omega_2 &= \{(x, y, z) \mid x = 0, y = 0, \|z\| \leq 1\}, \\ \omega_2 \cap \omega_3 &= \{(x, y, z) \mid y = 0, z = 0, \|x\| \leq 1\}.\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}c &= \left\{ (x, y, z) \mid x_1 \geq 0, x_2 = \dots = x_p = 0, y = 0, \|z\|^2 + \frac{x_1^2}{4} \leq 1 \right\}, \\ d &= \left\{ (x, y, z) \mid y_1 \geq 0, y_2 = \dots = y_q = 0, z = 0, \|x\|^2 + \frac{y_1^2}{4} \leq 1 \right\}.\end{aligned}$$

Тогда для относительных цепей имеют место равенства  $\omega_1 \cap \omega_2 = \partial c$  и  $\omega_2 \cap \omega_3 = \partial d$ . Поэтому тройному произведению Масси  $\langle \alpha^p, \beta^q, \gamma^r \rangle$  соответствует одномерный относительный цикл  $c \cap \omega_3 + \omega_1 \cap d$ . Легко проверить, что

$$\begin{aligned}c \cap \omega_3 &= \{(x, y, z) \mid 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = \dots = x_p = 0, y = 0, z = 0\}, \\ \omega_1 \cap d &= \{(x, y, z) \mid 0 \leq y_1 \leq 1, y_2 = \dots = y_q = 0, x = 0, z = 0\}.\end{aligned}$$

Поэтому данный относительный цикл представляет собой путь, соединяющий разные компоненты связности: один его конец лежит в  $S_1^{q+r-1}$ , а другой — в  $S_3^{p+q-1}$ . Такой цикл является представителем ненулевого класса гомотопий.

### 8.7. Форма пересечения и сигнатура многообразия

Пусть  $M^{2n}$  — замкнутое ориентированное многообразие чётной размерности,  $F$  — произвольное поле. Тогда на пространстве  $H^n(M^{2n}; F)$  можно

определить билинейную форму

$$f(\alpha^n, \beta^n) = \langle \alpha^n \cup \beta^n, [M^{2n}] \rangle,$$

где  $[M^{2n}]$  — фундаментальный класс многообразия  $M^{2n}$ . При изменении ориентации фундаментальный класс изменяет знак, поэтому билинейная форма  $f$  тоже изменяет знак, т. е.  $f_- = -f$ , где  $f_-$  — форма для многообразия с изменённой ориентацией.

На двойственном пространстве  $H_n(M^{2n}; F)$  имеется двойственная форма

$$f^*(\alpha_n, \beta_n) = \langle \alpha_n, \beta_n \rangle.$$

Напомним, что в определении индекса пересечения  $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle$  участвует ориентация многообразия и при изменении ориентации индекс пересечения изменяет знак.

Билинейные формы  $f$  и  $f^*$  мы будем называть *формами пересечения*.

Форму пересечения можно определить не только над полем  $F$ , но и над кольцом  $\mathbb{Z}$ . Для этого вместо группы  $H_n(M^{2n})$  следует взять свободную абелеву группу  $H_n(M^{2n})/T_n$ , где  $T_n$  — подгруппа кручения, поскольку на элементах конечного порядка форма пересечения обращается в нуль.

Нас будут интересовать только формы пересечения над  $\mathbb{R}$  и над  $\mathbb{Z}$ . Из формулы универсальных коэффициентов следует, что

$$H_n(M^{2n}; \mathbb{R}) \cong H_n(M^{2n}) \otimes \mathbb{R} \cong (H_n(M^{2n})/T_n) \otimes \mathbb{R}.$$

Кроме того, элементы конечного порядка не влияют на индекс пересечения, и непосредственно из определения индекса пересечения видно, что если  $\alpha_n, \beta_n \in C_n(M^{2n})$  и  $r\alpha_n, s\beta_n \in C_n(M^{2n}; \mathbb{R})$ , то

$$\langle r\alpha_n, s\beta_n \rangle = rs \langle \alpha_n, \beta_n \rangle.$$

Поэтому формы пересечения над  $\mathbb{R}$  и над  $\mathbb{Z}$  задаются одной и той же матрицей. Из этого, в частности, следует, что в  $H_n(M^{2n}; \mathbb{R})$  можно выбрать базис так, что форма пересечения имеет целые коэффициенты.

Из косокоммутативности сир-произведения следует, что форма пересечения симметрична при чётном  $n$  и кососимметрична при нечётном  $n$ .

Пусть  $Q$  — матрица формы пересечения над  $\mathbb{Z}$ ,  $m = \dim H_n(M^{2n}; \mathbb{R})$ . Теорему 8.6 можно переформулировать так: существуют квадратные матрицы  $A$  и  $B$  над  $\mathbb{Z}$  порядка  $m$ , для которых  $A^T Q B = I_m$  — единичная матрица. Следовательно,  $\det Q = \pm 1$ .

Сформулируем доказанные свойства формы пересечения в виде отдельной теоремы.

**Теорема 8.13.** а) *Форма пересечения задаётся невырожденной целочисленной матрицей.*

б) Для многообразия размерности  $4k$  форма пересечения задается симметрической матрицей, а для многообразия размерности  $4k + 2$  — кососимметрической.

в) При изменении ориентации многообразия форма пересечения меняет знак.

**З а м е ч а н и е.** В случае, когда многообразие неориентируемо или не замкнуто, тоже можно определить форму пересечения, но она не обязательно будет невырожденной. Кроме того, в этом случае определения формы пересечения с помощью умножения в когомологиях и посредством пересечения циклов не эквивалентны. Например, если мы определим форму пересечения для цилиндра  $I \times S^1$  и для листа Мёбиуса через умножение в когомологиях, то в обоих случаях получим нулевую квадратичную форму. Если же определить форму пересечения посредством пересечения циклов, то для цилиндра получим нулевую квадратичную форму, а для листа Мёбиуса — ненулевую. Действительно, на цилиндре циклы  $\{t_1\} \times S^1$  и  $\{t_2\} \times S^1$ , где  $t_1 \neq t_2$ , не пересекаются, а на листе Мёбиуса циклы  $\alpha$  и  $\alpha'$ , изображённые на рис. 24, пересекаются в одной точке.

Из свойств формы пересечения, указанных в теореме 8.13, можно сделать следующий вывод.

**Т е о р е м а 8.14.** Если  $M^{4k+2}$  — замкнутое ориентируемое многообразие, то  $\dim H_{2k+1}(M^{4k+2}; \mathbb{R})$  — чётное число.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Матрица формы пересечения многообразия  $M^{4k+2}$  кососимметрична, поэтому её ранг чётен (см. [П2], с. 147). Но эта матрица невырожденная, поэтому её ранг равен  $\dim H_{2k+1}(M^{4k+2}; \mathbb{R})$ .  $\square$

**С л е д с т в и е.** Если  $M^{4k+2}$  — замкнутое ориентируемое многообразие, то его эйлерова характеристика  $\chi(M^{4k+2})$  чётна.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для замкнутого ориентируемого многообразия

$$\chi(M^{2n}) \equiv \dim H_n(M^{2n}; \mathbb{R}) \pmod{2}.$$

Это доказывается точно так же, как и теорема 6.4 (для ориентируемого многообразия рассуждения справедливы не только для коэффициентов в  $\mathbb{Z}_2$ , но и для коэффициентов в  $\mathbb{R}$ ).  $\square$

**С и г н а т у р о й** многообразия  $M^{4k}$  называют сигнатуру (индекс) его формы пересечения. Напомним, что сигнатура симметрической билинейной формы над  $\mathbb{R}$  определяется следующим образом. Пользуясь симметричностью, выберем базис, для которого  $f(\sum x_i e_i, \sum y_i e_i) = \sum \lambda_i x_i y_i$ . Сигнатура — это разность между количеством положительных чисел  $\lambda_i$  и количеством отрицательных. Сигнатура формы не зависит от выбора базиса, поэтому сигнатура многообразия, которую обозначают  $\sigma(M^{4k})$ , — инвариант ориентированного многообразия. При этом  $\sigma(-M^{4k}) = -\sigma(M^{4k})$ ,

где  $-M^{4k}$  — многообразии  $M^{4k}$  с противоположной ориентацией. Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Теорема 8.15.** *Если  $\sigma(M^{4k}) \neq 0$ , то не существует гомеоморфизма  $f: M^{4k} \rightarrow M^{4k}$ , обращающего ориентацию (т. е. гомеоморфизма, для которого  $f_*[M^{4k}] = -[M^{4k}]$ ).*

Из теоремы 8.15 следует, что не существует гомеоморфизма  $\mathbb{C}P^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^{2n}$ , обращающего ориентацию, поскольку  $\sigma(\mathbb{C}P^{2n}) = \pm 1$ . (Другое доказательство этого утверждения приведено в решении задачи 8.9.)

На многообразии  $\mathbb{C}P^m$  имеется выделенная ориентация, потому что  $\mathbb{C}P^m \setminus \mathbb{C}P^{m-1} = \mathbb{C}^m$ , а в комплексном пространстве есть выделенная ориентация (все комплексные преобразования, рассматриваемые как преобразования над  $\mathbb{R}$ , имеют положительный определитель). Обычно предполагают, что  $\mathbb{C}P^m$  снабжено именно этой ориентацией. В таком случае  $\sigma(\mathbb{C}P^{2n}) = 1$ , поскольку ориентация, задаваемая парой трансверсально пересекающихся  $n$ -мерных комплексных подпространств в  $\mathbb{C}^{2n}$ , согласована с ориентацией  $\mathbb{C}^{2n}$ .

**Задача 8.17** (Новиков—Рохлин). Пусть  $M_1^{4n}$  и  $M_2^{4n}$  — замкнутые ориентируемые многообразия. Докажите, что  $\sigma(M_1^{4n} \# M_2^{4n}) = \sigma(M_1^{4n}) + \sigma(M_2^{4n})$ .

Воспользовавшись изоморфизмом Лефшеца, можно доказать следующее свойство сигнатуры многообразия, которое является краем другого многообразия.

**Теорема 8.16** (Том [Th1]). *Пусть  $M^{4k}$  — замкнутое ориентируемое многообразие, которое является краем компактного ориентируемого многообразия  $W^{4k+1}$ . Тогда  $\sigma(M^{4k}) = 0$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим когомологическую и гомологическую последовательности пары  $(W^{4k+1}, M^{4k})$  и отображим первую последовательность во вторую посредством изоморфизмов Пуанкаре и Лефшеца:

$$\begin{array}{ccccc} H^{2k}(W^{4k+1}) & \xrightarrow{i^*} & H^{2k}(M^{4k}) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{2k+1}(W^{4k+1}, M^{4k}) \\ \downarrow \cap [W^{4k+1}] & & \downarrow \cap [M^{4k}] & & \downarrow \cap [W^{4k+1}] \\ H_{2k+1}(W^{4k+1}, M^{4k}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{2k}(M^{4k}) & \xrightarrow{i_*} & H^{2k}(W^{4k+1}) \end{array}$$

При доказательстве изоморфизма Лефшеца мы проверяли, что эта диаграмма коммутативна с точностью до знака. Из точности и коммутативности следует, что  $\text{Im } i^* \cong \text{Im } \partial_* = \text{Ker } i_*$ .

Если  $\alpha, \beta \in \text{Im } i^*$ , то  $\langle \alpha \cup \beta, [M^{4k}] \rangle = 0$ . В самом деле, если  $\alpha = i^*(a)$  и  $\beta = i^*(b)$ , то

$$\langle \alpha \cup \beta, [M^{4k}] \rangle = \langle i^*(a \cup b), \partial_*[W^{4k+1}] \rangle = \langle \delta^* i^*(a \cup b), [W^{4k+1}] \rangle = 0,$$

поскольку  $\delta^* i^* = 0$ .

Следующий шаг рассуждений удобно проводить, избавившись от кручения, т. е. рассматривая (ко)гомологии с коэффициентами в  $\mathbb{R}$ . В таком случае  $H^{2k}(M^{4k})$  и  $H^{2k}(W^{4k+1})$  являются линейными пространствами, двойственными пространствам  $H_{2k}(M^{4k})$  и  $H_{2k}(W^{4k+1})$ . При этом отображения  $i_*$  и  $i^*$  двойственны друг другу.

**Л е м м а.** Пусть отображение  $f^*: W^* \rightarrow V^*$  двойственно отображению  $f: V \rightarrow W$ . Тогда  $(\text{Im } f)^* \cong W^*/\text{Ker } f^*$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Линейные функции на  $\text{Im } f$  — это линейные функции на  $W$ , рассматриваемые с точностью до функций, обращающихся в нуль на  $\text{Im } f$ . Равенство  $\langle f^*(\eta), \nu \rangle = \langle \eta, f(\nu) \rangle$  показывает, что  $\text{Ker } f^*$  — это функции на  $W$ , обращающиеся в нуль на  $\text{Im } f$ .  $\square$

Используя эту лемму, получаем  $(\text{Im } i^*)^* \cong H_{2k}(M^{4k}; \mathbb{R})/\text{Ker } i_*$ . Если учесть, что  $\text{Im } i^* \cong \text{Ker } i_*$ , то из этого следует, что  $\dim \text{Im } i^* = \dim \text{Ker } i_* = \frac{1}{2} \dim H_{2k}(M^{4k}; \mathbb{R})$ .

Форма пересечения невырожденная, поэтому размерность подпространства, на котором форма обращается в нуль, не превосходит половины размерности пространства, причём равенство достигается лишь в том случае, когда сигнатура равна нулю.  $\square$

## 8.8. Гомоморфизм Бокштейна и изоморфизм Пуанкаре

Основная теорема этого пункта будет применена в следующем пункте для классификации линз с точностью до гомотопической эквивалентности.

Пусть  $K$  — симплициальный комплекс,  $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$  — точная последовательность абелевых групп. Тогда возникает точная последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow C_k(K; G') \rightarrow C_k(K; G) \rightarrow C_k(K; G'') \rightarrow 0.$$

Как мы уже говорили, связывающий гомоморфизм  $\beta_*: H_k(K; G'') \rightarrow H_{k-1}(K; G')$  называют гомоморфизмом Бокштейна. Для коцепных комплексов тоже возникает точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C_k, G') \rightarrow \text{Hom}(C_k, G) \rightarrow \text{Hom}(C_k, G'') \rightarrow 0,$$

где  $C_k = C_k(K)$ . Связывающий гомоморфизм для групп когомологий  $\beta^*: H^k(K; G'') \rightarrow H^{k+1}(K; G')$  тоже называют гомоморфизмом Бокштейна.

**Т е о р е м а 8.17.** Для замкнутого ориентируемого многообразия  $M^n$  гомоморфизм Бокштейна коммутирует с изоморфизмом Пуанкаре с точностью до знака, т. е. если  $\alpha^k \in H^k(M^n; G'')$ , то

$$(\beta^* \alpha^k) \cap [M^n] = \pm \beta_*(\alpha^k \cap [M^n]),$$

где  $[M^n] \in H_n(M^n; G')$  — фундаментальный класс. (Здесь предполагаются, что  $G', G, G''$  — аддитивные группы колец с единицей.)

**Доказательство.** На уровне (ко)циклов гомологический и когомологический гомоморфизмы Бокштейна устроены следующим образом. В случае гомологий для цикла  $z''_k$  с коэффициентами в  $G'' = G/G'$  выбирается представляющая его цепь  $z_k$  с коэффициентами в  $G$  и ей сопоставляется  $\partial z_k$  — цикл с коэффициентами в  $G' \subset G$ . В случае когомологий для коцикла  $(z^k)''$  со значениями в  $G''$  выбирается представляющая его коцепь  $z^k$  со значениями в  $G$  и ей сопоставляется коцикл  $\delta z^k$  со значениями в  $G' \subset G$ .

На уровне (ко)цепей изоморфизм Пуанкаре устроен следующим образом. Пусть  $K$  и  $K^*$  — двойственные разбиения  $M^n$ . Тогда цепи  $c_k \in C_k(K)$  сопоставляется коцепь  $c^{n-k} \in C^{n-k}(K^*)$ . При этом цепи  $\partial c_k$  сопоставляется коцепь  $\pm \delta c^{n-k}$  (точнее,  $(-1)^k \delta c^{n-k}$ ). Если мы воспользуемся при вычислении гомологического гомоморфизма Бокштейна разбиением  $K$ , а при вычислении когомологического гомоморфизма Бокштейна — разбиением  $K^*$ , то легко получим требуемое.  $\square$

**Задача 8.18.** Пусть  $a^p \in H^p(K; G'')$  и  $b^q \in H^q(K; G'')$ . Докажите, что

$$\beta^*(a^p \cup b^q) = \beta^*(a^p) \cup b^q + (-1)^p a^p \cup \beta^*(b^q).$$

## 8.9. Линзы

Пусть  $p$  и  $q$  — взаимно простые натуральные числа, причём  $p \geq 3$ . На единичной сфере  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  зададим действие (без неподвижных точек) группы  $\mathbb{Z}_p$  с образующей  $\sigma$ , положив

$$\sigma(z, w) = (e^{2\pi i/p} z, e^{2\pi i q/p} w).$$

Факторпространство по этому действию является трёхмерным многообразием; его называют *линзой* и обозначают  $L(p, q)$ .

В [ПЗ] подробно объяснено, что линзу  $L(p, q)$  можно представить в виде  $CW$ -комплекса с одной клеткой в каждой из размерностей 0, 1, 2, 3. А именно, возьмём шар  $D^3$ , разделим его экватор на  $p$  равных частей и отождествим точки нижней полусферы с точками верхней полусферы следующим образом: нижнюю полусферу поворачиваем на угол  $2\pi q/p$ , а затем отражаем её симметрично относительно экватора. При этом  $p$  точек деления экватора сливаются в одну точку;  $p$  дуг, на которые разделён экватор, тоже отождествляются. В результате получаем нульмерную клетку и одномерную клетку; в качестве двумерной клетки берём, например, нижнюю полусферу. В границу клетки  $D^3$  двумерная клетка входит дважды,



причём с противоположными ориентациями. Поэтому цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий  $L(p, q)$  имеет следующий вид:

$$C_3 \xrightarrow{0} C_2 \xrightarrow{\times p} C_1 \xrightarrow{0} C_0 \longrightarrow 0,$$

где  $C_i \cong \mathbb{Z}$ . Поэтому гомологии  $L(p, q)$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  таковы:

$$H_3 = \mathbb{Z}, \quad H_2 = 0, \quad H_1 = \mathbb{Z}_p, \quad H_0 = \mathbb{Z}.$$

Для  $L(p, q)$  гомологии и когомологии с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_p$  легко вычисляются без формулы универсальных коэффициентов, потому что цепной комплекс с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_p$  имеет очень простой вид:

$$C_3 \xrightarrow{0} C_2 \xrightarrow{0} C_1 \xrightarrow{0} C_0 \longrightarrow 0,$$

где  $C_i \cong \mathbb{Z}_p$ . Поэтому  $H_k(L(p, q); \mathbb{Z}_p) \cong H^k(L(p, q); \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$  при  $k = 0, 1, 2, 3$ .

Группы гомологий и когомологий не позволяют различить линзы  $L(p, q_1)$  и  $L(p, q_2)$ . Но гомоморфизм Бокштейна  $\beta_*$ , связанный с точной последовательностью

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0,$$

в некоторых случаях позволяет это сделать.

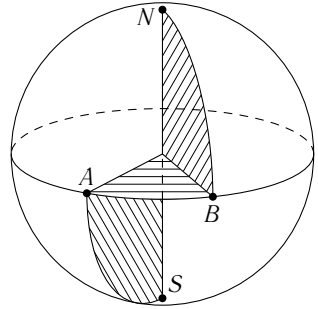
**Теорема 8.18.** *В группе  $H_2(L(p, q); \mathbb{Z}_p)$  можно выбрать элемент  $a$  так, что  $q \langle\langle a, \beta_*(a) \rangle\rangle = \pm 1 \in \mathbb{Z}_p$ .*

**Доказательство.** Пусть  $c$  — описанная выше двумерная клетка  $SW$ -комплекса  $L(p, q)$ ,  $d$  — одномерная клетка. В качестве  $a$  выберем гомологический класс, представленный циклом (по модулю  $p$ )  $1 \cdot c$ , где  $1 \in \mathbb{Z}_p$ . Элемент  $\beta_*(a) \in H_1(L(p, q); \mathbb{Z}_p)$  строится следующим образом. Рассмотрим цикл  $1 \cdot c$  как цепь с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_{p^2}$ , т.е. будем считать, что  $1 \in \mathbb{Z}_{p^2}$  (1 можно заменить на любой элемент вида  $1 + kp$ ). По условию  $\partial(1 \cdot c)$  — цикл с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_{p^2}$ , где подгруппа  $\mathbb{Z}_p$  в  $\mathbb{Z}_{p^2}$  состоит из элементов вида  $lp$ ,  $l \in \mathbb{Z}_p$ . Действительно,  $\partial(1 \cdot c) = p \cdot d$ . Элемент  $\beta_*(a)$  представлен циклом  $p \cdot d$ , который мы рассматриваем как цикл с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_p$ ; для этого элемент  $lp \in \mathbb{Z}_{p^2}$  нужно заменить на  $l \in \mathbb{Z}_p$ . В итоге получаем, что элемент  $\beta_*(a)$  представлен циклом  $1 \cdot d$ .

Вычислить непосредственно индекс пересечения  $\langle\langle c, d \rangle\rangle$  нельзя, потому что циклы  $c$  и  $d$  не трансверсальны. Поэтому вместо цикла  $d$  мы рассмотрим другой цикл, который гомологичен циклу  $qd$  и пересекает  $c$  трансверсально.

Пусть  $N$  и  $S$  — северный и южный полюс,  $A$  — некоторая точка экватора,  $B$  — точка экватора, полученная из  $A$  поворотом на угол  $2\pi q/p$

(рис. 29). Граница двумерной цепи, заштрихованной на рис. 29, состоит из отрезка  $NS$  и дуг  $SA$ ,  $AB$  и  $BN$ . В  $L(p, q)$  дуги  $SA$  и  $BN$  отождествляются, причём их ориентации противоположны; ясно также, что точки  $N$  и  $S$  отождествляются. Поэтому цикл  $NS$  гомологичен циклу  $AB$ . Но цикл  $AB$  состоит из  $q$  циклов  $d$ . Цикл  $NS$  трансверсально пересекает цикл  $c$  в одной точке, поэтому



$$q \langle\langle c, d \rangle\rangle = \langle\langle c, qd \rangle\rangle = \langle\langle c, NS \rangle\rangle = \pm 1$$

(все равенства здесь по модулю  $p$ ).  $\square$

Рис. 29. Двумерная цепь

**С л е д с т в и е.** В группе  $H^1(L(p, q); \mathbb{Z}_p)$

можно выбрать элемент  $\alpha$  так, что  $q\alpha \cup \beta^*(\alpha) = \pm \Lambda_p$ , где  $\Lambda_p \in H^3(L(p, q); \mathbb{Z}_p)$  — элемент, для которого  $\Lambda_p \cap [L(p, q)]_p = 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Многообразие  $L(p, q)$  ориентируемо, поскольку  $H_3(L(p, q)) = \mathbb{Z}$ . Поэтому гомологический и когомологический гомоморфизмы Бокштейна коммутируют с изоморфизмом Пуанкаре с точностью до знака.  $\square$

Из теоремы 8.18 и её следствия легко выводится следующее утверждение.

**Т е о р е м а 8.19.** Предположим, что линзы  $L(p, q_1)$  и  $L(p, q_2)$  гомотопически эквивалентны. Тогда  $q_1 \equiv \pm a^2 q_2 \pmod{p}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выберем элементы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в  $H^1(L(p, q_1); \mathbb{Z}_p)$  и в  $H^1(L(p, q_2); \mathbb{Z}_p)$  так, что

$$q_1 \alpha_1 \cup \beta^*(\alpha_1) = \pm \Lambda_{p,1}, \quad q_2 \alpha_2 \cup \beta^*(\alpha_2) = \pm \Lambda_{p,2}.$$

Пусть  $f: L(p, q_1) \rightarrow L(p, q_2)$  — гомотопическая эквивалентность. Тогда  $f^*(\Lambda_{p,2}) = \pm \Lambda_{p,1}$ . Запишем элемент  $f^*(\alpha_2)$  в виде  $a\alpha_1$ ,  $a \in \mathbb{Z}_p$ . Тогда

$$q_1 \alpha_1 \cup \beta^*(\alpha_1) = \pm \Lambda_{p,1} = \pm f^*(\Lambda_{p,2}) = \pm a^2 q_2 \alpha_1 \cup \beta^*(\alpha_1),$$

поэтому  $q_1 \equiv \pm a^2 q_2 \pmod{p}$ . (Равенство  $f^* \beta^* = \beta^* f^*$ , которым мы воспользовались, легко проверяется на уровне коцепей.)  $\square$

**З а м е ч а н и е.** В части I (п. 18.6) доказано утверждение, обратное теореме 8.19: если  $q_1 \equiv \pm a^2 q_2 \pmod{p}$ , то линзы  $L(p, q_1)$  и  $L(p, q_2)$  гомотопически эквивалентны.

## § 9. Теорема Кюннета

Теорема Кюннета позволяет выразить гомологии  $K \times L$  через гомологии  $K$  и  $L$ . У неё есть сравнительно простая часть, связанная с выражением цепного комплекса  $C_*(K \times L)$  через цепные комплексы  $C_*(K)$  и  $C_*(L)$ ,

и несколько более сложная алгебраическая часть, связанная с выражением гомологий комплекса  $C_*(K \times L)$  через гомологии комплексов  $C_*(K)$  и  $C_*(L)$ .

### 9.1. Цепной комплекс $C_*(K \times L)$

Если известны цепные комплексы  $C_*(K)$  и  $C_*(L)$ , то по ним можно построить цепной комплекс  $C_*(K \times L)$  для вычисления клеточных гомологий  $K \times L$ . Клеточные гомологии  $K \times L$  вычислять удобнее, чем симплицальные, потому что произведение открытых клеток является открытой клеткой, а произведение симплексов — это не симплекс.

Мы будем предполагать, что  $K$  и  $L$  — конечные  $CW$ -комплексы, потому что для бесконечных  $CW$ -комплексов топология прямого произведения  $K \times L$  может не совпадать с топологией  $K \times L$  как  $CW$ -комплекса.

Открытыми  $k$ -мерными клетками  $K \times L$  являются прямые произведения  $\sigma^p \times \tau^q$ , где  $p + q = k$ ,  $\sigma^p$  и  $\tau^q$  — открытые клетки  $K$  и  $L$ . Основная трудность связана с выражением граничного гомоморфизма в  $C_*(K \times L)$  через граничные гомоморфизмы в  $C_*(K)$  и в  $C_*(L)$ .

Ясно, что  $\partial(D^p \times D^q) = (D^p \times \partial D^q) \cup (\partial D^p \times D^q)$  и  $(D^p \times \partial D^q) \cap (\partial D^p \times D^q) = S^{p-1} \times S^{q-1}$ ; здесь  $\partial$  — геометрическая граница. При вычислении  $\partial(\sigma^p \times \tau^q)$  нас не интересуют клетки размерности  $(p - 1) + (q - 1) = k - 2$ , поэтому

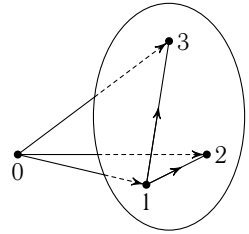
$$\partial(\sigma^p \times \tau^q) = \pm \partial \sigma^p \times \tau^q \pm \sigma^p \times \partial \tau^q.$$

Остаётся выяснить знаки.

Прежде всего нужно ввести соглашение о том, как ориентация клетки индуцирует ориентацию её границы, и вообще, как ориентация многообразия индуцирует ориентацию его края. Для симплекса  $[v_0, \dots, v_n]$  ориентация границы задаётся формулой  $\partial[v_0, \dots, v_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ .

Мы будем считать, что ориентация симплекса  $[v_0, \dots, v_n]$  задаётся тем, что базис  $e_1 = v_1 - v_0, \dots, e_n = v_n - v_0$  положительно ориентирован. При этом ориентация симплекса  $[v_1, \dots, v_n]$ , лежащего на его границе, задаётся тем, что базис  $e_2 - e_1 = v_2 - v_1, \dots, e_n - e_1 = v_n - v_1$  положительно ориентирован, т. е. базис  $e_2, \dots, e_n$  положительно ориентирован. В таком виде соглашение об индуцированной ориентации легко переносится на произвольное ориентированное многообразие  $M^n$  с краем  $\partial M^n$ . А именно, пусть ориентация многообразия  $M^n$  задаётся базисом  $e_1, \dots, e_n$  касательного пространства  $T_x M^n$  в некоторой точке  $x \in \partial M^n$ , причём вектор  $e_1$  направлен наружу, а векторы  $e_2, \dots, e_n$  лежат в касательном пространстве к краю. Тогда ориентация края задаётся базисом  $e_2, \dots, e_n$ .

Пусть положительные ориентации клеток  $\sigma^p$  и  $\tau^q$  задаются базисами  $e_1, \dots, e_p$  и  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q$ . Ориентацию клетки  $\sigma^p \times \tau^q$  зададим базисом  $e_1, \dots, e_p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q$ . Ориентация  $\partial\sigma^p$  задаётся базисом  $e_2 - e_1, \dots, e_p - e_1$  (см. рис. 30). Ориентация  $\partial\sigma^p \times \tau^q$  задаётся базисом



$$e_2 - e_1, \dots, e_p - e_1, \varepsilon_1 - e_1, \dots, \varepsilon_q - e_1; \quad (1)$$

эта ориентация совпадает с ориентацией  $\partial(\sigma^p \times \tau^q)$ . Ориентация  $\sigma^p \times \partial\tau^q$  задаётся базисом

Рис. 30. Ориентация границы клетки

$$e_1 - \varepsilon_1, e_2 - \varepsilon_1, \dots, e_p - \varepsilon_1, \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q - \varepsilon_1. \quad (2)$$

Переставим в базисе (1) вектор  $\varepsilon_1 - e_1$  на первое место. Матрица перехода от полученного базиса к базису (2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому знак ориентации базиса (2) относительно базиса (1) равен  $(-1)^p$ . В итоге получаем

$$\partial(\sigma^p \times \tau^q) = \partial\sigma^p \times \tau^q + (-1)^p \sigma^p \times \partial\tau^q.$$

Теперь задача вычисления гомологий  $K \times L$  становится чисто алгебраической.

### 9.2. Алгебраическая теорема Кюннета

Пусть  $C'_*$  и  $C''_*$  — неотрицательные цепные комплексы с граничными гомоморфизмами  $\partial'$  и  $\partial''$ . Их *тензорным произведением* называют цепной комплекс  $C_*$ , где  $C_k = \bigoplus_{p+q=k} C'_p \otimes C''_q$  и

$$\partial(c'_p \otimes c''_q) = \partial'c'_p \otimes c''_q + (-1)^p c'_p \otimes \partial''c''_q.$$

Знак  $(-1)^p$  во втором слагаемом обеспечивает выполнение равенства  $\partial\partial = 0$ .

Цепной комплекс  $C_*$  мы будем обозначать  $C'_* \otimes C''_*$ . Аналогичное обозначение мы будем использовать для произвольных градуированных абелевых групп  $A_* = \bigoplus A_p$  и  $B_* = \bigoplus B_q$ , т. е. будем считать, что  $(A_* \otimes B_*)_k = \bigoplus_{p+q=k} A_p \otimes B_q$ . Аналогично определим  $(\text{Тог}(A_*, B_*))_k = \bigoplus_{p+q=k} \text{Тог}(A_p, B_q)$ .

Теорема 9.1. Пусть  $C'_*$  и  $C''_*$  — свободные неотрицательные цепные комплексы. Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow (H_*(C'_*) \otimes H_*(C''_*))_k \longrightarrow H_k(C'_* \otimes C''_*) \longrightarrow (\text{Tor}(H_*(C'_*), H_*(C''_*)))_{k-1} \longrightarrow 0.$$

Эта точная последовательность расщепляется, но не канонически.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow Z'_p \xrightarrow{i'} C'_p \xrightarrow{\partial'} B'_{p-1} \longrightarrow 0.$$

Эта последовательность расщепляется, поскольку группа  $B'_{p-1}$  свободная. Поэтому точность сохранится после тензорного умножения на  $C''_q$ . Прямая сумма точных последовательностей является точной последовательностью, поэтому получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=k} (Z'_p \otimes C''_q) \xrightarrow{i' \otimes 1} \bigoplus_{p+q=k} (C'_p \otimes C''_q) \xrightarrow{\partial' \otimes 1} \bigoplus_{p+q=k-1} (B'_p \otimes C''_q) \longrightarrow 0. \quad (1)$$

Рассмотрим цепные комплексы  $Z'_* \otimes C''_*$  и  $B'_* \otimes C''_*$ ; в этих комплексах граничный гомоморфизм имеет вид  $\pm 1 \otimes \partial''$ . Действительно,  $\partial(z'_p \otimes c''_q) = (-1)^p z'_p \otimes \partial'' c''_q$ , поскольку  $\partial' z'_p = 0$ . Отображения  $i' \otimes 1$  и  $\partial' \otimes 1$  являются цепными, поэтому из короткой точной последовательности (1) получаем точную гомологическую последовательность

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_k(B'_* \otimes C''_*) \xrightarrow{\alpha_k} H_k(Z'_* \otimes C''_*) \longrightarrow H_k(C'_* \otimes C''_*) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_{k-1}(B'_* \otimes C''_*) \xrightarrow{\alpha_{k-1}} H_{k-1}(Z'_* \otimes C''_*) \longrightarrow \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Покажем, что  $H_k(Z'_* \otimes C''_*) \cong (Z'_* \otimes H_*(C''_*))_k$ . Группа  $Z'_p$  свободная, поэтому из точных последовательностей

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Z''_q \longrightarrow C''_q \xrightarrow{\partial''_q} B''_{q-1} \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow B''_{q-1} \longrightarrow Z''_{q-1} \longrightarrow H''_{q-1}(C''_*) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow Z'_p \otimes Z''_q \longrightarrow Z'_p \otimes C''_q \xrightarrow{1 \otimes \partial''_q} Z'_p \otimes B''_{q-1} \longrightarrow 0, \quad (3)$$

$$0 \longrightarrow Z'_p \otimes B''_{q-1} \longrightarrow Z'_p \otimes Z''_{q-1} \longrightarrow Z'_p \otimes H''_{q-1}(C''_*) \longrightarrow 0. \quad (4)$$

Из точной последовательности (3) получаем

$$\text{Ker}(\pm 1 \otimes \partial''_q) = \text{Ker}(1 \otimes \partial''_q) = Z'_p \otimes Z''_q,$$

$$\text{Im}(\pm 1 \otimes \partial''_q) = \text{Im}(1 \otimes \partial''_q) = Z'_p \otimes B''_{q-1}.$$

Поэтому точная последовательность (4) имеет вид

$$0 \longrightarrow \text{Im}(\pm 1 \otimes \partial_q'') \longrightarrow \text{Ker}(\pm 1 \otimes \partial_{q-1}'') \longrightarrow Z'_p \otimes H''_{q-1}(C_*) \longrightarrow 0.$$

Следовательно,  $\text{Ker}(\pm 1 \otimes \partial_{q-1}'')/\text{Im}(\pm 1 \otimes \partial_q'') \cong Z'_p \otimes H''_{q-1}(C_*)$ , а значит,  $H_k(Z'_* \otimes C_*) \cong (Z'_* \otimes H_*(C_*))_k$ .

Аналогично получаем  $H_k(B'_* \otimes C_*) \cong (B'_* \otimes H_*(C_*))_k$ . Непосредственно из определения связывающего гомоморфизма  $\alpha_k$  получаем, что при таких отождествлениях он имеет вид

$$j \otimes 1: (B'_* \otimes H_*(C_*))_k \rightarrow (Z'_* \otimes H_*(C_*))_k,$$

где  $j: B'_* \rightarrow Z'_*$  — естественное включение. Поэтому из свободной резольвенты

$$0 \longrightarrow B'_* \longrightarrow Z'_* \longrightarrow H(C'_*) \longrightarrow 0$$

получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow (\text{Tor}(H_*(C'_*), H_*(C_*)))_k \longrightarrow (B'_* \otimes H_*(C_*))_k \xrightarrow{\alpha_k} \\ \xrightarrow{\alpha_k} (Z'_* \otimes H_*(C_*))_k \longrightarrow (H_*(C'_*) \otimes H_*(C_*))_k \longrightarrow 0,$$

а значит,  $\text{Ker } \alpha_k = (\text{Tor}(H_*(C'_*), H_*(C_*)))_k$  и  $\text{Coker } \alpha_k = (H_*(C'_*) \otimes H_*(C_*))_k$ . После всех этих вычислений из точной гомологической последовательности (2) получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow (H_*(C'_*) \otimes H_*(C_*))_k \longrightarrow H_k(C'_* \otimes C_*) \longrightarrow (\text{Tor}(H_*(C'_*), H_*(C_*)))_{k-1} \longrightarrow 0.$$

Остаётся проверить, что полученная точная последовательность расщепляется. Для этого воспользуемся тем, что цепной комплекс  $C_*''$  свободный (до сих пор мы пользовались только тем, что свободен цепной комплекс  $C'_*$ ). Пусть  $I': C'_* \rightarrow Z'_*$  и  $I'': C_*'' \rightarrow Z_*''$  — расщепляющие отображения. Тогда ограничение отображения  $I' \otimes I''$  на  $Z'_* \otimes Z_*''$  индуцирует гомоморфизм

$$H_*(C'_* \otimes C_*'') \rightarrow \frac{Z'_* \otimes Z_*''}{B'_* \otimes Z_*'' + Z'_* \otimes B_*''} \cong H_*(C'_*) \otimes H_*(C_*'').$$

Этот гомоморфизм является расщепляющим отображением. □

### 9.3. Гомологии прямого произведения

Объединяя алгебраическую теорему Кюннета с вычислением цепного комплекса  $C_*(K \times L)$ , получаем следующее утверждение.

**Теорема 9.2** (Кюннет [Ку1], [Ку2]). Пусть  $K$  и  $L$  — конечные симплициальные комплексы. Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow (H_*(K) \otimes H_*(L))_k \longrightarrow H_k(K \times L) \longrightarrow (\text{Tor}(H_*(K), H_*(L)))_{k-1} \longrightarrow 0.$$

Эта точная последовательность расщепляется, но не канонически.

**З а м е ч а н и е.** Следует отметить, что обе статьи Кюннета появились до того, как Эмми Нётер обратила внимание на то, что гомологии являются группами. Поэтому в его статья идёт речь о числах Бетти и числах кручения, а не о группах.

**Пример 9.1.** Справедливо равенство  $H_k(T^n) = \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}}$ .

**Доказательство.** Применим индукцию по  $n$  и воспользуемся тем, что  $T^{n+1} = T^n \times S^1$ . При  $n = 1$  утверждение верно. Кроме того,  $\text{Tor}(H_*(T^n), \mathbb{Z}) = 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} H_k(T^{n+1}) &\cong (H_k(T^n) \otimes H_0(S^1)) \oplus (H_{k-1}(T^n) \otimes H_1(S^1)) \cong \\ &\cong H_k(T^n) \oplus H_{k-1}(T^n). \end{aligned}$$

Остаётся воспользоваться тем, что  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ . □

Для гомологий с коэффициентами в аддитивной группе поля  $F$  можно повторить доказательство алгебраической теоремы Кюннета, причём многие рассуждения упростятся, потому что на этот раз мы будем иметь дело с линейными отображениями векторных пространств. Если  $V$  и  $W$  — векторные пространства над  $F$ , то определим  $V \otimes_F W$  как группу, которая получается из группы  $V \otimes W$ , если ввести дополнительное соотношение  $\lambda v \otimes w = v \otimes \lambda w$  для любого  $\lambda \in F$ ; группа  $V \otimes_F W$  является векторным пространством над  $F$ . Повторим доказательство алгебраической теоремы Кюннета, заменив свободные цепные комплексы  $C'_*$  и  $C''_*$  на  $C'_* \otimes F$  и  $C''_* \otimes F$  и заменяя всюду в доказательстве  $\otimes$  на  $\otimes_F$ . Вплоть до вычисления ядра отображения  $\alpha_k$  всё остаётся без изменений. Но теперь из точной последовательности

$$0 \longrightarrow B'_p \otimes F \longrightarrow Z'_p \otimes F \longrightarrow H_p(C'_* \otimes F) \longrightarrow 0$$

получается точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow (B'_p \otimes F) \otimes_F H_q(C''_* \otimes F) &\xrightarrow{\alpha_k} (Z'_p \otimes F) \otimes_F H_q(C''_* \otimes F) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_p(C'_* \otimes F) \otimes_F H_q(C''_* \otimes F) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

т. е. в этом случае Кег  $\alpha_k = 0$  и группа Тог пропадает. В результате получаем не короткую точную последовательность, а канонический изоморфизм

$$\bigoplus_{p+q=k} H_p(C'_* \otimes F) \otimes_F H_q(C''_* \otimes F) \rightarrow H_k(C'_* \otimes C''_* \otimes F).$$

Но  $C'_* \otimes C''_* \otimes F \cong (C'_* \otimes F) \otimes_F (C''_* \otimes F)$ , поэтому

$$\bigoplus_{p+q=k} H_p(K; F) \otimes_F H_q(L; F) \cong H_k(K \times L; F).$$

**Задача 9.1.** Докажите, что произведение двух замкнутых многообразий ориентируемо тогда и только тогда, когда оба эти многообразия ориентируемы.

**Задача 9.2.** Докажите, что сфера  $S^n$  не является произведением двух многообразий положительной размерности.

**Задача 9.3.** Пусть  $n > m > 1$ . Докажите, что все гомотопические группы пространств  $S^n \times \mathbb{R}P^m$  и  $S^m \times \mathbb{R}P^n$  изоморфны, а группы гомологий у них разные.

**Задача 9.4.** Докажите, что все гомотопические группы пространств  $S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$  и  $\mathbb{R}P^2$  изоморфны, а группы гомологий у них разные.

**Задача 9.5** [Mi1]. Пусть  $A$  и  $B$  — конечные связные симплициальные комплексы. Докажите, что

$$H_{r+1}(A * B) = \bigoplus_{i+j=r} (\tilde{H}_i(A) \otimes \tilde{H}_j(B)) \oplus \bigoplus_{i+j=r-1} \text{Тог}(H_i(A), H_j(B)).$$

### 9.4. Теорема Кюннета для когомологий

Когомологии прямого произведения можно вычислять с помощью формулы универсальных коэффициентов и теоремы Кюннета для гомологий. Но можно и непосредственно получить для когомологий точную последовательность, аналогичную точной последовательности Кюннета для гомологий. Мы ограничимся рассмотрением групп коэффициентов  $\mathbb{Z}$  и  $F$  (аддитивная группа поля).

Пусть  $C'_* = C_*(K; \mathbb{Z})$  и  $C''_* = C_*(L; \mathbb{Z})$ , где  $K$  и  $L$  — конечные симплициальные комплексы. Рассмотрим коцепные комплексы  $C'^* = \text{Ном}(C'_*, \mathbb{Z})$  и  $C''^* = \text{Ном}(C''_*, \mathbb{Z})$ , а также их тензорное произведение  $C'^* \otimes C''^*$ . Любой коцепной комплекс  $C^*$  можно формально рассматривать как цепной комплекс  $D_*$ , где  $D_k = C^{-k}$  (при таком изменении нумерации граничный гомоморфизм будет действовать в нужном направлении). Условие  $D_k = 0$  при  $k \leq c$  эквивалентно тому, что  $C^l = 0$  при  $l \geq -c$ . Для всех рассматриваемых коцепных комплексов такое условие выполняется, потому что  $K$  и  $L$  — конечные симплициальные комплексы.



Применим алгебраическую теорему Кюннета, формально рассматривая коцепные комплексы как цепные. В результате получим точную последовательность

$$0 \longrightarrow (H_*(C'^*) \otimes H_*(C''^*))_k \longrightarrow H_k(C'^* \otimes C''^*) \longrightarrow \\ \longrightarrow (\text{Tor}(H_*(C'^*), H_*(C''^*)))_{k+1} \longrightarrow 0.$$

Обратите внимание, что число  $k - 1$  заменилось на  $k + 1$  из-за изменения нумерации: если  $(-p) + (-q) = (-k) - 1$ , то  $p + q = k + 1$ .

К сожалению, полученная точная последовательность — это не совсем то, чего мы хотели. Здесь  $H_p(C'^*) = H^p(K; \mathbb{Z})$  и  $H_q(C''^*) = H^q(L; \mathbb{Z})$ , как и нужно. Но когомологии произведения  $K \times L$  вычисляются с помощью коцепного комплекса  $\text{Hom}(C'_* \otimes C''_*, \mathbb{Z})$ , а не с помощью коцепного комплекса  $C'^* \otimes C''^* = \text{Hom}(C'_*, \mathbb{Z}) \otimes \text{Hom}(C''_*, \mathbb{Z})$ .

Определим гомоморфизм

$$\theta: \text{Hom}(C'_*, \mathbb{Z}) \otimes \text{Hom}(C''_*, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(C'_* \otimes C''_*, \mathbb{Z})$$

следующим образом:

$$\langle \theta(c'^p \otimes c''^q), c'_r \otimes c''_s \rangle = \langle c'^p, c'_r \rangle \langle c''^q, c''_s \rangle;$$

здесь предполагается, что  $\langle c'^p, c'_r \rangle = 0$ , если  $p \neq r$ , и  $\langle c''^q, c''_s \rangle = 0$ , если  $q \neq s$ .

*Л е м м а.* Гомоморфизм  $\theta$  — коцепное отображение, т. е.  $\delta\theta = \theta\delta$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* По определению

$$\delta(c'^p \otimes c''^q) = \delta'c'^p \otimes c''^q + (-1)^p c'^p \otimes \delta''c''^q.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \langle \delta\theta(c'^p \otimes c''^q), c'_r \otimes c''_s \rangle &= \langle \theta(c'^p \otimes c''^q), \partial(c'_r \otimes c''_s) \rangle = \\ &= \langle c'^p, \partial'c'_r \rangle \langle c''^q, c''_s \rangle + (-1)^r \langle c'^p, c'_r \rangle \langle c''^q, \partial''c''_s \rangle, \\ \langle \theta\delta(c'^p \otimes c''^q), c'_r \otimes c''_s \rangle &= \langle \delta'c'^p, c'_r \rangle \langle c''^q, c''_s \rangle + (-1)^p \langle c'^p, c'_r \rangle \langle \delta''c''^q, c''_s \rangle = \\ &= \langle c'^p, \partial'c'_r \rangle \langle c''^q, c''_s \rangle + (-1)^p \langle c'^p, c'_r \rangle \langle c''^q, \partial''c''_s \rangle. \end{aligned}$$

В полученных выражениях у вторых слагаемых могут оказаться разные знаки. Но если  $p \neq r$ , то  $\langle c'^p, c'_r \rangle = 0$ .  $\square$

Докажем, что  $\theta$  — изоморфизм. Прежде всего отметим, что если  $e_1, \dots, e_n$  — базис пространства  $\mathbb{Z}^n$ , то базис в  $\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$  образуют отображения  $\varepsilon^i$ , для которых  $\varepsilon^i(e_j) = \delta_{ij}$ . Поэтому  $\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$ , причём выбор базиса однозначно задаёт этот изоморфизм. Выбрав базисы в  $C'_p$  и в  $C''_q$ , получим изоморфизмы  $\text{Hom}(C'_p, \mathbb{Z}) \cong C'_p$  и  $\text{Hom}(C''_q, \mathbb{Z}) \cong C''_q$ .

Базисы в  $C'_p$  и в  $C''_q$  задают базис в  $C'_p \otimes C''_q$ , поэтому

$$\text{Hom}(C'_p, \mathbb{Z}) \otimes \text{Hom}(C''_q, \mathbb{Z}) \cong C'_p \otimes C''_q \cong \text{Hom}(C'_p \otimes C''_q, \mathbb{Z}).$$

Ясно также, что так определённый изоморфизм совпадает с  $\theta$ .

В итоге получаем канонический изоморфизм

$$H_k(C'^* \otimes C''^*) \rightarrow H^k(K \times L; \mathbb{Z}),$$

индуцированный гомоморфизмом  $\theta$ .

Если в качестве группы коэффициентов вместо  $\mathbb{Z}$  взять аддитивную группу поля  $F$ , то все рассуждения можно повторить для линейных пространств. В результате получим изоморфизм

$$\bigoplus_{p+q=k} H^p(K; F) \otimes_F H^q(L; F) \rightarrow H^k(K \times L; F).$$

## 9.5. Умножение в когомологиях и теорема Кюннета

Диагональное отображение  $d: |K| \rightarrow |K \times K|$ , заданное формулой  $d(x) = (x, x)$ , индуцирует гомоморфизмы гомологий и когомологий:  $H_*(K) \xrightarrow{d_*} H_*(K \times K)$  и  $H^*(K \times K) \xrightarrow{d^*} H^*(K)$ . Для когомологий можно рассмотреть композицию гомоморфизма  $d^*$  и канонического мономорфизма  $H^*(K) \otimes H^*(K) \rightarrow H^*(K \times K)$  из теоремы Кюннета. В результате получим канонический гомоморфизм  $H^*(K) \otimes H^*(K) \rightarrow H^*(K)$ . Образ элемента  $\alpha \otimes \beta$  при этом гомоморфизме совпадает с  $\alpha \smile \beta$ , но проверка этого достаточно сложна, потому что отображение  $d$  не симплициальное. Ниже приведено доказательство, основанное на методе ациклических моделей.

Для гомологий эту конструкцию применить нельзя, потому что гомоморфизм  $d_*$  действует в противоположном направлении:

$$H_*(K) \otimes H_*(K) \longrightarrow H_*(K \times K) \xleftarrow{d_*} H_*(K).$$

По этой причине умножение в гомологиях, в отличие от умножения в когомологиях, можно определить только в некоторых специальных случаях.

Теорему Кюннета мы доказали не только для коэффициентов в  $\mathbb{Z}$ , но и для коэффициентов в  $F$ , где  $F$  — аддитивная группа некоторого поля. При этом в конструкции использовалась и мультипликативная структура поля (например, при определении гомоморфизма, аналогичного  $\theta$  для коэффициентов в  $\mathbb{Z}$ ). Поэтому для когомологий с коэффициентами в  $F$  тоже есть канонически определённое умножение  $H^*(K; F) \otimes_F H^*(K; F) \rightarrow H^*(K; F)$ . Оно тоже совпадает с сир-произведением.

### Теорема об ациклических моделях

Метод ациклических моделей, разработанный Эйленбергом и Маклейном [ЕiЗ], является обобщением метода ациклических носителей. Наиболее естественно теорема об ациклических моделях формулируется на языке категорий и функторов.

*Категория*  $\mathcal{C}$  состоит из *объектов* и *морфизмов*  $\text{hom}(X, Y)$ , заданных для каждой пары объектов  $X$  и  $Y$ . При этом для любых двух морфизмов  $f \in \text{hom}(X, Y)$  и  $g \in \text{hom}(Y, Z)$  должен быть определён морфизм  $g \circ f \in \text{hom}(X, Z)$  и должны выполняться следующие условия:

$$1) (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f);$$

2) в  $\text{hom}(X, X)$  есть элемент  $\text{id}_X$ , для которого  $f \circ \text{id}_X = f$  и  $\text{id}_X \circ g = g$  для всех  $f \in \text{hom}(X, Y)$  и  $g \in \text{hom}(Y, X)$ .

*Ковариантный функтор*  $T$  из категории  $\mathcal{C}$  в категорию  $\mathcal{D}$  сопоставляет каждому объекту  $X$  категории  $\mathcal{C}$  объект  $T(X)$  категории  $\mathcal{D}$  и каждому морфизму  $f \in \text{hom}(X, Y)$  — морфизм  $T(f) \in \text{hom}(T(X), T(Y))$ . При этом должны выполняться следующие условия:  $T(\text{id}_X) = \text{id}_{T(X)}$  и  $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$ .

*Контравариантный функтор* отличается от ковариантного тем, что  $T(f) \in \text{hom}(T(Y), T(X))$  и  $T(f \circ g) = T(g) \circ T(f)$ .

Пусть  $T_1$  и  $T_2$  — ковариантные функторы из категории  $\mathcal{C}$  в категорию  $\mathcal{D}$ . *Естественное преобразование*  $\tau: T_1 \rightarrow T_2$  сопоставляет каждому объекту  $X$  категории  $\mathcal{C}$  морфизм  $\tau(X): T_1(X) \rightarrow T_2(X)$  так, что для любого морфизма  $f: X \rightarrow Y$  (т. е.  $f \in \text{hom}(X, Y)$ ) коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} T_1(X) & \xrightarrow{T_1(f)} & T_1(Y) \\ \tau(X) \downarrow & & \downarrow \tau(Y) \\ T_2(X) & \xrightarrow{T_2(f)} & T_2(Y) \end{array}$$

*Категорией с моделями* называют категорию, в которой выделен класс объектов  $\mathcal{M} = \{M_\alpha\}$ ; эти выделенные объекты называют *моделями*. Функтор (ковариантный)  $T$  из категории с моделями в категорию свободных неотрицательных цепных комплексов и их цепных отображений называют *свободным* относительно моделей  $\mathcal{M}$ , если для каждого  $k$  можно выбрать подмножество  $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}$  и в каждой группе  $C_k(M_\alpha)$ ,  $M_\alpha \in \mathcal{M}_k$ , можно выбрать элемент  $e_\alpha^k$  так, что элементы  $T(f)(e_\alpha^k) \in C_k(X)$  попарно различны и образуют базис группы  $C_k(X)$ . Здесь подразумевается, что  $f$  пробегает все элементы множества  $\text{hom}(e_\alpha^k, X)$ , а  $\alpha$  пробегает все индексы элементов множества  $\mathcal{M}_k$ .

Функтор  $T$  называют *ациклическим* относительно моделей  $\mathcal{M}$ , если  $H_k(T(M_\alpha)) = 0$  при  $k > 0$ .

Если функтор свободен относительно моделей  $\mathcal{M}$ , то он свободен и относительно моделей  $\mathcal{M}' \supset \mathcal{M}$ , а если функтор ацикличен относительно моделей  $\mathcal{M}$ , то он ацикличен и относительно моделей  $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ .

*Пример 9.2. Рассмотрим категорию симплициальных комплексов с упорядоченными вершинами и симплициальных отображений, сохраняющих порядок вершин. Функтор, сопоставляющий каждому симплициальному комплексу его цепной комплекс, свободен и ацикличен относительно моделей  $\mathcal{M} = \{[0, 1, \dots, k], k = 0, 1, \dots\}$ .*

**Теорема 9.3** (об ациклических моделях). *Пусть функтор  $T$  свободен, а функтор  $T'$  ацикличен относительно моделей  $\mathcal{M}$ . Тогда любое естественное преобразование  $\varphi: H_0(T) \rightarrow H_0(T')$  индуцировано некоторым естественным цепным отображением  $\tau: T \rightarrow T'$ . Более того, любые два естественных цепных отображения  $\tau, \bar{\tau}: T \rightarrow T'$ , индуцирующие  $\varphi$ , естественно цепно гомотопны.*

*Доказательство.* Группа  $H_0$  является факторгруппой нульмерных цепей, поэтому имеются эпиморфизмы  $p: T_0(M_\alpha) \rightarrow H_0(T(M_\alpha))$  и  $p': T'_0(M_\alpha) \rightarrow H_0(T'(M_\alpha))$ . Для каждого выбранного элемента  $e_\alpha^0 \in T_0(M_\alpha)$  существует элемент  $\tau_0(e_\alpha^0) \in T'_0(M_\alpha)$ , для которого  $p'\tau_0(e_\alpha^0) = \varphi p(e_\alpha^0)$ .

Элементы  $T(f)(e_\alpha^0)$ , где  $f \in \text{hom}(M_\alpha, X)$ , образуют базис группы  $T_0(X)$ . Положим  $\tau_0(T(f)(e_\alpha^0)) = T'(f)(\tau_0(e_\alpha^0))$ ; эта формула однозначно задаёт гомоморфизм  $\tau_0: T_0(X) \rightarrow T'_0(X)$ . Из естественности преобразования  $\varphi$  и того, что  $T(f)$  и  $T'(f)$  — цепные отображения, следует, что гомоморфизм  $\tau_0$  индуцирует в нульмерных гомологиях исходное отображение  $\varphi: H_0(T_0(X)) \rightarrow H_0(T'_0(X))$ .

Гомоморфизмы  $\tau_k: T_k(X) \rightarrow T'_k(X)$  будем строить индукцией по  $k$  так, чтобы выполнялось равенство  $\partial\tau_k = \tau_{k-1}\partial$ . А именно, для каждого заданного элемента  $e_\alpha^k \in T_k(M_\alpha)$  рассмотрим  $\tau_{k-1}(\partial e_\alpha^k) \in T'_{k-1}(M_\alpha)$ . Легко проверить, что существует цепь  $c_\alpha^k \in H_k(M_\alpha)$ , для которой  $\partial c_\alpha^k = \tau_{k-1}(\partial e_\alpha^k)$ . При  $k = 1$  это следует из того, что  $\tau_0$  индуцирует отображение нульмерных гомологий, а при  $k > 1$  — из того, что  $\partial\tau_{k-1}(\partial e_\alpha^k) = \tau_{k-2}(\partial\partial e_\alpha^k) = 0$ , а по условию  $H_{k-1}(T'(M_\alpha)) = 0$ . Положим  $\tau_k(e_\alpha^k) = c_\alpha^k$  и построим гомоморфизм  $\tau_k: T_k(X) \rightarrow T'_k(X)$  с помощью описанной выше конструкции.

Для цепных отображений  $\tau, \bar{\tau}: T \rightarrow T'$ , индуцирующих одно и то же естественное преобразование  $\varphi: H_0(T) \rightarrow H_0(T')$ , цепная гомотопия  $D_k: T_k(X) \rightarrow T'_{k+1}(X)$  строится аналогично. Мы хотим, чтобы выполнялись равенства  $\partial D_0 = \tau_0 - \bar{\tau}_0$ ,  $\partial D_k = \tau_k - \bar{\tau}_k - D_{k-1}\partial$  при  $k > 1$ . Для построения такого гомоморфизма  $D_k$  достаточно, чтобы для любого выбранного элемента  $e_\alpha^k$  цепь  $\tau_k(e_\alpha^k) - \bar{\tau}_k(e_\alpha^k) - D_{k-1}\partial e_\alpha^k$  (цепь  $\tau_0(e_\alpha^0) - \bar{\tau}_0(e_\alpha^0)$  при  $k = 0$ ) была границей. При  $k = 0$  требуемое свойство следует из того, что  $\tau_0$  и  $\bar{\tau}_0$  индуцируют одно и то же отображение гомологий. А при  $k > 1$  имеет место

равенство

$$\partial\tau_k - \partial\bar{\tau}_k - \partial D_{k-1}\partial = \tau_{k-1}\partial - \bar{\tau}_{k-1}\partial - \partial D_{k-1}\partial = D_{k-2}\partial\partial = 0;$$

остаётся воспользоваться ацикличностью функтора  $T'$ .  $\square$

### Диагональная аппроксимация Александра—Уитни

Пусть  $d: |K| \rightarrow |K \times K|$  — диагональное отображение,  $d_*: H_*(K) \rightarrow H_*(K \times K) \cong H_*(C_*(K) \otimes C_*(K))$  — индуцированное им отображение гомологий. На уровне цепей  $d_0$  сопоставляет вершине  $v$  цепь  $v \otimes v$ . Будем называть *диагональной аппроксимацией* любое естественное цепное отображение  $\tau: C_*(K) \rightarrow C_*(K) \otimes C_*(K)$ , переводящее  $v$  в  $v \otimes v$ .

Функтор  $C_*(K)$  свободен относительно моделей  $\mathcal{M} = \{\Delta^k\}$  (см. пример 9.2), а функтор  $C_*(K) \otimes C_*(K)$  ацикличен относительно этих моделей. Поэтому согласно теореме об ациклических моделях любая диагональная аппроксимация индуцирует в гомологиях отображение  $d_*$ .

Для вычислений удобна *диагональная аппроксимация Александра—Уитни*, которая задаётся формулой

$$\tau([v_0, v_1, \dots, v_n]) = \sum_{i=0}^n [v_0, \dots, v_i] \otimes [v_i, \dots, v_n].$$

Нужно лишь проверить, что это отображение цепное, т. е.  $\tau\partial = \partial\tau$ . Ясно, что

$$\begin{aligned} \tau(\partial[0, 1, \dots, n]) &= \tau\left(\sum (-1)^i [0, \dots, \hat{i}, \dots, n]\right) = \\ &= \sum_{i < j} (-1)^i [0, \dots, \hat{i}, \dots, j] \otimes [j, \dots, n] + \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^i [0, \dots, j] \otimes [j, \dots, \hat{i}, \dots, n]; \\ \partial(\tau[0, 1, \dots, n]) &= \partial \sum [0, \dots, j] \otimes [j, \dots, n] = \\ &= \sum_i (-1)^i [0] \otimes [0, \dots, \hat{i}, \dots, n] + \\ &\quad + \sum_{i \leq j, j \neq 0} (-1)^i [0, \dots, \hat{i}, \dots, j] \otimes [j, \dots, n] + \\ &\quad + \sum_{i \geq j, j \neq n} (-1)^i [0, \dots, j] \otimes [j, \dots, \hat{i}, \dots, n] + \\ &\quad + \sum_i (-1)^i [0, \dots, \hat{i}, \dots, n] \otimes [n]. \end{aligned}$$

Второе выражение отличается от первого дополнительной суммой

$$\begin{aligned}
 & + [0] \otimes [1, \dots, n] \\
 - [0] \otimes [1, \dots, n] & - [0, 1] \otimes [2, \dots, n] \\
 + [0, 1] \otimes [2, \dots, n] & + [0, 1, 2] \otimes [3, \dots, n] \\
 \dots & \dots \\
 + (-1)^{n-1} [0, 1, \dots, n-2] \otimes [n-1, n] & + (-1)^{n-1} [0, 1, \dots, n-1] \otimes [n] \\
 + (-1)^n [0, 1, \dots, n-1] \otimes [n], &
 \end{aligned}$$

но эта сумма равна нулю.

Отображение  $C_*(K) \rightarrow C_*(K \times K)$ , представляющее собой композицию

$$[0, 1, \dots, n] \mapsto \sum [0, \dots, i] \otimes [i, \dots, n] \mapsto \sum [0, \dots, i] \times [i, \dots, n],$$

индуцирует в гомологиях отображение  $d_*$ , а в когомологиях — отображение  $d^*$ . Из этого уже легко вывести, что композиция отображений

$$H^*(K) \otimes H^*(K) \longrightarrow H^*(K \times K) \xrightarrow{d^*} H^*(K)$$

даёт сур-произведение. Действительно, на уровне коцепей эта композиция сопоставляет коцепи  $c^p \otimes c^q$  коцепь  $c^{p+q}$ , для которой

$$\begin{aligned}
 \langle c^{p+q}, [v_0, v_1, \dots, v_{p+q}] \rangle &= \\
 &= \left\langle \theta(c^p \otimes c^q), \sum [v_0, \dots, v_i] \otimes [v_i, \dots, v_{p+q}] \right\rangle = \\
 &= \sum \langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle \langle c^q, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle.
 \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того, что остальные слагаемые обращаются в нуль. Таким образом,  $c^{p+q} = c^p \smile c^q$ , что и требовалось.

### 9.6. Внешнее когомологическое произведение

Пусть  $K$  и  $L$  — конечные симплициальные комплексы,  $C^*(K)$  и  $C^*(L)$  — симплициальные коцепные комплексы,  $C^*(K \times L)$  — клеточный коцепной комплекс. Коцепям  $c^p \in C^p(K)$  и  $c^q \in C^q(L)$  можно сопоставить коцепь  $c^p \times c^q \in C^{p+q}(K \times L)$  следующим образом:

$$\langle c^p \times c^q, \Delta^{p'} \times \Delta^{q'} \rangle = \delta_{pp'} \delta_{qq'} \langle c^p, \Delta^{p'} \rangle \langle c^q, \Delta^{q'} \rangle.$$

Из равенства  $\partial(\Delta^p \times \Delta^q) = \partial\Delta^p \times \Delta^q + (-1)^p \Delta^p \times \partial\Delta^q$  следует, что  $\delta(c^p \times c^q) = \delta c^p \times c^q + (-1)^p c^p \times \delta c^q$ . Поэтому получаем гомоморфизм групп  $H^p(K) \times H^q(L) \rightarrow H^{p+q}(K \times L)$ , называемый *внешним когомологическим умножением*.

Легко проверить следующие свойства внешнего когомологического умножения:

$$1) (\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma);$$

$$2) \text{ если } p_K: K \times L \rightarrow K \text{ — естественная проекция, то } p_K^*(\alpha^p) = \alpha^p \times 1_L;$$

3) если отображение  $T: X \times Y \rightarrow Y \times X$  задано формулой  $T(x, y) = (y, x)$ , то  $T^*(\beta^q \times \alpha^p) = (-1)^{pq} \alpha^p \times \beta^q$ .

Внешнее когомологическое умножение тесно связано с сир-умножением. А именно,  $\alpha^p \cup \beta^q = d^*(\alpha^p \times \beta^q)$ , где отображение  $d^*: H^{p+q}(K \times K) \rightarrow H^{p+q}(K)$  индуцировано диагональным отображением  $d$ . Действительно,  $\langle d^*(\alpha^p \times \beta^q), \Delta^{p+q} \rangle = \langle \alpha^p \times \beta^q, d(\Delta^{p+q}) \rangle$ . Отображение  $d$  не клеточное, поэтому  $d(\Delta^{p+q})$  нужно заменить на диагональную аппроксимацию Александера—Уитни. В результате получим

$$\begin{aligned} \langle d^*(\alpha^p \times \beta^q), [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle &= \\ &= \left\langle \alpha^p \times \beta^q, \sum_{i=0}^{p+q} [v_0, \dots, v_i] \times [v_i, \dots, v_{p+q}] \right\rangle = \\ &= \langle \alpha^p \times \beta^q, [v_0, \dots, v_p] \times [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle = \langle \alpha^p \cup \beta^q, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle, \end{aligned}$$

что и требовалось.

При вычислении колец когомологий прямых произведений симплициальных комплексов часто бывает полезно следующее утверждение.

**Теорема 9.4.** *В кольце  $H^*(K \times L)$  выполняется равенство*

$$(\alpha_1^{p_1} \times \beta_1^{q_1}) \cup (\alpha_2^{p_2} \times \beta_2^{q_2}) = (-1)^{q_1 p_2} (\alpha_1^{p_1} \cup \alpha_2^{p_2}) \times (\beta_1^{q_1} \cup \beta_2^{q_2}).$$

**Доказательство.** Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} (\alpha_1^{p_1} \times \beta_1^{q_1}) \cup (\alpha_2^{p_2} \times \beta_2^{q_2}) &= d_{K \times L}^*((\alpha_1^{p_1} \times \beta_1^{q_1}) \times (\alpha_2^{p_2} \times \beta_2^{q_2})) = \\ &= d_{K \times L}^*(\alpha_1^{p_1} \times \beta_1^{q_1} \times \alpha_2^{p_2} \times \beta_2^{q_2}), \\ (\alpha_1^{p_1} \cup \alpha_2^{p_2}) \times (\beta_1^{q_1} \cup \beta_2^{q_2}) &= d_K^*(\alpha_1^{p_1} \times \alpha_2^{p_2}) \times d_L^*(\beta_1^{q_1} \times \beta_2^{q_2}). \end{aligned}$$

Ясно также, что  $d_{K \times L} = (\text{id}_K \times T \times \text{id}_L) \circ (d_K \times d_L)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} (\alpha_1^{p_1} \times \beta_1^{q_1}) \cup (\alpha_2^{p_2} \times \beta_2^{q_2}) &= \\ &= (d_K \times d_L)^*(\text{id}_K \times T \times \text{id}_L)^*(\alpha_1^{p_1} \times \beta_1^{q_1} \times \alpha_2^{p_2} \times \beta_2^{q_2}) = \\ &= (-1)^{q_1 p_2} (d_K \times d_L)^*(\alpha_1^{p_1} \times \alpha_2^{p_2} \times \beta_1^{q_1} \times \beta_2^{q_2}) = \\ &= (-1)^{q_1 p_2} (d_K \times d_L)^* d_K^*(\alpha_1^{p_1} \times \alpha_2^{p_2}) \times d_L^*(\beta_1^{q_1} \times \beta_2^{q_2}). \quad \square \end{aligned}$$

**Следствие.** *Если  $\alpha \in H^*(K)$  и  $\beta \in H^*(L)$ , то  $p_K^* \alpha \cup p_L^* \beta = \alpha \times \beta$ .*

**Доказательство.** Прежде всего воспользуемся тем, что  $p_K^* \alpha = \alpha \times 1_L$  и  $p_L^* \beta = 1_K \times \beta$ . Учитывая, что в рассматриваемом случае  $q_1 = p_2 = 0$ , получаем  $(\alpha \times 1_L) \cup (1_K \times \beta) = (\alpha \cup 1_L) \times (1_K \cup \beta) = \alpha \times \beta$ .  $\square$

**Задача 9.6.** а) Вычислите кольцо когомологий  $\mathbb{R}P^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}P^{n_k}$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ .

б) Вычислите кольцо когомологий  $\mathbb{C}P^{n_1} \times \dots \times \mathbb{C}P^{n_k}$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ .

**Задача 9.7.** Докажите, что если хотя бы одна из групп  $H^*(K)$  и  $H^*(L)$  не имеет кручения, то умножение в кольце  $H^*(K \times L)$  полностью определяется умножениями в кольцах  $H^*(K)$  и  $H^*(L)$ .

**Задача 9.8.** Пусть  $K = \mathbb{R}P^2$ ,  $L_1 = \mathbb{R}P^2 \vee S^3$  и  $L_2 = \mathbb{R}P^3$ . Докажите, что кольца  $H^*(L_1)$  и  $H^*(L_2)$  изоморфны, а кольца  $H^*(K \times L_1)$  и  $H^*(K \times L_2)$  не изоморфны.

### Сигнатура прямого произведения

С помощью внешнего когомологического умножения можно доказать теорему о сигнатуре прямого произведения двух многообразий. Будем считать, что  $\sigma(M^n) = 0$ , если  $n$  не делится на 4.

**Теорема 9.5.** *Справедливо равенство  $\sigma(M^p \times N^q) = \sigma(M^p)\sigma(N^q)$ .*

**Доказательство.** Если  $p + q$  не делится на 4, то одно из чисел  $p$  и  $q$  не делится на 4, поэтому  $\sigma(M^p \times N^q) = 0$  и  $\sigma(M^p)\sigma(N^q) = 0$ . В дальнейшем будем считать, что  $p + q = 4k$ . Для когомологий с коэффициентами в  $\mathbb{R}$  согласно теореме Кюннета

$$H^{2k}(M^p \times N^q) \cong \bigoplus_{i=0}^{2k} (H^i(M^p) \otimes_{\mathbb{R}} H^{2k-i}(N^q)).$$

Если  $i + j \neq p$ , то форма пересечения принимает на элементах  $\alpha_1^i \otimes \beta_1^{2k-i}$  и  $\alpha_2^j \otimes \beta_2^{2k-j}$  нулевое значение. Поэтому рассмотрим разложение пространства  $H^{2k}(M^p \times N^q)$  в сумму пространств вида

$$(H^i(M^p) \otimes_{\mathbb{R}} H^{2k-i}(N^q)) \oplus (H^{p-i}(M^p) \otimes_{\mathbb{R}} H^{2k+i-p}(N^q)), \quad (1)$$

где  $i < p$ , и ещё пространства  $H^{p/2}(M^p) \otimes_{\mathbb{R}} H^{q/2}(N^q)$ , которое есть только в том случае, когда числа  $p$  и  $q$  чётны. Эти пространства взаимно ортогональны относительно формы пересечения.

Докажем, что на каждом подпространстве (1) форма пересечения имеет нулевую сигнатуру, т.е. сигнатура  $\sigma(M^p \times N^q)$  равна сигнатуре ограничения формы пересечения на подпространство  $H^{p/2}(M^p) \otimes_{\mathbb{R}} H^{q/2}(N^q)$ . Пусть  $i < p/2$ . Выберем в  $H^i(M^p)$  базис  $\{\alpha_s\}$ . Пусть  $\{\alpha_s^*\}$  — двойственный базис пространства  $H^{p-i}(M^p)$ , т.е.  $\langle \alpha_s \cup \alpha_r^*, [M^p] \rangle = \delta_{rs}$ . Аналогично выберем в  $H^{2k-i}(N^q)$  базис  $\{\beta_t\}$  и в  $H^{2k+i-p}(N^q)$  выберем двойственный ему базис  $\{\beta_t^*\}$ . В пространстве (1) в качестве базиса можно взять векторы вида  $\alpha_s \otimes \beta_t$  и  $\alpha_r^* \otimes \beta_u^*$ . Форма пересечения обращается в нуль на всех парах базисных векторов, кроме пар вида  $(\alpha_s \otimes \beta_t, \alpha_s^* \otimes \beta_t^*)$ .



Теорема 9.4 показывает, что на такой паре базисных векторов форма принимает значение  $(-1)^{\dim \beta_i \dim \alpha_s^*} = (-1)^{(2k-i)(p-i)}$ . Ясно также, что форма пересечения симметрическая. Поэтому в выбранном базисе ограничение формы пересечения на пространство (1) задаётся прямой суммой матриц  $(-1)^d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , где  $d = (2k - i)(p - i)$ . Сигнатура каждой такой матрицы равна нулю.

Если числа  $p$  и  $q$  нечётны, то пространство  $H^{p/2}(M^p) \otimes_{\mathbb{R}} H^{q/2}(N^q)$  отсутствует, поэтому  $\sigma(M^p \times N^q) = 0$ .

Если числа  $p$  и  $q$  при делении на 4 дают остаток 2, то формы пересечения на пространствах  $H^{p/2}(M^p)$  и  $H^{q/2}(N^q)$  кососимметрические. Значит, в этих пространствах можно выбрать базисы так, что форма пересечения будет задаваться прямой суммой матриц  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ограничение формы пересечения на тензорное произведение двух двумерных пространств с такими матрицами пересечения задаётся матрицей

$$-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

знак минус здесь появился из-за того, что число  $\frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2}$  нечётно. Легко проверить, что сигнатура полученной матрицы равна нулю. Поэтому  $\sigma(M^p \times N^q) = 0$ .

Наконец, пусть оба числа  $p$  и  $q$  делятся на 4. Выберем базисы в пространствах  $H^{p/2}(M^p)$  и  $H^{q/2}(N^q)$  так, чтобы матрицы пересечения в этих базисах были диагональны. Возьмём тензорное произведение этих базисов и запишем матрицу  $A$  ограничения формы пересечения на пространство  $H^{p/2}(M^p) \otimes H^{q/2}(N^q)$ . Пусть  $r$  и  $s$  — количества положительных диагональных элементов для форм пересечения в  $H^{p/2}(M^p)$  и  $H^{q/2}(N^q)$ . Матрица  $A$  диагональная с  $rs + \left(\frac{p}{2} - r\right)\left(\frac{q}{2} - s\right)$  положительными элементами на диагонали и  $r\left(\frac{q}{2} - s\right) + s\left(\frac{p}{2} - r\right)$  отрицательными. Её сигнатура равна  $\left(r - \left(\frac{p}{2} - r\right)\right)\left(s - \left(\frac{q}{2} - s\right)\right) = \sigma(M^p)\sigma(N^q)$ .  $\square$

### Невырожденные билинейные отображения

Билинейное отображение  $f: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$  называют *невырожденным*, если из того, что  $f(x, y) = 0$ , следует, что  $x = 0$  или  $y = 0$ . Билинейному невырожденному отображению  $f: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$  можно сопоставить отображение  $F: \mathbb{R}P^{r-1} \times \mathbb{R}P^{s-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ , а именно поло-

жим  $F(\{\lambda x\}, \{\mu y\}) = \{\alpha f(x, y)\}$ . Это определение корректно, поскольку  $f(\lambda x, \mu y) = \lambda \mu f(x, y)$ .

Согласно решению задачи 9.6 кольцо когомологий пространства  $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  изоморфно кольцу многочленов  $\mathbb{Z}_2[u, v]$ , профакторизованному по соотношениям  $u^{n+1} = 0$  и  $v^{m+1} = 0$ . Используя это свойство, можно получить некоторые ограничения на числа  $r, s, n$ , для которых существует невырожденное билинейное отображение  $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Эти ограничения были получены одновременно Штифелем [St7] и Хопфом [Ho8]; их статьи поступили в редакцию журнала «Commentarii Mathematici Helvetici» в один и тот же день.

**Теорема 9.6 (Штифель—Хопф).** *Если существует невырожденное билинейное отображение  $f: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ , то число  $\binom{n}{k}$  чётно для всех  $k$ , удовлетворяющих неравенствам  $n - s < k < r$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим в  $H_1(\mathbb{R}P^{r-1} \times \mathbb{R}P^{s-1}; \mathbb{Z}_2)$  гомологические классы  $a$  и  $b$ , представленные циклами  $\mathbb{R}P^1 \times \{*\}$  и  $\{*\} \times \mathbb{R}P^1$ . Когомологические классы  $\alpha$  и  $\beta$ , двойственные (в смысле линейной алгебры) классам  $a$  и  $b$ , мультипликативно порождают кольцо когомологий пространства  $\mathbb{R}P^{r-1} \times \mathbb{R}P^{s-1}$ . Пусть  $c$  и  $\gamma$  — образующие одномерных гомологий и когомологий пространства  $\mathbb{R}P^{n-1}$ . Достаточно доказать, что  $F^*\gamma = \alpha + \beta$ . Действительно, из этого равенства следует, что  $0 = F^*(\gamma^n) = (\alpha + \beta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$ . Поэтому если  $k < r$  и  $n - k < s$  (т. е.  $n - s < k < r$ ), то число  $\binom{n}{k}$  чётно.

Прежде всего покажем, что  $F_*a = c$ . Для этого достаточно проверить, что  $F_*a \neq 0$ . Гомологический класс, представленный петлёй в  $\mathbb{R}P^{n-1}$ , ненулевой тогда и только тогда, когда при поднятии этой петли в  $S^{n-1}$  получается незамкнутый путь. В рассматриваемой ситуации условие  $f(-x, y) = -f(x, y)$  обеспечивает незамкнутость поднятия петли. Поэтому  $F_*a = c$  и аналогично  $F_*b = c$ . Таким образом,  $\langle F^*\gamma, a \rangle = \langle \gamma, F_*a \rangle = \langle \gamma, c \rangle = 1$  и  $\langle F^*\gamma, b \rangle = 1$ . Поэтому  $F^*\gamma = \alpha + \beta$ .  $\square$

**Задача 9.9.** Докажите, что если существует невырожденное билинейное отображение  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , то  $n = 2^k$  для некоторого  $k$ .

**Задача 9.10.** а) Докажите, что существует невырожденное билинейное умножение  $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{r+s-1}$ .

б) Докажите, что если числа  $r$  и  $s$  чётны, то существует невырожденное билинейное умножение  $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{r+s-2}$ .

в) Докажите, что если числа  $r$  и  $s$  делятся на 4, то существует невырожденное билинейное умножение  $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{r+s-4}$ .

г) Докажите, что если числа  $r$  и  $s$  делятся на 8, то существует невырожденное билинейное умножение  $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{r+s-8}$ .

## Глава III

# Применения симплициальных гомологий

В этой главе обсуждаются различные приложения симплициальных гомологий. Основу этих приложений составляет более подробное исследование свойств симплициальных гомологий и когомологий и введение на них дополнительных структур.

## § 10. Гомологии и гомотопии

Здесь рассматриваются некоторые взаимосвязи между гомологиями и гомотопиями. Прежде всего доказывается теорема Гуревича об изоморфности групп  $\pi_n(K)$  и  $H_n(K)$  для  $(n - 1)$ -связного симплициального комплекса  $K$ . Затем строится аппарат теории препятствий, который применяется для интерпретации групп когомологий как гомотопических классов отображений в пространство типа  $K(\pi, n)$ .

### 10.1. Теорема Гуревича

Определим отображение  $h: \pi_n(K, x_0) \rightarrow H_n(K)$ , где  $K$  — симплициальный комплекс и  $x_0 \in K$ , следующим образом. Рассмотрим сфероид  $\varphi: (S^n, s_0) \rightarrow (K, x_0)$ . Он индуцирует гомоморфизм гомологий  $\varphi_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(K)$ . Положим  $h(\varphi) = \varphi_*([S^n])$ , где  $[S^n]$  — фундаментальный класс. Гомотопные отображения  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  индуцируют одинаковые гомоморфизмы гомологий, поэтому  $h(\varphi_0) = h(\varphi_1)$ , т. е. отображение  $h$  действительно определено для гомотопической группы  $\pi_n(K, x_0)$ .

Проверим, что  $h$  — гомоморфизм групп. Сфероиды  $\varphi$  и  $\psi$  мы будем рассматривать как отображения  $(D^n, \partial D^n) \rightarrow (K, x_0)$ . Мы будем предполагать, что сфера  $S^n$  склеена из двух шаров  $D^n$ , триангулированных столь мелко, что отображения  $\varphi$  и  $\psi$  гомотопны симплициальным отображениям; предполагается также, что объединение триангуляций шаров даёт триангуляцию сферы. В таком случае гомологические классы  $h(\varphi)$  и  $h(\psi)$  представлены циклами  $\sum_{\alpha} \varphi(\Delta_{1\alpha}^n)$  и  $\sum_{\beta} \varphi(\Delta_{2\beta}^n)$ , где  $\Delta_{1\alpha}^n$  и  $\Delta_{2\beta}^n$  — симплексы триангуляций первого и второго шара, а гомологический класс

$h(\varphi + \psi)$  представлен циклом  $\sum_{\alpha} \varphi(\Delta_{1\alpha}^n) + \sum_{\beta} \varphi(\Delta_{2\beta}^n)$ . Потому  $h$  — гомоморфизм групп. Его называют *гомоморфизмом Гуревича*.

Гомоморфизм  $h$ , как и сама группа  $\pi_n(K, x_0)$ , зависит от выбора отмеченной точки  $x_0$ . Но эта зависимость не очень существенная. А именно, если  $\gamma$  — произвольный путь из  $x_0$  в  $x_1$ , то следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(K, x_0) & \xrightarrow{\gamma^*} & \pi_n(K, x_1) \\ & \searrow h & \swarrow h \\ & & H_n(X). \end{array}$$

**Теорема 10.1 (Пуанкаре).** *Если  $K$  — связный симплициальный комплекс, то гомоморфизм  $h: \pi_1(K) \rightarrow H_1(K)$  — эпиморфизм, ядром которого служит коммутант\*  $[\pi_1(K), \pi_1(K)]$  группы  $\pi_1(K)$ .*

**Доказательство.** Будем предполагать, что отмеченная точка  $x_0$  — вершина комплекса  $K$ . Докажем сначала эпиморфность. Пусть  $\Delta_i^1 = [v_{0i}, v_{1i}]$ , где  $v_{0i}$  и  $v_{1i}$  — вершины комплекса  $K$ , и  $\sum a_i \Delta_i^1$  — цикл. Тогда  $0 = \partial(\sum a_i \Delta_i^1) = \sum a_i v_{1i} - \sum a_i v_{0i}$ . Пусть  $\gamma_{\alpha}$  — путь из отмеченной точки  $x_0$  в вершину  $v_{\alpha}$ , идущий по рёбрам комплекса  $K$ . Этому пути соответствует цепь  $\hat{\gamma}_{\alpha} \in C_1(K)$ . Путь  $\gamma_{0i} \Delta_i^1 \gamma_{1i}^{-1}$  — петля с началом  $x_0$ . Ясно, что

$$h\left(\prod (\gamma_{0i} \Delta_i^1 \gamma_{1i}^{-1})^{a_i}\right) = \sum a_i (\hat{\gamma}_{0i} + \Delta_i^1 - \hat{\gamma}_{1i}).$$

Из равенства  $\sum a_i v_{1i} = \sum a_i v_{0i}$  следует равенство  $\sum a_i \hat{\gamma}_{1i} = \sum a_i \hat{\gamma}_{0i}$ , поскольку  $v_{\alpha}$  — свободные образующие группы  $C_0(K)$ . Итак, мы построили элемент фундаментальной группы, который отображается в  $\sum a_i \Delta_i^1$ .

Образом гомоморфизма  $h$  является абелева группа, поэтому его ядро содержится в коммутанте группы  $\pi_1(K)$ . Пусть  $\omega$  — петля в  $K$  с началом  $x_0$ , для которой  $h(\omega) = \partial(\sum a_i \Delta_i^2)$ . Любая петля в  $K$  с началом в вершине гомотопна петле, идущей по рёбрам. Поэтому можно считать, что  $\omega = \prod \gamma_{j_0, j_1}$ , где  $\gamma_{j_0, j_1}$  — ориентированное ребро комплекса  $K$ . Для одномерных цепей имеет место равенство

$$\sum \hat{\gamma}_{j_0, j_1} = \sum a_i (\hat{\gamma}_{i_0, i_1} + \hat{\gamma}_{i_1, i_2} + \hat{\gamma}_{i_2, i_0}), \tag{1}$$

где  $\hat{\gamma}_{\alpha, \beta}$  — ориентированный одномерный симплекс  $[v_{\alpha}, v_{\beta}]$ .

Пусть  $\gamma_{\alpha}$  — путь из отмеченной точки  $x_0$  в вершину  $v_{\alpha}$  (если  $v_{\alpha} = x_0$ , то путь  $\gamma_{\alpha}$  постоянный). Пусть, далее,  $\gamma_{\alpha} \gamma_{\alpha, \beta} \gamma_{\beta}^{-1}$  — образ петли  $\gamma_{\alpha} \gamma_{\alpha, \beta} \gamma_{\beta}^{-1}$  в факторгруппе  $\pi_1(K)$  по коммутанту; эта факторгруппа абелева. Равенство (1) выполняется для образующих  $\hat{\gamma}_{\alpha, \beta}$  свободной группы, поэтому

\*) *Коммутантом* группы называют подгруппу, порождённую элементами вида  $aba^{-1}b^{-1}$ .

аналогичное равенство выполняется для элементов  $\overline{\gamma_\alpha \gamma_{\alpha,\beta} \gamma_\beta^{-1}}$ ; запишем это равенство в мультипликативном виде:

$$\prod \overline{\gamma_{j_0} \gamma_{j_0, j_1} \gamma_{j_1}^{-1}} = \prod \left( \overline{\gamma_{i_0} \gamma_{i_0, i_1} \gamma_{i_1}^{-1}} \cdot \overline{\gamma_{i_1} \gamma_{i_1, i_2} \gamma_{i_2}^{-1}} \cdot \overline{\gamma_{i_2} \gamma_{i_2, i_0} \gamma_{i_0}^{-1}} \right)^{a_i}.$$

Из замкнутости пути  $\omega$  следует, что

$$\prod \overline{\gamma_{j_0} \gamma_{j_0, j_1} \gamma_{j_1}^{-1}} = \prod \overline{\gamma_{j_0, j_1}} = \overline{\omega}.$$

Кроме того,

$$\overline{\gamma_{i_0} \gamma_{i_0, i_1} \gamma_{i_1}^{-1}} \cdot \overline{\gamma_{i_1} \gamma_{i_1, i_2} \gamma_{i_2}^{-1}} \cdot \overline{\gamma_{i_2} \gamma_{i_2, i_0} \gamma_{i_0}^{-1}} = \overline{\gamma_{i_0} \gamma_{i_0, i_1} \gamma_{i_1, i_2} \gamma_{i_2, i_0} \gamma_{i_0}^{-1}} = 1,$$

поскольку петля  $\gamma_{i_0, i_1} \gamma_{i_1, i_2} \gamma_{i_2, i_0}$  стягиваема (см. рис. 31). Следовательно,  $\overline{\omega} = 1$ , что и требовалось.  $\square$

**Теорема 10.2** (Гуревич [Гу]). *Пусть  $K$  — симплициальный комплекс, для которого  $\pi_0(K) = \pi_1(K) = \dots = \pi_{n-1}(K) = 0$ ,  $n \geq 2$ . Тогда гомоморфизм Гуревича  $h: \pi_n(K) \rightarrow H_n(K)$  — изоморфизм.*

**Доказательство.** Сначала проверим, что гомоморфизм  $h$  — эпиморфизм. Пусть  $\sum a_i \Delta_i^n \in C_n(K)$  — произвольный цикл. Из равенств  $\pi_0(K) = \pi_1(K) = \dots = \pi_{n-1}(K) = 0$  следует, что тождественное отображение  $K \rightarrow K$  гомотопно отображению  $f: K \rightarrow K$ , переводящему остов  $K^{n-1}$  в отмеченную точку  $x_0 \in K$  (см. часть I, доказательство теоремы Уайтхеда). Можно считать, что  $x_0$  — вершина комплекса  $K$ . Тогда ограничение отображения  $f$  на  $K^{n-1}$  является симплициальным отображением, поэтому существует симплициальная аппроксимация  $g: K^{(m)} \rightarrow K$ , ограничение которой на  $K^{n-1}$  совпадает с  $f$ , т. е.  $g(K^{n-1}) = x_0$ .

Рис. 31. Стягивание петли

Итак,  $g: K^{(m)} \rightarrow K$  — симплициальное отображение, которое гомотопно тождественному и переводит  $K^{n-1}$  в  $x_0$ . Пусть  $\varphi_i$  — ограничение отображения  $g$  на  $\Delta_i^n$ ;  $\varphi_i$  можно рассматривать как сфероид  $(D^n, \partial D^n) \rightarrow (K, x_0)$ . Ясно, что  $\sum a_i h(\varphi_i) = g_*([\sum a_i \Delta_i^n])$ , где  $[\sum a_i \Delta_i^n]$  — гомологический класс, представленный циклом  $\sum a_i \Delta_i^n$ . Но отображение  $g$  гомотопно тождественному, поэтому  $g_*([\sum a_i \Delta_i^n]) = [\sum a_i \Delta_i^n]$ .

Проверим теперь, что  $h$  — мономорфизм. Рассмотрим отображение  $\varphi: S^n \rightarrow K$ , для которого  $\varphi_*([S^n]) = 0$ . Требуется доказать, что  $\varphi$  представляет нулевой элемент группы  $\pi_n(K)$ . Отображение  $\varphi$  при этом можно считать симплициальным.

*Л е м м а.* Существует симплициальный комплекс  $L^{n+1} \supset S^n$ , в котором цикл  $[S^n]$  гомологичен нулю, причём отображение  $\varphi$  можно продолжить на  $L^{n+1}$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть на уровне цепей  $\varphi_*([S^n]) = \partial(\sum \Delta_i^{n+1})$ , где среди симплексов  $\Delta_i^{n+1} \subset K$  могут быть и совпадающие. В качестве первого приближения к  $L^{n+1}$  возьмём несвязное объединение сферы  $S^n$  и симплексов  $\hat{\Delta}_i^{n+1}$ , каждый из которых отождествляется с соответствующим симплексом  $\Delta_i^{n+1} \subset K$ ; отображение  $\varphi$  продолжается на  $\hat{\Delta}_i^{n+1}$  как тождественное отображение. В полученном симплициальном комплексе цикл  $z_n = [S^n] - \sum \partial \hat{\Delta}_i^{n+1}$  гомологичен  $[S^n]$  и  $\varphi_*(z_n) = 0$ .

Следующее приближение к  $L^{n+1}$  построим так, чтобы цикл  $z_n$  стал гомологичен циклу  $\omega_n = \sum \Delta_j^n$ , где  $\varphi(\Delta_j^n) \subset K^{n-1}$ . Предположим, что  $z_n = \sum \Delta_{\alpha_1}^n$  и  $\varphi(\Delta_{\alpha_1}^n) \not\subset K^{n-1}$ , т. е.  $\Delta_{\alpha_1}^n$  гомеоморфно отображается на некоторый симплекс из  $K$ . Из равенства  $\varphi_*(z_n) = 0$  следует, что некоторый другой симплекс  $\Delta_{\alpha_2}^n$  гомеоморфно отображается на тот же самый симплекс, но ориентации симплексов  $\Delta_{\alpha_1}^n$  и  $\Delta_{\alpha_2}^n$  противоположны. Приклеим к  $\Delta_{\alpha_1}^n$  и  $\Delta_{\alpha_2}^n$  триангулированную призму  $\Delta^n \times I$ , которая ориентирована так, что на  $\Delta^n \times \{0\} = \Delta_{\alpha_1}^n$  и на  $\Delta^n \times \{1\} = \Delta_{\alpha_2}^n$  индуцируются нужные ориентации. На  $\Delta^n \times I$  отображение  $\varphi$  продолжается так, что все точки  $\{x\} \times I$  отображаются в одну и ту же точку. Тогда  $\partial(\Delta^n \times I) = \Delta_{\alpha_1}^n + \Delta_{\alpha_2}^n + c_n$ , где цепь  $c_n$  содержит только симплексы, для которых выполняется условие  $\varphi(\Delta^n) \subset K^{n-1}$ . Заменим в цикле  $z_n$  цепь  $\Delta_{\alpha_1}^n + \Delta_{\alpha_2}^n$  на гомологичную ей цепь  $-c_n$ . После нескольких таких операций получим требуемый цикл  $\omega_n$ .

Наконец, добавим к полученному на предыдущем шаге симплициальному комплексу конусы над всеми симплексами  $\Delta_j^n$ , входящими в цикл  $\omega_n$ . Пусть  $V$  — объединение всех таких симплексов,  $CV$  — конус над  $V$ . Конус  $CV$  ацикличесен, поэтому цикл  $\omega_n$  теперь гомологичен нулю. Остаётся продолжить  $\varphi$  на  $CV$ . Отображение  $\varphi: V \rightarrow K$  продолжается на  $CV$  тогда и только тогда, когда  $\varphi$  гомотопно постоянному отображению. По условию  $\varphi(V) \subset K^{n-1}$ . Из равенств  $\pi_0(K) = \pi_1(K) = \dots = \pi_{n-1}(K) = 0$  следует, что тождественное отображение  $K \rightarrow K$  гомотопно отображению  $f: K \rightarrow K$ , переводящему остов  $K^{n-1}$  в  $x_0$ . Поэтому отображение  $\varphi: V \rightarrow K^{n-1} \subset K$  гомотопно в  $K$  постоянному отображению.  $\square$

Пусть  $\varphi: L^{n+1} \rightarrow K$  — непрерывное отображение,  $S^n \subset L^{n+1}$  и  $[S^n] = \partial c_{n+1}$  для некоторой цепи  $c_{n+1} \in C_{n+1}(K)$ . Заменив  $\varphi$  на гомотопное отображение, можно считать, что  $\varphi(L^{n-1}) = x_0$ . Тогда каждому симплексу  $\Delta^n \subset L^{n+1}$  соответствует отображение  $(\Delta^n, \partial \Delta^n) \xrightarrow{\varphi} (K, x_0)$ , поэтому получаем гомоморфизм  $\Phi_*: C_n(L^{n+1}) \rightarrow \pi_n(K)$ .

Проверим, что  $\Phi_*([S^n])$  — это гомотопический класс отображения  $S^n \xrightarrow{\varphi} K$ . Пусть  $\Delta_1^n, \dots, \Delta_k^n$  — те симплексы в  $S^n$ , для которых  $\varphi(\Delta_i^n) \neq x_0$ .

Если  $k \leq 2$ , то требуемое утверждение непосредственно следует из определений. При  $k > 2$  можно воспользоваться индукцией по  $k$ .

Итак, нужно доказать, что  $\Phi_*([S^n]) = 0$ . Для любого симплекса  $\Delta^{n+1} \subset \subset L^{n+1}$  элемент  $\Phi_*(\partial\Delta^{n+1})$  соответствует гомотопическому классу отображения  $\partial\Delta^{n+1} \xrightarrow{\varphi} K$ . Это отображение гомотопно постоянному, потому что оно продолжается на  $\Delta^{n+1}$ . Поэтому  $\Phi_*(\partial\Delta^{n+1}) = 0$ . Пусть  $c_{n+1} = \sum a_i \Delta_i^{n+1}$ . Тогда  $\Phi_*([S^n]) = \Phi_*(\partial c_{n+1}) = \sum a_i \Phi_*(\partial\Delta_i^{n+1}) = 0$ , что и требовалось.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Приведённое здесь доказательство теоремы Гуревича следует в основном статье В. А. Рохлина [Р]. В оригинальном доказательстве Гуревича рассматривались не симплициальные комплексы, а пространства более общего вида.

**П р и м е р 10.1.** Шутовским колпаком называют  $SW$ -комплекс  $K$ , который получается отождествлением сторон треугольника, как показано на рис. 32. Шутовской колпак стягиваем.

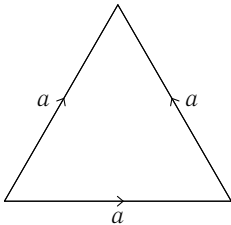


Рис. 32. Шутовской колпак

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Фундаментальная группа  $\pi_1(K)$  порождена одной образующей  $a$ , причём эта образующая удовлетворяет соотношению  $a^2a^{-1} = 1$ , т. е.  $a = 1$ . Таким образом, комплекс  $K$  односвязен.

Цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий комплекса  $K$  имеет вид  $\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow C_2 \xrightarrow{\partial} C_1 \rightarrow 0$ , где  $C_2 \cong \mathbb{Z}$ ,  $C_1 \cong \mathbb{Z}$  и  $\partial$  — изоморфизм. Поэтому  $H_i(K) = 0$  при  $i \geq 1$ . Из теоремы Гуревича следует, что  $\pi_i(K) = 0$  для всех  $i \geq 1$ . Поэтому, воспользовавшись теоремой Уайтхеда (часть I, с. 195), получаем, что  $K$  — стягиваемое пространство.  $\square$

**З а д а ч а 10.1.** Докажите, что замкнутое односвязное трёхмерное многообразие  $M^3$  гомотопически эквивалентно  $S^3$ .

**З а д а ч а 10.2.** Пусть  $M^n$  ( $n \geq 3$ ) — замкнутое многообразие размерности  $n$ , причём  $\pi_k(M^n) = 0$  при  $k \leq n/2$ . Докажите, что  $M^n$  гомотопически эквивалентно сфере  $S^n$ .

**З а д а ч а 10.3.** а) Докажите, что надстройка над ациклическим  $SW$ -комплексом стягиваема.

б) Приведите пример нестягиваемого пространства, надстройка над которым стягиваема.

## 10.2. Теория препятствий

Пусть  $X$  — линейно связное топологическое пространство,  $K$  — симплициальный комплекс,  $L$  — его подкомплекс,  $K^n$  —  $n$ -мерный остов ком-

плекса  $K$ . Предположим, что на  $\hat{K}^n = K^n \cup L$  задано отображение  $f: \hat{K}^n \rightarrow X$ . Мы хотим выяснить, можно ли его продолжить на  $\hat{K}^{n+1}$ . При  $n = 0$  продолжение отображения в линейно связное пространство строится очевидным образом, поэтому будем предполагать, что  $n \geq 1$ .

Нам придётся складывать элементы групп  $\pi_n(X, x)$  с разными отмеченными точками  $x \in X$ , поэтому будем предполагать, что пространство  $X$  гомотопически  $n$ -просто\*). Для  $n = 1$  это означает, что группа  $\pi_1(X, x)$  коммутативна.

Сопоставим отображению  $f: \hat{K}^n \rightarrow X$  коцепь  $c^{n+1}(f) \in C^{n+1}(K; \pi_n(X))$  следующим образом. Рассмотрение цепей и коцепей для  $K$  предполагает, что все симплексы  $K$  ориентированы. Ориентация симплекса  $\Delta^{n+1} \subset K$  индуцирует ориентацию границы  $\partial\Delta^{n+1} \approx S^n$ , поэтому ограничение отображения  $f$  на  $\partial\Delta^{n+1}$  определяет некоторый элемент группы  $\pi_n(X)$ . Мы полагаем, что коцепь  $c^{n+1}(f)$  принимает на симплексе  $\Delta^{n+1}$  значение, равное этому элементу группы  $\pi_n(X)$ .

Непосредственно из определения видно, что отображение  $f$  можно продолжить на симплекс  $\Delta^{n+1} \subset K$  тогда и только тогда, когда  $c^{n+1}(f)(\Delta^{n+1}) = 0$ . В частности, если  $\Delta^{n+1} \subset L$ , то  $c^{n+1}(f)(\Delta^{n+1}) = 0$ , поскольку на  $L$  отображение  $f$  задано. Следовательно,  $c^{n+1}(f) \in C^{n+1}(K, L; \pi_n(X)) \subset C^{n+1}(K; \pi_n(X))$ . В дальнейшем коцепь  $c^{n+1}(f)$  мы будем рассматривать именно как относительную коцепь. Её называют *препятствием* к продолжению отображения  $f$  на  $\hat{K}^{n+1}$ .

**Задача 10.4.** Докажите, что  $S^p \times S^q = (S^p \vee S^q) \cup_f D^{p+q}$ , где отображение  $f: S^{p+q-1} \rightarrow S^p \vee S^q$  не гомотопно постоянному.

**Теорема 10.3.**  $\delta c^{n+1}(f) = 0$ , т. е.  $c^{n+1}(f) \in Z^{n+1}(K, L; \pi_n(X))$  — *относительный коцикл*.

**Доказательство.** Нужно проверить, что  $c^{n+1}(f)(\partial\Delta^{n+2}) = 0$  для любого  $(n+2)$ -мерного симплекса в  $K$ . Прежде всего отметим, что  $n$ -мерный остов симплициального комплекса  $\partial\Delta^{n+2} \approx S^{n+1}$  является  $(n-1)$ -связным пространством. Этот остов гомотопически эквивалентен  $S^{n+1}$  с выколотыми точками (из каждой  $(n+1)$ -мерной грани симплекса  $\Delta^{n+2}$  выкалывается одна внутренняя точка), а выкалывание точки  $y_0$  из  $(n+1)$ -мерного многообразия  $M^{n+1}$  не влияет на гомотопические группы  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}$ . Действительно, при  $k \leq n$  любое отображение  $S^k \rightarrow M^{n+1}$  гомотопно отображению, не задевающему  $y_0$ , а при  $k \leq n-1$  любую гомотопию в  $M^{n+1}$ , связывающую два отображения  $S^k \rightarrow M^{n+1} \setminus \{y_0\}$ , можно заменить на гомотопию, не задевающую  $y_0$ .

Пусть  $\partial\Delta^{n+2} = \sum \Delta_i^{n+1}$ . Согласно определению элемент  $c^{n+1}(f)(\Delta_i^{n+1})$  группы  $\pi_n(X)$  соответствует отображению  $\partial\Delta_i^{n+1} \xrightarrow{f} X$ . Рассмотрим сим-

\*) Определение гомотопически  $n$ -простого пространства приведено в части I на с. 185.



плициальный комплекс  $B^n$  —  $n$ -мерный остов  $\partial\Delta^{n+2}$ . Возьмём в  $\pi_n(B^n)$  элемент  $\alpha_i$ , соответствующий гомеоморфизму  $S^n \rightarrow \partial\Delta_i^{n+1}$ , сохраняющему ориентацию. Ясно, что гомоморфизм  $f_* : \pi_n(B^n) \rightarrow \pi_n(X)$  переводит  $\alpha_i$  в  $c^{n+1}(f)(\Delta_i^{n+1})$ . Это означает, что композиция отображений

$$\text{цикл } \partial\Delta_i^{n+1} \longrightarrow \text{класс в } H_n(B^n) \xrightarrow{h^{-1}} \pi_n(B^n) \xrightarrow{f_*} \pi_n(X),$$

где  $h$  — гомоморфизм Гуревича, даёт элемент  $c^{n+1}(f)(\Delta_i^{n+1})$ . Здесь мы пользуемся тем, что пространство  $B^n$   $(n-1)$ -связно, поэтому  $h$  — изоморфизм при  $n \geq 2$ . Если  $n = 1$ , то отображение  $f_*h^{-1}$  тоже определено корректно, потому что по условию группа  $\pi_1(X)$  абелева, а значит,  $f_*$  отображает коммутант группы  $\pi_1(B^2)$  в 0. Таким образом, элемент  $h^{-1}(z)$  определён с точностью до прибавления элемента  $[\pi_1(B^2), \pi_1(B^2)]$ , а элемент  $f_*h^{-1}(z)$  определён однозначно.

Элемент  $c^{n+1}(f)(\partial\Delta^{n+2})$  равен образу гомологического класса цикла  $\sum \partial\Delta_i^{n+1} = \partial\partial\Delta^{n+2} = 0$  при гомоморфизме  $f_*h^{-1}$ , поэтому  $c^{n+1}(f)(\partial\Delta^{n+2}) = 0$ .  $\square$

Когомологический класс коцикла  $c^{n+1}(f)$  будем обозначать  $C^{n+1}(f)$ .

**Теорема 10.4** (Эйленберг [Ei1]). *Равенство  $C^{n+1}(f) = 0$  эквивалентно тому, что отображение  $f : \hat{K}^n \rightarrow X$  можно продолжить на  $\hat{K}^{n+1}$ , предварительно изменив его на  $\hat{K}^n \setminus \hat{K}^{n-1}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f, g : \hat{K}^n \rightarrow X$  — два отображения, совпадающие на  $\hat{K}^{n-1}$ . Определим *различающую коцепь*  $d^n(f, g) \in C^n(K, L; \pi_n(X))$  следующим образом. Возьмём два экземпляра симплекса  $\Delta^n \subset \hat{K}^n$  и склеим их по границе  $\partial\Delta^n \subset \hat{K}^{n-1}$ . Первый экземпляр мы отождествим с верхней полусферой, а второй с нижней; ориентация сферы согласована с ориентацией второго симплекса. Отобразим первый экземпляр  $\Delta^n$  посредством  $f$ , а второй посредством  $g$ . На  $\partial\Delta^n$  оба отображения совпадают, поэтому получаем непрерывное отображение  $S^n \rightarrow X$ . Соответствующий ему элемент группы  $\pi_n(X)$  и есть значение коцепи  $d^n(f, g)$  на  $\Delta^n$ .

Равенство  $d^n(f, g)(\Delta^n) = 0$  эквивалентно тому, что отображение  $\partial(\Delta^n \times I) \rightarrow X$ , которое совпадает с  $f$  на  $\Delta^n \times \{1\}$ , с  $g$  на  $\Delta^n \times \{0\}$  и с  $f|_{\partial\Delta^n} = g|_{\partial\Delta^n}$  на  $\partial\Delta^n \times \{t\}$  при всех  $t$ , можно продолжить на  $\Delta^n \times I$ , т.е. отображения  $\Delta^n \xrightarrow{f} X$  и  $\Delta^n \xrightarrow{g} X$  можно связать гомотопией, неподвижной на  $\partial\Delta^n$ . В частности,  $d^n(f, g)(\Delta^n) = 0$ , если  $\Delta^n \subset L$ , т.е.  $d^n(f, g)(\Delta^n)$  действительно является относительной коцепью. Кроме того, равенство  $d^n(f, g)(\Delta^n) = 0$  эквивалентно тому, что отображения  $f$  и  $g$  можно соединить гомотопией, неподвижной на  $\hat{K}^{n-1}$ .

**Лемма 1.** *Для любого отображения  $f : \hat{K}^n \rightarrow X$  и для любой коцепи  $d^n \in C^n(K, L; \pi_n(X))$  найдётся отображение  $g : \hat{K}^n \rightarrow X$ , совпадающее с  $f$  на  $\hat{K}^{n-1}$ , для которого  $d^n(f, g) = d^n$ .*

**Доказательство.** Для каждого симплекса  $\Delta^n \subset \hat{K}^n$  отображение  $g$  можно выбрать так, чтобы отображение  $S^n \rightarrow X$ , заданное на верхней полусфере посредством  $f$ , а на нижней — посредством  $g$ , представляло данный элемент группы  $\pi_n(X)$ , причём для симплекса  $\Delta^n \subset L$  элемент группы  $\pi_n(X)$  нулевой, т. е. можно положить  $g = f$ . Требуемого всегда можно добиться, поскольку  $\pi_n(X)$  — группа.  $\square$

**Лемма 2.** *Справедливо равенство  $\delta d^n(f, g) = c^{n+1}(g) - c^{n+1}(f)$ .*

**Доказательство.** Элемент  $(c^{n+1}(g) - c^{n+1}(f))(\Delta^{n+1})$  равен разности гомотопических классов отображений  $\partial\Delta^{n+1} \xrightarrow{g} X$  и  $\partial\Delta^{n+1} \xrightarrow{f} X$ . Пусть  $\partial\Delta^{n+1} = \sum \Delta_i^n$ . Тогда элемент  $d^n(f, g)(\partial\Delta^{n+1})$  равен сумме  $n+2$  гомотопических классов отображений  $S^n \rightarrow X$ , каждое из которых на верхней полусфере устроено как  $\Delta_i^n \xrightarrow{f} X$ , а на нижней — как  $\Delta_i^n \xrightarrow{g} X$ ,  $i = 1, \dots, n+2$ .

Например, при  $n = 1$  один элемент представляется суммой гомотопических классов двух кривых, изображённых на рис. 33 (а), а другой элемент

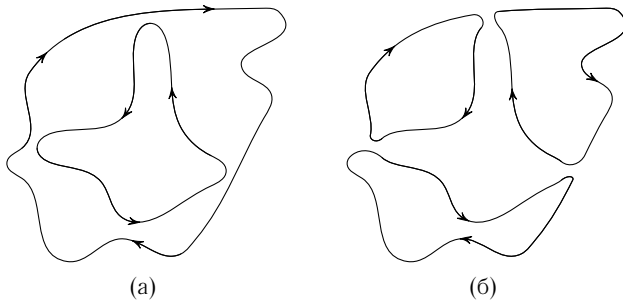


Рис. 33. Одинаковые гомотопические классы

представляется суммой гомотопических классов трёх кривых, изображённых на рис. 33 (б). Эти элементы равны, потому что результат сложения гомотопических классов двух кривых по условию не зависит от выбора отмеченной точки. Для произвольного  $n$  тоже получаются одинаковые гомотопические классы.  $\square$

Теперь можно перейти непосредственно к доказательству теоремы. Пусть  $C^{n+1}(f) = 0$ , т. е.  $c^{n+1}(f) = \delta d^n$  для некоторой коцепи  $d^n$ . Согласно лемме 1 существует отображение  $g: \hat{K}^n \rightarrow X$ , совпадающее с  $f$  на  $\hat{K}^{n-1}$ , для которого  $d^n(f, g) = -d^n$ . Тогда согласно лемме 2 мы имеем

$$c^{n+1}(g) = \delta d^n(f, g) + c^{n+1}(f) = -\delta d^n + \delta d^n = 0,$$

т. е. отображение  $g$  можно продолжить на  $\hat{K}^{n+1}$ .

Предположим теперь, что существует отображение  $g: \hat{K}^n \rightarrow X$ , совпадающее с  $f$  на  $\hat{K}^{n-1}$ , которое можно продолжить на  $\hat{K}^{n+1}$ . Тогда  $c^{n+1}(g) = 0$  и  $c^{n+1}(f) = c^{n+1}(f) - c^{n+1}(g) = -\delta d^n(f, g)$ , т. е.  $C^{n+1}(f) = 0$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** В дальнейшем нам понадобится равенство  $d^n(f, g) + d^n(g, h) + d^n(h, f) = 0$ . Оно доказывается с помощью тех же рассуждений, что и лемма 2.

### 10.3. Теорема Хопфа—Уитни

В части I доказана теорема Хопфа о том, что множество гомотопических классов отображений  $M^n \rightarrow S^n$  находится во взаимно однозначном соответствии с  $\mathbb{Z}$  (это соответствие таково: отображению  $f: M^n \rightarrow S^n$  сопоставляется число  $\deg f \in \mathbb{Z}$ ). Методами теории препятствий теорему Хопфа можно существенно обобщить. Введём следующее обозначение:  $[X, Y]$  — множество классов гомотопически эквивалентных отображений  $X \rightarrow Y$ . Для пространств с отмеченными точками при этом рассматриваются отображения, переводящие отмеченную точку в отмеченную, и гомотопии в классе таких отображений.

Следующая теорема была доказана Хопфом [Ho5], но не в терминах когомологий, а в терминах гомологий. Поэтому в случае, когда  $(n-1)$ -мерные гомологии комплекса  $K$  имеют кручение, формулировка была довольно запутанной. Уитни [Wh3] заметил, что для когомологий не только формулировка получается более простой, но и соответствие имеет более естественное описание.

**Т е о р е м а 10.5 (Хопф—Уитни).** *Для любого  $n$ -мерного симплициального комплекса  $K$  (с отмеченной вершиной) и любого  $(n-1)$ -связного пространства  $X$  (с отмеченной точкой  $x_0$ ) имеет место взаимно однозначное соответствие*

$$[K, X] \longleftrightarrow H^n(K; \pi_n(X)).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим множество отображений пар  $(K, K^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ . Будем считать такие отображения эквивалентными, если существует связывающая их гомотопия, неподвижная на  $K^{n-2}$ . Множество классов эквивалентности обозначим  $[[K, X]]$ . Покажем, что естественное отображение  $\theta: [[K, X]] \rightarrow [K, X]$  взаимно однозначно.

Пусть  $f: K \rightarrow X$  — произвольное отображение. Построим гомотопию, связывающую отображения  $K^0 \rightarrow x_0$  и  $K^0 \xrightarrow{f} X$ . Пользуясь  $(n-1)$ -связностью пространства  $X$ , продолжим эту гомотопию до гомотопии, связывающей отображения  $K^{n-1} \rightarrow x_0$  и  $K^{n-1} \xrightarrow{f} X$ . Согласно лемме Борсука эту гомотопию можно продолжить до гомотопии отображения  $\hat{f}: K \rightarrow X$ .

В результате получим отображение  $g: K \rightarrow X$ , которое гомотопно  $f$  и отображает  $K^{n-1}$  в  $x_0$ . Следовательно, отображение  $\theta$  сюръективно.

Пусть теперь  $f, g: (K, K^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$  — отображения, связанные гомотопией  $H_0: K \times I \rightarrow X$ . Требуется доказать, что их можно связать гомотопией, неподвижной на  $K^{n-2}$ . По условию  $H_0(K^{n-1} \times \partial I) = x_0$ , а значит,  $H_0(K^{n-2} \times \partial I) = x_0$ . Продолжим отображение  $K^{n-2} \times \partial I \times I \rightarrow x_0 \in X$  до отображения  $K^{n-2} \times I \times I \rightarrow X$  так, чтобы на  $K^{n-2} \times I \times \{0\}$  оно совпадало с  $H_0$ , а на  $K^{n-2} \times I \times \{1\}$  было постоянно. Это можно сделать индукцией по размерности остова, поскольку размерность  $CW$ -комплекса  $K^{n-2} \times I \times I$  не превосходит  $n$ , а пространство  $X$   $(n-1)$ -связно. Построенную на  $K^{n-2} \times I$  гомотопию можно продолжить до гомотопии  $H_t$  отображения  $H_0$ . Пусть  $f'(y) = H_1(y, 0)$  и  $g'(y) = H_1(y, 1)$ . Тогда  $f \sim f' \sim g' \sim g$ , причём все гомотопии неподвижны на  $K^{n-2}$ .

Сопоставим отображению  $f: (K, K^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$  класс когомологий  $k(f) \in H^n(K; \pi_n(X))$ , который соответствует коциклу  $d^n(f, *)$ , где  $*$  — отображение комплекса  $K$  в  $x_0$  (различающая коцепь  $d^n(f, *)$  является коциклом, потому что  $\dim K = n$ ). Покажем, что построенное отображение

$$k: [[K, X]] \rightarrow H^n(K; \pi_n(X))$$

взаимно однозначно.

Пусть  $f, g: (K, K^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$  — отображения, для которых  $k(f) = k(g)$ . Тогда коцикл  $d^n(f, g) = d^n(f, *) - d^n(g, *)$  является кограницей, т. е. отображения  $f$  и  $g$  связаны гомотопией, неподвижной на  $K^{n-2}$ . Следовательно, отображение  $k$  инъективно. Рассмотрим теперь произвольный коцикл  $d^n \in Z^n(K; \pi_n(X))$ . Его можно реализовать как различающую коцепь  $d^n(f, *)$  для некоторого отображения  $f: (K, K^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ . При этом  $k(f)$  — класс когомологий коцикла  $d^n = d^n(f, *)$ . Следовательно, отображение  $k$  сюръективно.  $\square$

Для  $X = S^n$  соответствие  $[K, S^n] \leftrightarrow H^n(K; \mathbb{Z})$  задаётся достаточно явным образом: отображению  $f: K \rightarrow S^n$  сопоставляется элемент  $f^*\alpha \in H^n(K; \mathbb{Z})$ , где  $\alpha$  — образующая группы  $H^n(S^n; \mathbb{Z})$ . Действительно, можно считать, что  $f$  отображает  $K^{n-1}$  в отмеченную точку  $*$ . Согласно определению различающая коцепь  $d^n(f, *)$  принимает на каждом симплексе  $\Delta^n \subset K^n = K$  значение, равное степени отображения  $\Delta^n / \partial \Delta^n \xrightarrow{f} S^n$ . Коцикл, представляющий когомологический класс  $f^*\alpha$ , тоже принимает на этом симплексе такое же значение. Таким образом, из теоремы Хопфа—Уитни вытекает следующее утверждение.

**Теорема 10.6.** *Если  $K$  —  $n$ -мерный симплицальный комплекс, то любой элемент группы  $H^n(K; \mathbb{Z})$  можно представить в виде  $f^*\alpha$ , где  $\alpha$  — образующая группы  $H^n(S^n; \mathbb{Z})$  и  $f: K \rightarrow S^n$  — некоторое отображение, единственное с точностью до гомотопии.*

### 10.4. Алгебраически тривиальные отображения

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называют *алгебраически тривиальным*, если отображения  $f_*: H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$  и  $f^*: H^i(Y) \rightarrow H^i(X)$  тривиальны для всех  $i \geq 1$ .

Примером алгебраически тривиального отображения служит любое отображение  $f: S^n \rightarrow S^m$ , где  $n \neq m$ . В частности, алгебраически тривиальным является расслоение Хопфа  $p: S^3 \rightarrow S^2$ . Этим обстоятельством мы воспользуемся, чтобы получить гомотопическую классификацию алгебраически тривиальных отображений  $f: X \rightarrow S^2$ , где  $X$  — трёхмерный симплициальный комплекс. Эта классификация выглядит следующим образом: гомотопические классы алгебраически тривиальных отображений  $X \rightarrow S^2$  находятся во взаимно однозначном соответствии с  $H^3(X)$ . А именно, согласно теореме Хопфа—Уитни  $[X, S^3] \cong H^3(X, \pi_3(S^3)) = H^3(X)$ . Поэтому каждому когомологическому классу  $\alpha \in H^3(X)$  соответствует гомотопический класс отображений  $F: X \rightarrow S^3$ . Мы сопоставляем классу  $\alpha \in H^3(X)$  отображение  $f = pF$ , где  $p: S^3 \rightarrow S^2$  — расслоение Хопфа. Отображение  $f$  алгебраически тривиально, поскольку отображение  $p$  алгебраически тривиально.

Классификация алгебраически тривиальных отображений  $f: X \rightarrow S^3$  для трёхмерных симплициальных комплексов  $X$  получается в качестве следствия более общей классификации для произвольных симплициальных комплексов  $X$ .

**Теорема 10.7** (Понтрягин). *Для произвольного симплициального комплекса  $X$  соответствие  $[F] \mapsto [pF]$  представляет собой взаимно однозначное соответствие между гомотопическими классами отображений  $X \rightarrow S^3$  и алгебраически тривиальных отображений  $X \rightarrow S^2$ .*

**Доказательство** (см. [X2]). Проверка взаимной однозначности, как обычно, состоит из двух шагов: 1) любое отображение лежит в образе; 2) если образы двух отображений гомотопны, то исходные отображения тоже гомотопны.

**Шаг 1.** *Для любого алгебраически тривиального отображения  $f: X \rightarrow S^2$  существует отображение  $F: X \rightarrow S^3$ , для которого  $pF = f$ .*

Отображение  $p: S^3 \rightarrow S^2$  является локально тривиальным расслоением, поэтому существует открытое покрытие  $\{U_\alpha\}$ , над которым расслоение тривиально. Измельчим триангуляцию комплекса  $X$  так, чтобы образ каждого симплекса при отображении  $f$  целиком лежал в некотором  $U_\alpha$ .

Пусть  $f_k = f|_{X^k}$ . Для  $k = 2, 3, \dots$  построим отображение  $F_k: X^k \rightarrow S^3$  так, что  $pF_k = f_k$ . Начинаем с отображения  $F_2$ . Отображение  $f_2$  алгебраически тривиально, поскольку оно является композицией отображений

$X^2 \rightarrow X \xrightarrow{f} S^2$ , где отображение  $f$  алгебраически тривиально. Из алгебраической тривиальности отображения  $f_2$  следует, что оно гомотопно постоянному. Действительно, гомотопическому классу отображения  $f_2: X^2 \rightarrow S^2$  соответствует элемент  $f_2^* \alpha \in H^2(X^2)$ , где  $\alpha$  — образующая группы  $H^2(S^2)$ , а этот элемент нулевой, поскольку отображение  $f_2$  алгебраически тривиально.

Рассмотрим гомотопию  $H$ , связывающую  $f_2$  с постоянным отображением. У постоянного отображения, очевидно, есть поднятие, поэтому можно построить поднятие гомотопии  $H$ . В результате получим отображение  $F_2: X^2 \rightarrow S^3$ , для которого  $pF_2 = f_2$ .

Предположим теперь, что для некоторого  $k > 2$  построено отображение  $F_{k-1}$ . Отображение  $F_k$  мы построим следующим образом. Пусть  $\sigma = \Delta^k$  — некоторый  $k$ -мерный симплекс в  $X$ . На его границе  $\partial\Delta^k \approx S^{k-1}$  задано отображение  $F_{k-1}$ , поэтому мы можем построить отображение

$$\partial\Delta^k \xrightarrow{F_{k-1}} p^{-1}(U_\sigma) \xrightarrow{h_\sigma} U_\sigma \times S^1 \xrightarrow{\pi_\sigma} S^1.$$

Здесь  $U_\sigma$  — множество из покрытия, в котором лежит образ симплекса  $\Delta^k$ ;  $h_\sigma$  — гомеоморфизм из определения локально тривиального расслоения;  $\pi_\sigma$  — проекция на второй множитель. Мы построили отображение  $S^{k-1} \rightarrow S^1$ , где  $k - 1 \geq 2$ ; любое такое отображение гомотопно постоянному. Значит, его можно продолжить до отображения  $g_\sigma: \Delta^k \rightarrow S^1$ . Теперь можно определить отображение  $F_k$  следующим образом:

$$F_k(x) = \begin{cases} F_{k-1}(x) & \text{для } x \in X^{k-1}; \\ h_\sigma^{-1}(f_k(x), g_\sigma(x)) & \text{для } x \in \Delta^k \subset X^k. \end{cases}$$

Наконец, отображение  $F: X \rightarrow S^3$  определяется так, что его ограничение на  $X^k$  совпадает с  $F_k$  для любого  $k \geq 2$ .

**Шаг 2.** Если отображения  $F, G: X \rightarrow S^3$  таковы, что  $pF \simeq pG$ , то  $F \simeq G$ .

Если  $pF \simeq pG$ , то по теореме о накрывающей гомотопии мы можем поднять гомотопию, связывающую эти отображения, и получить отображение  $F': X \rightarrow S^3$ , которое гомотопно  $F$ , причём  $pF' = pG$ . Поэтому с самого начала можно считать, что  $pF = pG$ .

Будем рассматривать сферу  $S^3$  как группу кватернионов единичной длины. Тогда расслоение Хопфа — это отображение, которое переводит кватернион единичной длины в соответствующий смежный класс по подгруппе  $S^1$  комплексных чисел с модулем 1. Определим отображение  $H: X \rightarrow S^3$  следующим образом:

$$H(x) = F(x) \cdot [G(x)]^{-1}.$$

Так как  $pF = pG$ , кватернионы  $F(x)$  и  $G(x)$  принадлежат одному и тому же смежному классу по подгруппе  $S^1$ . Поэтому  $H$  переводит  $X$  в собственное подмножество  $S^1 \subset S^3$ , а значит, отображение  $H$  гомотопно постоянному, т. е. существует гомотопия  $H_t: X \rightarrow S^3$ , где  $H_0 = H$  и  $H_1(X) = 1 \in S^3$ .

Положим  $\Phi_t(x) = H_t(x) \cdot G(x)$ . Тогда  $\Phi_0 = F$  и  $\Phi_1 = G$ , т. е.  $\Phi_t$  — требуемая гомотопия.  $\square$

### 10.5. Пространства Эйленберга—Маклейна

Пусть  $n$  — натуральное число,  $\pi$  — некоторая группа, абелева при  $n \geq 2$ .  $CW$ -комплекс  $X$  называют *пространством типа  $K(\pi, n)$*  или *пространством Эйленберга—Маклейна*, если

$$\pi_k(X) = \begin{cases} \pi & \text{при } k = n; \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases}$$

Пространства Эйленберга—Маклейна были введены в [Ei2], [Ei4].

**Пример 10.2.** *Окружность  $S^1$  — пространство типа  $K(\mathbb{Z}, 1)$ .*

**Пример 10.3.** *Замкнутое двумерное многообразие  $M^2$ , отличное от  $S^2$  и  $\mathbb{R}P^2$ , является пространством типа  $K(\pi, 1)$ , где  $\pi = \pi_1(M^2)$ .*

**Пример 10.4.**  $\mathbb{R}P^\infty$  — пространство типа  $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ .

**Пример 10.5.**  $\mathbb{C}P^\infty$  — пространство типа  $K(\mathbb{Z}, 2)$ .

**Пример 10.6.** *Пусть  $X_n$  — множество всех точек пространства  $\mathbb{C}^n$  с попарно различными координатами. Тогда  $X_n$  — пространство типа  $K(P_n, 1)$  для некоторой группы  $P_n$ . (Возникающую здесь группу  $P_n$  называют группой крашенных кос из  $n$  нитей.)*

**Доказательство.** Рассмотрим отображение  $X_n \rightarrow X_{n-1}$ , которое состоит в забывании последней координаты. Это отображение является локально тривиальным расслоением. Слой  $F$  этого расслоения представляет собой  $\mathbb{C}$  с выколотыми  $n - 1$  точками. Таким образом, слой гомотопически эквивалентен букету  $n - 1$  окружностей. В частности,  $\pi_k(F) = 0$  при  $k \geq 2$ . Поэтому точная последовательность  $\pi_k(F) \rightarrow \pi_k(X_n) \rightarrow \pi_k(X_{n-1})$  показывает, что если  $k \geq 2$  и  $\pi_k(X_{n-1}) = 0$ , то  $\pi_k(X_n) = 0$ . Остается заметить, что пространство  $X_1 = \mathbb{C}$  стягиваемо.  $\square$

**Пример 10.7.** *Пусть  $Y_n$  — фактор пространства  $X_n$  по действию группы  $S_n$  (перестановки координат). Тогда  $Y_n$  — пространство типа  $K(B_n, 1)$  для некоторой группы  $B_n$ . (Возникающую здесь группу  $B_n$  называют группой кос из  $n$  нитей.)*

**Доказательство.** Отображение  $X_n \rightarrow X_n/S_n = Y_n$  является накрытием. Поэтому  $\pi_k(X_n) \cong \pi_k(Y_n)$  при  $k \geq 2$ .  $\square$

Будем рассматривать  $S^\infty$  как подмножество в  $\mathbb{C}^\infty$ , состоящее из точек  $(z_1, z_2, \dots)$ , для которых  $\sum |z_i|^2 = 1$ . Введём на  $S^\infty$  следующее отношение эквивалентности:  $(z_1, z_2, \dots) \sim (\varepsilon z_1, \varepsilon z_2, \dots)$ , где  $\varepsilon = \exp(2\pi i/m)$ . Пространство  $L_m^\infty = S^\infty / \sim$  называют *бесконечномерным линзовым пространством*.

**Пример 10.8.**  $L_m^\infty$  — пространство типа  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ .

**Доказательство.** Накрытие  $S^\infty \rightarrow L_m^\infty$  универсальное, поскольку пространство  $S^\infty$  стягиваемо (часть I, задача 9.2). Это накрытие является регулярным накрытием с группой автоморфизмов  $\mathbb{Z}_m$ , поэтому  $\pi_1(L_m^\infty) = \mathbb{Z}_m$ . Кроме того,  $\pi_i(L_m^\infty) = \pi_i(S^\infty) = 0$  при  $i \geq 2$ .  $\square$

**Задача 10.5.** Докажите, что

$$H_n(L_m^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z}_m & \text{для нечётных } n; \\ 0 & \text{для чётных } n > 0. \end{cases}$$

**Задача 10.6.** Пусть  $M^3$  — трёхмерное многообразие с бесконечной фундаментальной группой, причём  $\pi_2(M^3) = 0$ . Докажите, что  $M^3$  — пространство типа  $K(\pi, 1)$ .

**Теорема 10.8.** Для любых  $n$  и  $\pi$  существует симплициальный комплекс типа  $K(\pi, n)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим свободную резольвенту  $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow \pi \rightarrow 0$ , где  $R$  и  $F$  — свободные группы при  $n = 1$  и свободные абелевы группы при  $n \geq 2$ . Другими словами, зададим группу  $\pi$  (абелеву при  $n \geq 2$ ) образующими  $\{b_j \mid j \in J\}$  и соотношениями  $\{a_i \mid i \in I\}$ ; здесь  $\{a_i \mid i \in I\}$  и  $\{b_j \mid j \in J\}$  — базисы групп  $R$  и  $F$ . Пусть, далее,  $K^n$  — букет  $n$ -мерных триангулированных сфер  $S_j^n$ ,  $j \in J$ . Тогда группа  $\pi_n(K^n)$  канонически изоморфна  $F$ . Для каждого базисного соотношения  $a_i \in R \subset F = \pi_n(K^n)$  возьмём непрерывное отображение  $f_i: S_i^n \rightarrow K^n$ , которое является представителем гомотопического класса  $a_i \in \pi_n(K^n)$ , и рассмотрим его симплициальную аппроксимацию  $\varphi_i$ . Триангуляция  $S_i^n$  естественно продолжается до триангуляции  $D_i^{n+1} \supset S_i^n$  (к каждому  $n$ -мерному симплексу добавляется одна вершина — центр шара). Пусть  $K^{n+1}$  — симплициальный комплекс, который получается из  $K^n$  приклеиванием шаров  $D_i^{n+1}$  по отображениям  $\varphi_i$ . Если  $n = 1$ , то согласно теореме 20.1 из части I мы имеем  $\pi_1(K^2) \cong \pi$ . Если  $n > 1$ , то можно воспользоваться теоремой Гуревича. Действительно, из теоремы о клеточной аппроксимации следует, что пространство  $K^{n+1}$   $(n-1)$ -связно. Ясно также, что  $H_n(K^{n+1}) \cong \pi$ . Поэтому согласно теореме Гуревича  $\pi_n(K^{n+1}) \cong \pi$ .

Выберем теперь в  $\pi_{n+1}(K^{n+1})$  систему образующих, для каждой образующей рассмотрим соответствующее ей симплициальное отображение  $\psi: S^{n+1} \rightarrow K^{n+1}$  и приклеим  $D^{n+2}$  к  $K^{n+1}$  по отображению  $\psi$ . В резуль-



тате получим симплициальный комплекс  $K^{n+2}$ , у которого гомотопические группы такие, как нужно, вплоть до размерности  $n + 1$ . Это вытекает из следующего утверждения.

*Л е м м а.* Пусть  $CW$ -комплекс  $X'$  получен из  $CW$ -комплекса  $X$  приклеиванием  $(n + 2)$ -мерной клетки по отображению  $\psi: S^{n+1} \rightarrow X^{n+1}$ . Тогда включение  $i: X \rightarrow X'$  при  $k \leq n$  индуцирует изоморфизм  $i_*: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(X')$ , а при  $k = n + 1$  оно индуцирует эпиморфизм  $i_*: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(X')$ , ядро которого содержит подгруппу, порождённую гомотопическим классом отображения  $\psi$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Согласно теореме о клеточной аппроксимации при  $k \leq n + 1$  любое отображение сферы  $S^k$  в  $CW$ -комплекс  $Y$  гомотопно отображению в  $(n + 1)$ -мерный остов  $Y^{n+1}$ , а при  $k \leq n$  любую гомотопию в  $Y$  между двумя отображениями  $S^k \rightarrow Y^{n+1}$  можно заменить на гомотопию в  $Y^{n+1}$ . Из этого вытекает утверждение об изоморфности отображения  $i_*$  при  $k \leq n$  и эпиморфности отображения  $i_*$  при  $k = n + 1$ .

Композиция отображений  $S^{n+1} \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{i} X'$  гомотопна постоянному отображению; стягивание производится по клетке  $D^{n+2}$ .  $\square$

Тем же самым способом, каким мы уничтожили  $(n + 1)$ -мерную гомотопическую группу пространства  $K^{n+1}$ , уничтожается и группа  $\pi_{n+2}(K^{n+2})$ , и т. д.  $\square$

*Т е о р е м а 10.9.* Любые два пространства типа  $K(\pi, n)$  (с одинаковыми  $\pi$  и  $n$ ) гомотопически эквивалентны.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Достаточно проверить, что любое пространство  $X$  типа  $K(\pi, n)$  гомотопически эквивалентно симплициальному комплексу  $K$ , построенному при доказательстве теоремы 10.8. Построим непрерывное отображение  $K \rightarrow X$ , индуцирующее изоморфизм  $\pi_k(K) \rightarrow \pi_k(X)$  для всех  $k$ . Сначала определим это отображение на  $K^n = \bigvee S_j^n$ . Каждая сфера  $S_j^n$  соответствует образующей  $b_j$  группы  $\pi_n(X)$ . Выберем для этого элемента  $b_j \in \pi_n(X)$  представляющее его отображение  $S_j^n \rightarrow X$ . В результате получим отображение  $K^n \rightarrow X$ . Продолжим его на  $K^{n+1}$  следующим образом. Для  $(n + 1)$ -мерной клетки  $D_i^{n+1}$  характеристическое отображение  $S_j^n \rightarrow K^n$  соответствует базисному соотношению  $a_i \in R \subset F = \pi_n(K^n)$ . Отображение  $K^n \rightarrow X$  индуцирует эпиморфизм  $\pi_n(K^n) \rightarrow \pi_n(X)$  с ядром  $R$ . Поэтому композиция отображений  $S_j^n \rightarrow K^n \rightarrow X$  гомотопна постоянному отображению, а значит, это отображение можно продолжить на всю клетку  $D_i^{n+1}$ . В результате получим отображение  $K^{n+1} \rightarrow X$ . Рассмотрим композицию отображений  $K^n \rightarrow K^{n+1} \rightarrow X$  и индуцированные гомоморфизмы групп  $\pi_n(K^n) \rightarrow \pi_n(K^{n+1}) \rightarrow \pi_n(X)$ . Нам известно, что оба гомоморфизма  $\pi_n(K^n) \rightarrow \pi_n(K^{n+1})$  и  $\pi_n(K^n) \rightarrow \pi_n(X)$  являются эпиморфизмами с ядром  $R$ . Из этого следует, что  $\pi_n(K^{n+1}) \rightarrow \pi_n(X)$  — изоморфизм.

Для продолжения отображения  $K^{n+1} \rightarrow X$  на клетки размерности больше  $n + 1$  нет никаких препятствий, потому что  $\pi_n(X) = 0$  при  $k \geq n + 1$ . Построенное отображение  $K \rightarrow X$  индуцирует изоморфизм групп  $\pi_k(K) \rightarrow \pi_k(X)$  для всех  $k$ . При  $k = n$  это следует из того, что включение  $K^{n+1} \rightarrow K$  индуцирует изоморфизм  $\pi_n(K^{n+1}) \rightarrow \pi_n(K)$ , а при  $k \neq n$  — из того, что  $\pi_k(K) = \pi_k(X) = 0$ . По условию оба пространства  $K$  и  $X$  являются  $CW$ -комплексами, поэтому можно воспользоваться теоремой Уайтхеда (часть I, теорема 14.9).  $\square$

**З а д а ч а 10.7.** Пусть  $X$  — конечномерный симплициальный комплекс типа  $K(\pi, 1)$ . Докажите, что группа  $\pi$  не содержит элементов конечного порядка.

### 10.6. Когомологии и отображения в пространства типа $K(\pi, n)$

Пусть  $K$  —  $(n - 1)$ -связный симплициальный комплекс, где  $n \geq 2$ . Тогда группа  $\text{Hom}(H_n(K), \pi_n(K))$  содержит гомоморфизм  $h^{-1}$ , обратный гомоморфизму Гуревича  $h: \pi_n(K) \rightarrow H_n(K)$ . Кроме того,  $H_{n-1}(K) = 0$ , поэтому из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(K), G) \longrightarrow H^n(K; G) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(K), G) \longrightarrow 0$$

получаем изоморфизм  $H^n(K; G) \cong \text{Hom}(H_n(K), G)$ . Класс когомологий  $F_K \in H^n(K; \pi_n(K))$ , соответствующий гомоморфизму  $h^{-1}$ , называют *фундаментальным когомологическим классом* пространства  $K$ . Наиболее важен случай, когда  $K$  — симплициальный комплекс типа  $K(\pi, n)$ . В этом случае фундаментальный когомологический класс будем обозначать  $F_\pi \in H^n(K; \pi) \cong \text{Hom}(H_n(K), \pi)$ ; отметим, что  $H_n(K) \cong \pi$  и  $F_\pi$  соответствует тождественному отображению  $\pi \rightarrow \pi$ .

Для симплициального комплекса  $K$  типа  $K(\pi, n)$ , построенного при доказательстве теоремы 10.8, фундаментальный когомологический класс  $F_\pi$  представлен коциклом  $c^n$ , который устроен следующим образом. Напомним, что  $K^n = \bigvee S_i^n$ , где каждая сфера  $S_i^n$  соответствует образующей  $a_i \in \pi$ . На фундаментальном классе сферы  $S_i^n$  коцикл  $c^n$  принимает значение  $a_i$ . Это следует из того, что гомоморфизм Гуревича сопоставляет элементу  $a_i \in \pi_n(K)$  фундаментальный класс сферы  $S_i^n$ .

**Т е о р е м а 10.10.** Пусть  $L$  — симплициальный комплекс типа  $K(\pi, n)$ . Тогда для любого симплициального комплекса  $K$  отображение  $[K, L] \rightarrow H^n(K, \pi)$ , при котором отображению  $f: K \rightarrow L$  сопоставляется элемент  $f^*(F_\pi) \in H^n(K; \pi)$ , взаимно однозначно.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно теореме Хопфа—Уитни имеет место взаимно однозначное соответствие

$$[K^n, L] \longleftrightarrow H^n(K^n; \pi_n(L)) = H^n(K^n; \pi).$$

Поэтому нужно лишь проверить, что это соответствие имеет требуемый вид и всё определяется  $n$ -мерным остовом  $K^n$ . Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} [K, L] & \xrightarrow{i^\#} & [K^n, L] \\ & & \downarrow k\theta^{-1} \\ H^n(K; \pi) & \xrightarrow{i^*} & H^n(K^n; \pi) \end{array} \quad (1)$$

Здесь обе горизонтальные стрелки индуцированы естественным включением  $i: K^n \rightarrow K$ ;  $k\theta^{-1}$  — отображение из теоремы Хопфа—Уитни. Отображение  $i^*: H^n(K; \pi) \rightarrow H^n(K^n; \pi)$  инъективно, потому что коцепи размерности не более  $n$  в  $K$  отождествляются с коцепями в  $K^n$  и равенство  $z^n = \delta\omega^{n-1}$  переносится из  $K^n$  в  $K$ . Отображение  $i^\#: [K, L] \rightarrow [K^n, L]$  тоже инъективно. Действительно, если ограничения отображений  $f, g: K \rightarrow L$  на  $K^n$  гомотопны, то гомотопны и сами отображения, потому что все препятствия к продолжению этих гомотопий лежат в коциклах со значениями в  $\pi_m(L)$ ,  $m > n$ , а по условию  $\pi_m(L) = 0$  при  $m > n$ .

Чтобы доказать, что диаграмма (1) даёт взаимно однозначное отображение  $\varphi: [K, L] \rightarrow H^n(K; \pi)$ , остаётся проверить, что отображение  $k\theta^{-1}$  переводит образ отображения  $i^\#$  в образ отображения  $i^*$ . Отображение  $\theta$  позволяет ограничиться отображениями  $f: (K^n, K^{n-1}) \rightarrow (L, x_0)$ , рассматриваемыми с точностью до гомотопии, неподвижной на  $K^{n-2}$ . Гомотопический класс такого отображения  $f$  лежит в  $\text{Im } i^\#$  тогда и только тогда, когда  $f$  продолжается на всё пространство  $K$ . Последнее условие эквивалентно тому, что  $f$  продолжается на  $K^{n+1}$ , поскольку дальнейшие препятствия к продолжению лежат в нулевых группах ( $\pi_m(L) = 0$  при  $m > n$ ). Если такое продолжение существует, то  $c^{n+1}(f) = 0$ ; здесь  $c^{n+1} \in C^{n+1}(K; \pi)$  — препятствие к продолжению отображения  $f$ . Равенство  $c^{n+1}(f) = 0$  эквивалентно равенству  $\delta d^n(f, *) = 0$ , поскольку  $\delta d^n(f, *) = c^{n+1}(*) - c^{n+1}(f)$  и  $c^{n+1}(*) = 0$ . Согласно определению  $k(f)$  — это когомологический класс коцикла  $d^n(f, *)$  в  $K^n$ . Коцепь  $d^n(f, *)$  является коциклом и в  $K$ , поэтому  $k(f) \in \text{Im } i^\#$ , что и требовалось.

Отображение  $\varphi$  естественно в том смысле, что для любого отображения  $h: K \rightarrow K'$  коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [K', L] & \xrightarrow{h^\#} & [K, L] \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ H^n(K'; \pi) & \xrightarrow{h^*} & H^n(K; \pi). \end{array}$$

Можно считать, что  $L$  — именно тот симплициальный комплекс типа  $K(\pi, n)$ , который построен при доказательстве теоремы 10.8. Тогда остов  $L^{n-1}$  состоит из одной точки, поэтому непосредственно из определений

видно, что  $\varphi(\text{id}_L) = F_\pi$ . Положим  $K' = L$  и  $h = f$ . Тогда  $\varphi(f) = \varphi(f^\#(\text{id}_L)) = f^*(\varphi(\text{id}_L)) = f^*(F_\pi)$ , т. е. отображение  $\varphi$  имеет требуемый вид.  $\square$

*С л е д с т в и е.* *Имеет место взаимно однозначное соответствие*

$$[K(\pi, n), K(\pi', n)] \leftrightarrow \text{Hom}(\pi, \pi'),$$

*при котором гомотопическому классу отображения  $f: K(\pi, n) \rightarrow K(\pi', n)$  соответствует индуцированный им гомоморфизм  $f_*: \pi \rightarrow \pi'$ .*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Согласно теореме 10.10 мы имеем

$$[K(\pi, n), K(\pi', n)] \leftrightarrow H^n(K(\pi, n); \pi').$$

Из формулы универсальных коэффициентов следует, что  $H^n(K(\pi, n); \pi') \cong \cong \text{Hom}(H_n(K(\pi, n)), \pi')$ . Наконец, согласно теореме Гуревича  $H_n(K(\pi, n)) \cong \cong \pi$ .  $\square$

Теорема 10.10 позволяет дать конкретное описание всех *когомологических операций*, которые определяются следующим образом. Фиксируем абелевы группы  $G$  и  $H$  и натуральные числа  $m$  и  $n$ . Когомологическая операция типа  $(m, n, G, H)$  — это семейство отображений (не обязательно гомоморфизмов)  $\Theta_K: H^m(K; G) \rightarrow H^n(K; H)$ , которые определены для каждого симплициального комплекса  $K$ , причём так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^m(L; G) & \xrightarrow{\Theta_L} & H^n(L; H) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ H^m(K; G) & \xrightarrow{\Theta_K} & H^n(K; H) \end{array}$$

коммутативна для любого непрерывного отображения  $f: K \rightarrow L$ .

*Пр и м е р 10.9.* *Гомоморфизм  $G \rightarrow H$  индуцирует гомоморфизм  $H^m(K; G) \rightarrow H^m(K; H)$ , который является когомологической операцией, сохраняющей размерность.*

*Пр и м е р 10.10.* *Если  $R$  — аддитивная группа кольца с единицей, то для фиксированного  $k$  отображение  $\alpha \mapsto \alpha^k$  является когомологической операцией типа  $(m, mk, R, R)$ .*

*Пр и м е р 10.11.* *Гомоморфизм Бокштейна*

$$\beta^*: H^k(K; G'') \rightarrow H^{k+1}(K; G'),$$

*соответствующий точной последовательности*

$$0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0,$$

*является когомологической операцией, увеличивающей размерность на 1.*

**Теорема 10.11.** *Когомологические операции типа  $(m, n, G, H)$  находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы  $H^n(K(G, m); H)$ . Это соответствие задаётся формулой  $\Theta \mapsto \Theta(F_G)$ , где  $F_G \in H^m(K(G, m); G)$  — фундаментальный когомологический класс.*

**Доказательство.** Любой элемент  $\alpha \in H^m(K; G)$  можно представить в виде  $\alpha = f^*(F_G)$ , где  $f: K \rightarrow K(G, m)$  — некоторое отображение. Поэтому  $\Theta(\alpha) = \Theta(f^*(F_G)) = f^*(\Theta(F_G))$ , т. е. когомологическая операция  $\Theta$  полностью определяется элементом  $\Theta(F_G)$ .

Остаётся проверить, что любой элемент  $\theta \in H^n(K(G, m); H)$  можно представить в виде  $\theta = \Theta(F_G)$ , где  $\Theta$  — некоторая когомологическая операция. Элементу  $\theta$  соответствует отображение  $\varphi: K(G, m) \rightarrow K(H, n)$ , для которого  $\theta = \varphi^*(F_H)$ . Сопоставив каждому отображению  $g: K \rightarrow K(G, m)$  его композицию с  $\varphi$ , получим отображение  $[K, K(G, m)] \rightarrow [K, K(H, n)]$ . Это отображение соответствует когомологической операции  $\Theta: H^m(K; G) \rightarrow H^n(K; H)$ , которая переводит  $g^*(F_G)$  в  $g^*\varphi^*(F_H)$ . В частности,  $\Theta(F_G) = \varphi^*(F_H) = \theta$ .  $\square$

**Следствие 1.** *Когомологическая операция не может уменьшать размерность.*

**Доказательство.** Если  $n < m$ , то  $H^n(K(G, m); H) = 0$ , поскольку пространство  $K(G, m)$   $(m - 1)$ -связно.  $\square$

**Следствие 2.** *Все когомологические операции, сохраняющие размерность, индуцированы гомоморфизмами  $G \rightarrow H$ .*

**Доказательство.** При доказательстве следствия теоремы 10.10 было отмечено, что

$$H^n(K(G, n); H) \cong \text{Hom}(H_n(K(G, n)), H) \cong \text{Hom}(G, H). \quad \square$$

## 10.7. Пространства Мура

Пространства Мура определяются аналогично пространствам Эйленберга—Маклейна, только при этом гомотопические группы заменяются группами гомотопий. А именно, пусть  $G$  — абелева группа,  $n$  — натуральное число. *Пространство Мура  $M(G, n)$*  — это симплициальный комплекс  $X$ , для которого

$$\tilde{H}_k(X) = \begin{cases} G & \text{при } k = n; \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases}$$

При  $n > 1$  дополнительно предполагается, что  $\pi_1(X) = 0$ .

Покажем, что для любой абелевой группы  $G$  и любого натурального числа  $n$  существует пространство Мура  $M(G, n)$ . В качестве пространства  $M(\mathbb{Z}, n)$  можно взять сферу  $S^n$ . В качестве пространства  $M(\mathbb{Z}_m, n)$

можно взять сферу  $S^n$ , к которой приклеена  $(n + 1)$ -мерная клетка  $D^{n+1}$  по отображению  $\partial D^{n+1} \rightarrow S^n$  степени  $m$ . Действительно, в таком случае цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий имеет вид  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ . Если группа  $G$  конечно порождённая, то в качестве  $M(G, n)$  можно взять букет нескольких пространств  $M(\mathbb{Z}, n)$  и  $M(\mathbb{Z}_m, n)$ .

Для произвольной абелевой группы  $G$  пространство  $M(G, n)$  можно построить следующим образом. Существует эпиморфизм  $F \rightarrow G$ , где  $F$  — свободная абелева группа. Пусть  $H$  — ядро этого гомоморфизма. Группа  $H$  является подгруппой свободной абелевой группы, поэтому она тоже свободная абелева. Пусть  $\{f_\alpha\}$  — базис группы  $F$ ,  $\{h_\beta\}$  — базис группы  $H$ . Тогда  $h_\beta = \sum_\alpha n_{\alpha\beta} f_\alpha$ . Пусть  $X^n = \bigvee_\alpha S_\alpha^n$ . Приклеим к  $X^n$  клетки  $\{D_\beta^{n+1}\}$  по отображениям  $\chi_\beta: \partial D_\beta^{n+1} \rightarrow X^n$ , которые устроены следующим образом. Сначала отображаем  $\partial D_\beta^{n+1}$  в букет  $k_\beta$  сфер размерности  $n$ , где  $k_\beta$  — число ненулевых  $n_{\alpha\beta}$ ; для этого стягиваем  $k_\beta - 1$  сфер размерности  $n - 1$  в  $\partial D_\beta^{n+1}$ . Затем каждую из сфер этого букета отображаем на соответствующую сферу  $S_\alpha^n$  так, чтобы степень отображения была равна  $n_{\alpha\beta}$ . Полученный  $CW$ -комплекс легко превратить в симплициальный комплекс  $X$ ; он является пространством Мура  $M(G, n)$ . Действительно, цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий комплекса  $X$  имеет вид  $H \xrightarrow{i} F \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ , где  $i$  — вложение подгруппы в группу.

Если  $G_1, G_2, \dots$  — произвольная последовательность абелевых групп, то существует симплициальный комплекс  $X$ , для которого  $H_i(X) = G_i$ . Действительно, в качестве  $X$  можно взять букет  $\bigvee_i M(G_i, i)$ .

Удивительным образом для когомологий аналогичное утверждение неверно. Соответствующий пример построили Кан и Уайтхед [Ka].

**Теорема 10.12 (Кан—Уайтхед).** *Ни для какого натурально-го  $n$  не существует симплициального комплекса  $X$ , для которого  $H^{n-1}(X; \mathbb{Z}) = 0$  и  $H^n(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ , где  $\mathbb{Q}$  — группа рациональных чисел относительно сложения.*

**Доказательство.** Предположим, что существует симплициальный комплекс  $X$ , для которого  $H^{n-1}(X; \mathbb{Z}) = 0$  и  $H^n(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ . Тогда согласно формуле универсальных коэффициентов

$$0 = H^{n-1}(X) \cong \text{Hom}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{n-2}(X), \mathbb{Z}), \quad (1)$$

$$\mathbb{Q} = H^n(X) \cong \text{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}). \quad (2)$$

Из равенства (1) получаем, в частности, что  $\text{Hom}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) = 0$ .

**Лемма.** *Пусть абелева группа  $A$  такова, что  $\text{Hom}(A, \mathbb{Z}) = 0$ . Тогда*

*а) группа  $\text{Ext}(A, \mathbb{Z})$  делима тогда и только тогда, когда группа  $A$  не имеет кручения;*

б) группа  $\text{Ext}(A, \mathbb{Z})$  не имеет кручения тогда и только тогда, когда группа  $A$  делима.

Доказательство. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} mA &= \{b \in A \mid b = ma, a \in A\}, \\ {}_m A &= \{a \in A \mid ma = 0\}, \\ A_m &= A/mA. \end{aligned}$$

Если абелева группа  $B$  такова, что  $mB = 0$ , то  $\text{Hom}(B, \mathbb{Z}) = 0$ . Действительно, пусть  $\varphi(b) = n$ . Тогда  $0 = \varphi(mb) = mn$ . Обе группы  ${}_m A$  и  $A_m$  этим свойством обладают; значит,  $\text{Hom}({}_m A, \mathbb{Z}) = 0$  и  $\text{Hom}(A_m, \mathbb{Z}) = 0$ . Учитывая это, из точных последовательностей

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow {}_m A \longrightarrow A \xrightarrow{\times m} mA \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow mA \xrightarrow{\subset} A \longrightarrow A_m \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

согласно задаче 4.11 получаем точные последовательности

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Ext}(mA, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Ext}(A, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Ext}({}_m A, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow \text{Hom}(A, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(mA, \mathbb{Z}) \longrightarrow \\ \longrightarrow \text{Ext}(A_m, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Ext}(A, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Ext}(mA, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

По условию  $\text{Hom}(A, \mathbb{Z}) = 0$ . Кроме того, согласно задаче 4.3 мы имеем  $\text{Hom}(mA, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(A, \mathbb{Z})$ . Таким образом, вторая точная последовательность принимает вид

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(A_m, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Ext}(A, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Ext}(mA, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Из этих двух точных последовательностей можно построить точную последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(A_m, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Ext}(A, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} \text{Ext}(A, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Ext}({}_m A, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0,$$

в которой  $\varphi$  — это композиция отображений  $\text{Ext}(A, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}(mA, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}(A, \mathbb{Z})$ , индуцированных включением  $mA \subset A$  и отображением  $A \xrightarrow{\times m} mA$ . Поэтому  $\varphi$  — умножение на  $m$ . Следовательно,  ${}_m \text{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \text{Ext}(A_m, \mathbb{Z})$  и  $\text{Ext}(A, \mathbb{Z})_m = \text{Ext}({}_m A, \mathbb{Z})$ .

Для периодической группы  $T$  равенство  $\text{Ext}(T, \mathbb{Z}) = 0$  имеет место тогда и только тогда, когда  $T = 0$  (задача 4.7). Поэтому  ${}_m A = 0$  тогда и только тогда, когда  $\text{Ext}({}_m A, \mathbb{Z}) = \text{Ext}(A, \mathbb{Z})_m = 0$ , а  $A_m = 0$  тогда и только тогда, когда  $\text{Ext}(A_m, \mathbb{Z}) = {}_m \text{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0$ . Для завершения доказательства леммы остаётся лишь заметить, что абелева группа  $B$  не имеет кручения тогда и только тогда, когда  ${}_m B = 0$  для всех  $m > 1$ , и что абелева группа  $B$  делима тогда и только тогда, когда  $B_m = 0$  для всех  $m > 1$ .  $\square$

Продолжим доказательство теоремы 10.12. Обратимся теперь к равенству (2). Прежде всего заметим, что группу  $\mathbb{Q}$  нельзя представить в виде прямой суммы двух ненулевых групп. Действительно, пусть  $\mathbb{Q} = A \oplus B$ ,  $a$  и  $b$  — ненулевые элементы групп  $A$  и  $B$ . Тогда если  $p, q \in \mathbb{Z}$  и  $pa \neq 0, qb \neq 0$ , то  $pa \neq qb$ . Но для рациональных чисел  $a$  и  $b$  это свойство не выполняется. Следовательно, либо  $\text{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ , либо  $\text{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ . Равенство  $\text{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$  невозможно, потому что ни для какой абелевой группы  $A$  группа  $\text{Hom}(A, \mathbb{Z})$  не может быть делимой. Действительно, пусть  $\varphi(a) = k \neq 0$ . Выберем натуральное число  $m$  так, чтобы число  $k/m$  не было целым. Тогда равенство  $m\psi = \varphi$  ни для какого  $\psi \in \text{Hom}(A, \mathbb{Z})$  выполняться не может, поскольку иначе мы бы получили  $m\psi(a) = \varphi(a) = k$ , т.е.  $\psi(a) = k/m$ . Таким образом,  $\text{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$  — делимая группа, не имеющая кручения. Поэтому согласно лемме группа  $H_{n-1}(X)$  не имеет кручения и делима. Такая группа обязательно содержит  $\mathbb{Q}$  в качестве подгруппы, т.е. существует мономорфизм  $0 \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow H_{n-1}(X)$ . Но тогда существует эпиморфизм  $\text{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$ .

Чтобы прийти к противоречию, остаётся доказать, что группа  $\text{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$  несчётна, а потому не существует эпиморфизма  $\mathbb{Q} = \text{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$ . Группу  $\text{Ext}(A, \mathbb{Z})$  можно вычислить с помощью инъективной резольвенты  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$ . В результате для  $A = \mathbb{Q}$  получим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Группа  $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$  счётна, а группа  $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  несчётна (задача 4.4). Поэтому группа  $\text{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$  тоже несчётна.  $\square$

## § 11. Характеристические классы

### 11.1. Векторные расслоения

Локально тривиальное расслоение  $p: E \rightarrow B$  называют  $n$ -мерным *векторным расслоением*, если слой  $F$  — это линейное пространство  $\mathbb{R}^n$ , в каждом множестве  $p^{-1}(b)$ ,  $b \in B$ , задана структура  $n$ -мерного линейного пространства и гомеоморфизмы  $h: U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$  обладают следующим свойством: для каждой точки  $b \in U$  отображение  $x \mapsto h(b, x) \in p^{-1}(b)$  является изоморфизмом линейных пространств  $F = \mathbb{R}^n$  и  $p^{-1}(b)$ .

Векторное расслоение называют *гладким*, если  $E$  и  $B$  — гладкие многообразия,  $p$  — гладкое отображение и гомеоморфизмы  $h$  являются диффеоморфизмами.



**Пример 11.1.** Пусть  $TM^n$  — касательное расслоение\*) замкнутого многообразия  $M^n$ . Тогда естественная проекция  $p: TM^n \rightarrow M^n$  является гладким векторным расслоением. Это расслоение мы будем обозначать  $\tau_{M^n}$ .

Отображение  $s: B \rightarrow E$ , для которого  $ps = \text{id}_B$ , называют сечением расслоения. Например, сечение касательного расслоения — это векторное поле на многообразии. Для любого векторного расслоения можно рассмотреть нулевое сечение, отображающее каждую точку  $b \in B$  в нулевой вектор пространства  $p^{-1}(b)$ .

Векторные расслоения  $p_1: E_1 \rightarrow B$  и  $p_2: E_2 \rightarrow B$  называют изоморфными, если существует гомеоморфизм  $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$ , изоморфно отображающий пространство  $p_1^{-1}(b)$  на пространство  $p_2^{-1}(b)$  для всех  $b \in B$ . Изоморфные векторные расслоения называют также эквивалентными или послойно гомеоморфными.

Отметим, что у изоморфных векторных расслоений гомеоморфны дополнения образа нулевого сечения в пространстве расслоения.

**Теорема 11.1.** Пусть  $p_1: E_1 \rightarrow B$  и  $p_2: E_2 \rightarrow B$  — векторные расслоения,  $f: E_1 \rightarrow E_2$  — непрерывное отображение, изоморфно отображающее  $p_1^{-1}(b)$  на  $p_2^{-1}(b)$  для всех  $b \in B$ . Тогда  $f$  — гомеоморфизм, т. е. расслоения  $p_1$  и  $p_2$  изоморфны.

**Доказательство.** Для точки  $b_0 \in B$  выберем окрестности  $U_i$  ( $i = 1, 2$ ) и гомеоморфизмы  $h_i: U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow p_i^{-1}(U_i)$ . Достаточно проверить, что отображение

$$h_2^{-1} f h_1: (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n$$

является гомеоморфизмом. По условию это отображение переводит  $(b, v)$  в  $(b, A(b)v)$ , где  $A(b)$  — невырожденная матрица, элементы которой непрерывно зависят от  $b$ . Обратное отображение имеет вид  $(b, w) \mapsto (b, A^{-1}(b)w)$ . Элементы матрицы  $A^{-1}(b)$  непрерывно зависят от  $b$ , поэтому обратное отображение непрерывно.  $\square$

Естественная проекция  $B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$  является  $n$ -мерным векторным расслоением. Это векторное расслоение называют тривиальным. Любое векторное расслоение, изоморфное тривиальному, тоже называют тривиальным.

**Задача 11.1.** Докажите, что  $n$ -мерное векторное расслоение  $p: E \rightarrow B$  тривиально тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение  $\pi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ограничение которого на каждый слой  $p^{-1}(b)$ ,  $b \in B$ , является изоморфизмом линейных пространств.

\*) Определение касательного расслоения приведено в части I на с. 221.

Замкнутое многообразие  $M^n$  называют *параллелизуемым*, если его касательное расслоение  $p: TM^n \rightarrow M^n$  тривиально.

**Теорема 11.2.** *Многообразие  $M^n$  является параллелизуемым тогда и только тогда, когда на нём есть  $n$  непрерывных векторных полей  $v_1(x), \dots, v_n(x)$ , линейно независимых в каждой точке  $x \in M^n$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\varphi: TM^n \rightarrow M^n \times \mathbb{R}^n$  — гомеоморфизм, изоморфно отображающий  $T_x M^n$  на  $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ . Выберем в  $\mathbb{R}^n$  базис  $e_1, \dots, e_n$  и положим  $v_i(x) = \varphi^{-1}(x, e_i)$ .

Предположим теперь, что  $v_1(x), \dots, v_n(x)$  — линейно независимые векторные поля. Рассмотрим отображение  $M^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM^n$ , заданное формулой  $(x, a) \mapsto a_1 v_1(x) + \dots + a_n v_n(x)$ . Согласно теореме 11.1 это отображение является гомеоморфизмом.  $\square$

**Пример 11.2.** *Сферы  $S^1, S^3$  и  $S^7$  — параллелизуемые многообразия.*

Построение линейно независимых векторных полей на сферах подробно обсуждается в [П2], § 41.

**Задача 11.2.** Докажите, что существует бесконечно много попарно не гомотопных\*) тривиализаций касательного расслоения  $TS^3$ .

**Задача 11.3.** Докажите, что существует бесконечно много попарно не гомотопных\*\*) векторных полей без особых точек на  $S^3$ .

**Пример 11.3.** *Тор  $T^n$  — параллелизуемое многообразие.*

Обсудим теперь некоторые конструкции, связанные с векторными расслоениями.

### Индукцированное расслоение

Пусть  $p: E \rightarrow B$  — векторное расслоение и  $f: B' \rightarrow B$  — непрерывное отображение. Тогда можно построить *индукцированное расслоение*  $p' = f^* p: E' \rightarrow B'$ , где

$$E' = \{(e, b') \in E \times B' \mid p(e) = f(b')\}$$

и  $p'(e, b') = b'$ . Для индукцированного расслоения коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

где  $\tilde{f}(e, b') = e$ .

---

\*) Две тривиализации расслоения *гомотопны*, если их можно связать непрерывным семейством тривиализаций.

\*\*) Два векторных поля без особых точек называют *гомотопными*, если их можно связать непрерывным семейством векторных полей без особых точек.

Проверим, что индуцированное расслоение является векторным расслоением. Структура линейного пространства в слое  $(p')^{-1}(b)$  задаётся формулой

$$\lambda_1(e_1, b') + \lambda_2(e_2, b') = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, b');$$

здесь  $p(e_1) = p(e_2) = f(b')$ , т. е.  $e_1$  и  $e_2$  лежат в одном и том же линейном пространстве  $p^{-1}(f(b'))$ .

Окрестности  $U \subset B$  и гомеоморфизму  $h: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U)$  мы сопоставим окрестность  $U' = f^{-1}(U) \subset B'$  и гомеоморфизм  $h': U' \times \mathbb{R}^n \rightarrow (p')^{-1}(U')$ , заданный формулой  $(b', v) \mapsto (e, b')$ , где  $e = h(f(b'), v)$ . Условие  $p(e) = f(b')$  при этом выполняется.

**У п р а ж н е н и е.** Докажите, что векторное расслоение тривиально тогда и только тогда, когда оно индуцировано из расслоения над точкой.

### Прямое произведение расслоений

*Прямым произведением* векторных расслоений  $p_1: E_1 \rightarrow B_1$  и  $p_2: E_2 \rightarrow B_2$  называют расслоение

$$p_1 \times p_2: E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2;$$

слой  $(p_1 \times p_2)^{-1}(b_1, b_2) = p_1^{-1}(b_1) \times p_2^{-1}(b_2)$  имеет естественную структуру векторного пространства.

**Пример 11.4.** Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — замкнутые многообразия,  $M = M_1 \times M_2$ . Тогда касательное расслоение  $\tau_M$  изоморфно прямому произведению  $\tau_{M_1} \times \tau_{M_2}$ .

### Сумма Уитни

Сумма Уитни двух расслоений — это их послынная сумма. Формальное определение таково. Пусть  $p_1: E_1 \rightarrow B$  и  $p_2: E_2 \rightarrow B$  — два векторных расслоения над одной и той же базой. Их *суммой Уитни* называют расслоение  $d^*(p_1 \times p_2)$ , где  $d: B \rightarrow B \times B$  — диагональное отображение, заданное формулой  $d(b) = (b, b)$ . Расслоение  $p: E \rightarrow B$  часто бывает удобно обозначать одной буквой  $\xi$ ; сумму Уитни расслоений  $\xi_1$  и  $\xi_2$  обозначают  $\xi_1 \oplus \xi_2$ . Такое обозначение связано с тем, что слой расслоения  $\xi_1 \oplus \xi_2$  над точкой  $b$  канонически изоморфен  $p_1^{-1}(b) \oplus p_2^{-1}(b)$ .

**Пример 11.5.** Сумма Уитни касательного расслоения над сферой  $S^n$  и одномерного тривиального расслоения является  $(n+1)$ -мерным тривиальным расслоением.

**Доказательство.** Тривиальное  $(n+1)$ -мерное векторное расслоение  $\eta$  над  $S^n$  можно представить следующим образом. Рассмотрим стандартное вложение  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  и будем считать, что к каждой точке

$x \in S^n$  приложено линейное пространство  $\mathbb{R}^{n+1}$ , полученное параллельным переносом, переводящим начало координат в точку  $x$ . При такой интерпретации пространство расслоения  $E(\eta)$  содержит пространство касательного расслоения  $E(\tau_{S^n})$ .

Рассмотрим одномерное векторное расслоение  $\nu$ , для которого пространство расслоения  $E(\nu) \subset E(\eta)$  состоит из пар  $(x, v)$ , где  $x \in S^n$  и  $v \perp T_x S^n$ , т. е.  $v$  — нормальный вектор к  $S^n$  в точке  $x$ . Легко проверить, что расслоение  $\nu$  тривиально. Действительно, будем рассматривать  $x$  как единичный вектор и запишем  $v$  в виде  $v = \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Сопоставив паре  $(x, v)$  пару  $(x, \lambda)$ , получим изоморфизм расслоения  $\nu$  на тривиальное расслоение.

Зададим отображение  $E(\tau \oplus \nu) \rightarrow E(\eta)$  формулой  $(x, v_1, v_2) \mapsto (x, v_1 + v_2)$ . Согласно теореме 11.1 это отображение является изоморфизмом расслоений.  $\square$

**Задача 11.4.** Докажите, что  $S^{n_1} \times S^{n_2} \times \dots \times S^{n_k}$  можно вложить в евклидово пространство размерности  $n_1 + \dots + n_k + 1$ .

**З а м е ч а н и е.** В статье [Ак] доказано утверждение, аналогичное задаче 11.4, для вложений в евклидово пространство произведений двумерных многообразий.

**Пример 11.6.**  $\tau_{M_1 \times M_2} \cong \pi_1^* \tau_{M_1} \oplus \pi_2^* \tau_{M_2}$ , где  $\pi_i: M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$  — естественная проекция.

**Доказательство.** Слой расслоения  $\pi_1^* \tau_{M_1} \oplus \pi_2^* \tau_{M_2}$  над точкой  $(x, y) \in M_1 \times M_2$  канонически изоморфен  $T_x M_1 \oplus T_y M_2 \cong T_{(x,y)}(M_1 \times M_2)$ .  $\square$

**Задача 11.5\*.** Докажите, что многообразие  $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}$ , где  $k \geq 2$ , параллелизуемо тогда и только тогда, когда среди чисел  $n_1, \dots, n_k$  есть по крайней мере одно нечётное число.

### Расслоение $\text{Hom}(\xi_1, \xi_2)$

Пусть  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — два векторных расслоения над одной и той же базой  $B$ . По ним можно построить расслоение  $\text{Hom}(\xi_1, \xi_2)$ , слой которого над точкой  $b \in B$  состоит из гомоморфизмов (линейных отображений) слоя расслоения  $\xi_1$  в слой расслоения  $\xi_2$ . Для этого нужно лишь подходящим образом задать топологию в пространстве расслоения. Пусть  $U$  — открытое множество, над которым расслоения  $\xi_1$  и  $\xi_2$  тривиальны,  $h_i: U \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow p_i^{-1}(U)$  — координатные гомеоморфизмы. Для фиксированной точки  $b \in U$  отображение  $h_i$  отождествляет  $\mathbb{R}^{n_i}$  со слоем расслоения  $\xi_i$  над точкой  $b$ . Поэтому получаем взаимно однозначное отображение  $h: U \times \text{Hom}(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}) \rightarrow p^{-1}(U)$ . Топологию в  $E$  нужно задать так, чтобы эти отображения для всех  $U$  были гомеоморфизмами и все множества  $p^{-1}(U)$  были открытыми. Эти условия однозначно задают топологию в  $E$ .

Нужно лишь проверить согласованность: для любых двух пересекающихся координатных окрестностей  $U$  и  $U'$  отображение

$$(U \cap U') \times \text{Hom}(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}) \xrightarrow{h^{-1} \circ h'} (U \cap U') \times \text{Hom}(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2})$$

непрерывно. Непрерывность этого отображения следует из непрерывности отображений

$$(U \cap U') \times \mathbb{R}^{n_i} \xrightarrow{h_i^{-1} \circ h'_i} (U \cap U') \times \mathbb{R}^{n_i}.$$

Аналогичную конструкцию можно применить и для построения расслоения  $\xi_1 \otimes \xi_2$ . Кроме того, подобную конструкцию можно применять не к паре расслоений, а к одному расслоению. Так можно построить расслоение  $\Lambda^k \xi$  (внешняя степень).

## 11.2. Когомологии с локальными коэффициентами

Конструкции, применённые в теории препятствий, показывают, что вполне естественно возникает ситуация, когда рассматриваются не когомологии с коэффициентами в некоторой фиксированной группе, а в каждой точке берётся своя группа коэффициентов; эти группы изоморфны, но изоморфизм не канонический. Такие когомологии с локальными коэффициентами позволяют, в частности, построить теорию препятствий, которую можно применить к более широкому классу пространств. Мы будем её применять для построения линейно независимых сечений векторного расслоения.

**З а м е ч а н и е.** В построении характеристических классов векторных расслоений в действительности участвуют только тривиальные системы локальных коэффициентов, для которых не нужна теория когомологий с локальными коэффициентами. Но это связано с тем, что некоторые характеристические классы векторных расслоений получаются в результате приведения по модулю 2 нетривиальных систем локальных коэффициентов. Поэтому для лучшего понимания связи между теорией препятствий и характеристическими классами векторных расслоений мы приводим здесь теорию когомологий с локальными коэффициентами.

Пусть в каждой точке  $x$  топологического пространства  $X$  задана абелева группа  $G_x$  (все эти группы для разных  $x$  изоморфны) и каждому пути  $\gamma$  из  $x$  в  $y$  сопоставлен изоморфизм  $\gamma_*: G_x \rightarrow G_y$ , причём гомотопным путям соответствуют одинаковые изоморфизмы, а композиции путей соответствует композиция изоморфизмов. Тогда говорят, что на  $X$  задана *локальная система* абелевых групп.

Если на  $X$  задана локальная система абелевых групп, то на группе  $G_x$  задано действие группы  $\pi_1(X, x)$ , поскольку каждой петле  $\gamma$  с началом

и концом в точке  $x$  сопоставлен изоморфизм  $\gamma: G_x \rightarrow G_x$ . В случае, когда пространство  $X$  линейно связно, локальная система абелевых групп с точностью до естественно определяемой эквивалентности однозначно задаётся группой  $G_x$  в одной точке и действием группы  $\pi_1(X, x)$  на группе  $G_x$ . Действительно, для каждой точки  $y \in X$  фиксируем путь  $\omega_y$  из  $x$  в  $y$ . Во всех точках пространства  $X$  зададим одну и ту же группу  $G = G_x$ . Пути  $\gamma_{yz}$  из  $y$  в  $z$  сопоставим изоморфизм  $G_x \rightarrow G_x$ , индуцированный петлёй  $\omega_y \gamma_{yz} \omega_y^{-1}$ .

*Пример 11.7.* Группы  $\pi_n(X, x)$ ,  $n \geq 2$ , образуют локальную систему абелевых групп. Путь из  $x$  в  $y$  индуцирует изоморфизм  $\pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, y)$  стандартным образом.

*Пример 11.8.* Рассмотрим на многообразии  $M^n$  локальную систему абелевых групп  $G_x \cong \mathbb{Z}$ , на которых элемент фундаментальной группы действует либо тождественно, либо как отображение  $a \mapsto -a$ , в зависимости от того, сохраняется или изменяется ориентация при обходе вдоль представляющего пути. Эту локальную систему абелевых групп называют ориентационной и обозначают  $\mathbb{Z}_{\text{Ор}} M^n$ .

Если пространство  $X$  локально линейно связно и локально односвязно, то локальная система абелевых групп позволяет установить канонический изоморфизм между группами  $G_x$  в достаточно малой окрестности. Например, в случае симплицального комплекса такой изоморфизм можно установить на каждом симплексе. Поэтому на симплицальном комплексе локальную систему абелевых групп можно задать следующим образом. В каждой вершине  $v$  задаётся группа  $G_v$ , а для каждой пары вершин  $u, v$ , принадлежащих одному симплексу, задаётся изоморфизм  $\gamma_{uv}: G_v \rightarrow G_u$  так, что  $\gamma_{uv} \gamma_{vw} = \gamma_{uw}$  для любых вершин  $u, v, w$ , принадлежащих одному симплексу.

Перейдём к определению гомологий и когомологий с коэффициентами в локальной системе  $\mathfrak{G}$  абелевых групп на симплицальном комплексе  $K$ . Пусть  $\Delta$  — симплекс в  $K$ . Для всех точек  $x \in \Delta$  можно установить канонический изоморфизм между группами  $G_x$ , поэтому можно использовать обозначение  $G_\Delta$ . Группа  $k$ -мерных цепей  $C_k(K; \mathfrak{G})$  состоит из конечных формальных сумм  $\sum a_i \Delta_i^k$ , где  $a_i \in G_{\Delta_i^k}$ . Граничный гомоморфизм  $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$  задаётся формулой

$$\partial[v_0, \dots, v_k] = \sum (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k].$$

Такое определение имеет смысл, потому что если  $\Delta' \subset \partial\Delta \subset \Delta$ , то группа  $G_{\Delta'}$  канонически изоморфна  $G_\Delta$ . Равенство  $\partial\partial = 0$  доказывается точно так же, как и для обычных симплицальных цепей. Группа гомологий  $H_k(K; \mathfrak{G})$  определяется как факторгруппа  $\text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$ .

Группа  $k$ -мерных коцепей  $C^k(K; \mathfrak{G})$  состоит из отображений, сопоставляющих каждому симплексу  $\Delta^k$  элемент группы  $G_{\Delta^k}$ . Кограничный гомоморфизм  $\delta$  задаётся формулой

$$(\delta c^k)[v_0, \dots, v_{k+1}] = \sum (-1)^i c^k([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}]).$$

Группа когомологий  $H^k(K; \mathfrak{G})$  определяется стандартно.

Если на симплициальном комплексе задана структура  $CW$ -комплекса (клетками служат объединения некоторых симплексов), то можно определить клеточные гомологии и когомологии точно так же, как это делалось раньше. При этом нужно учесть следующее. Если  $\chi: D^k \rightarrow X$  — характеристическое отображение клетки, то для всех  $x \in D^k$  можно установить канонический изоморфизм между группами  $G_x$ . Но точки  $x, y \in D^k$  могут отображаться в одну и ту же точку. При этом два экземпляра группы  $G$  в точках  $x$  и  $y$  отождествляются посредством действия на  $G$  элемента фундаментальной группы, представленного образом отрезка  $xy$ .

*Пример 11.9.* Рассмотрим на  $\mathbb{R}P^n$ ,  $n \geq 2$ , локальную систему абелевых групп  $G_x \cong \mathbb{Z}$ , на которых образующая фундаментальной группы действует как отображение  $a \mapsto -a$ . Эту локальную систему абелевых групп обозначим  $\mathbb{Z}_T$  (от слова *Twisted*). Тогда

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_T) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } k = n \text{ и } n \text{ чётно;} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } k < n \text{ и } k \text{ чётно;} \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_T) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } k = n \text{ и } n \text{ чётно;} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } k \leq n \text{ и } k \text{ нечётно;} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

*Доказательство.* Граничный гомоморфизм  $\partial: C_k \rightarrow C_{k-1}$  является умножением на  $1 + (-1)^k(-1) = 1 + (-1)^{k+1}$ . Кограничный гомоморфизм  $\delta: C^{k-1} \rightarrow C^k$  имеет такой же вид, потому что он двойствен  $\partial$ .  $\square$

*З а м е ч а н и е.* Локальную систему  $\mathbb{Z}_T$  можно определить для любого пространства с фундаментальной группой  $\mathbb{Z}_2$ .

### Изоморфизм Пуанкаре с локальными коэффициентами

Напомним, что обычная двойственность Пуанкаре для ориентированного многообразия  $M^n$  с двумя двойственными клеточными разбиениями  $K$  и  $K^*$  устанавливает изоморфизм  $C_k(K; \mathbb{Z}) \rightarrow C^{n-k}(K^*; \mathbb{Z})$ , который индуцирует изоморфизм  $H_k(M^n) \cong H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z})$ . А именно, цепи  $c_k = \sum a_i \sigma_i$  сопоставляется коцепь  $c^{n-k}$ , для которой  $\langle c^{n-k}, \sigma_i^* \rangle = a_i$ . При выборе

ориентации клетки  $\sigma_i^*$  учитывается ориентация многообразия  $M^n$ ; если ориентацию многообразия  $M^n$  заменить на противоположную, то  $\sigma_i^*$  заменится на  $-\sigma_i^*$ .

Для многообразия  $M^n$ , которое не обязательно ориентируемо, аналогичным образом можно построить изоморфизмы  $C_k(K; \text{Ог}) \rightarrow C^{n-k}(K^*; \mathbb{Z})$  и  $C_k(K; \mathbb{Z}) \rightarrow C^{n-k}(K^*; \text{Ог})$ , где  $\text{Ог} = \text{Ог } M^n$ . Первый изоморфизм строится следующим образом. Элементами групп  $C_k(K; \text{Ог})$  служат суммы  $\sum (\varepsilon_i a_i) \sigma_i$ , где  $a_i \in \mathbb{Z}$  и  $\varepsilon_i$  — некая ориентация многообразия  $M^n$  в точках  $k$ -мерной клетки  $\sigma_i$ . Сопоставим такой сумме коцепь  $c^{n-k} \in C^{n-k}(K^*; \mathbb{Z})$ , для которой  $\langle c^{n-k}, \sigma_i^* \rangle = a_i$ . Такое определение имеет смысл. Действительно, выбор ориентации  $\varepsilon_i$  задаёт как число  $a_i$ , так и ориентацию клетки  $\sigma_i^*$ . При этом если вместо  $\varepsilon_i$  выбрать  $-\varepsilon_i$ , то вместо  $a_i$  получим  $-a_i$ , а вместо  $\sigma_i^*$  получим  $-\sigma_i^*$ .

Второй изоморфизм строится следующим образом. Коцепь из группы  $C^{n-k}(K^*; \text{Ог})$  сопоставляет каждой  $(n-k)$ -мерной клетке  $\sigma_i^*$  некий элемент  $a_i \varepsilon_i$ , где  $a_i \in \mathbb{Z}$  и  $\varepsilon_i$  — ориентация многообразия  $M^n$  в точках клетки  $\sigma_i^*$ . Цепи  $c_k = \sum a_i \sigma_i \in C_k(K; \mathbb{Z})$  сопоставим коцепь  $c^{n-k} \in C^{n-k}(K^*; \text{Ог})$ , которая клетке  $\sigma_i^*$  сопоставляет элемент  $a_i \varepsilon_i$ . Это определение имеет смысл, потому что если вместо ориентации  $\varepsilon_i$  взять ориентацию  $-\varepsilon_i$ , то получим коцепь, которая клетке  $-\sigma_i^*$  сопоставляет элемент  $-a_i \varepsilon_i$ .

Таким образом, получаем следующее утверждение.

**Т е о р е м а 11.3** (изоморфизм Пуанкаре). *Для любого замкнутого многообразия  $M^n$  имеются изоморфизмы  $H_k(M^n; \text{Ог}) \cong H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z})$  и  $H_k(M^n; \mathbb{Z}) \cong H^{n-k}(M^n; \text{Ог})$  (изоморфизмы Пуанкаре с локальными коэффициентами).*

### Препятствия к продолжению сечений

Рассмотрим локально тривиальное расслоение  $p: E \rightarrow B$  со слоем  $F$ . Мы будем предполагать, что  $B$  — симплициальный комплекс. Пусть на  $B^n$  ( $n$ -мерном остове комплекса  $B$ ) задано сечение  $s: B^n \rightarrow E$  расслоения  $p$ . Мы хотим выяснить, можно ли это сечение продолжить на  $B^{n+1}$ , а если нельзя, то можно ли его изменить на  $B^n \setminus B^{n+1}$  так, чтобы после этого его уже можно было продолжить. Эта задача очень похожа на обычную задачу теории препятствий. Действительно, над каждым симплексом  $\Delta^{n+1} \subset B^{n+1}$  расслоение тривиально. Поэтому сечение над  $\Delta^{n+1}$  полностью задаётся отображением в слой  $F$ , т. е. нужно продолжить отображение  $\partial \Delta^{n+1} \rightarrow F$  до отображения  $\Delta^{n+1} \rightarrow F$ . Но это всё так только при условии, что фиксирована тривиализация  $p^{-1}(\Delta^{n+1}) \rightarrow F \times \Delta^{n+1}$ .

Препятствие  $c^{n+1}(s) \in C^{n+1}(B; \pi_n(p^{-1}(b)))$  определяется точно так же, как и в обычной теории препятствий. Но теперь рассматриваются коце-



пи с коэффициентами в локальной системе абелевых групп  $\{\pi_n(p^{-1}(b))\}$  на пространстве  $B$ . Действительно, если сделать стандартное для теории препятствий предположение о гомотопической  $n$ -простоте пространства  $F$ , то каждый путь из точки  $b_1 \in B$  в точку  $b_2 \in B$  будет задавать изоморфизм  $\pi_n(p^{-1}(b_1)) \rightarrow \pi_n(p^{-1}(b_2))$ ; этот изоморфизм строится с помощью теоремы о накрывающей гомотопии.

Все утверждения из п. 10.2 переносятся на препятствия к продолжению сечений без существенных изменений. Нужно лишь рассматривать когомологии с коэффициентами в локальной системе гомотопических групп слоя. Слой  $F$ , как уже говорилось, должен быть гомотопически простым.

### 11.3. Характеристические классы Штифеля—Уитни

Предположим, что слой  $F$  расслоения  $p: E \rightarrow B$  таков, что  $\pi_0(F) = \dots = \pi_{n-1}(F) = 0$ , но  $\pi_n(F) \neq 0$ . Здесь  $n \geq 1$ . При  $n = 1$  нужно дополнительно предположить, что  $\pi_1(F)$  — абелева группа. Тогда во всех случаях слой  $F$  будет гомотопически  $n$ -прост.

При  $k \leq n$  нет препятствий к продолжению сечения на  $k$ -мерный остов. Первое нетривиальное препятствие лежит в группе  $H^{n+1}(B; \mathfrak{G})$ , где  $\mathfrak{G}$  — локальная система  $\{\pi_n(p^{-1}(b))\}$ . Это препятствие не зависит от выбора сечения на  $n$ -мерном остове. Действительно, если  $s_1$  и  $s_2$  — два сечения на  $n$ -мерном остове, а  $c^{n+1}(s_1), c^{n+1}(s_2) \in Z^{n+1}(B; \mathfrak{G})$  — препятствия к продолжению этих сечений на  $B^{n+1}$ , то существует коцепь  $d^n(s_1, s_2) \in C^n(B; \mathfrak{G})$ , для которой  $\delta d^n(s_1, s_2) = c^{n+1}(s_1) - c^{n+1}(s_2)$  (см. лемму 2 на с. 129).

В такой ситуации расслоению можно сопоставить первое нетривиальное препятствие к построению сечения.

Для векторных расслоений нельзя непосредственно применить эту конструкцию для построения характеристических классов, потому что слой векторного расслоения — стягиваемое пространство. Но каждому  $n$ -мерному векторному расслоению можно сопоставить  $n - 1$  расслоений над той же самой базой, слои которых — наборы из  $k$  ортонормированных векторов, где  $1 \leq k \leq n - 1$ . Делается это следующим образом. Пусть  $\xi$  — векторное расслоение над конечным симплициальным комплексом  $B$ . Та же самая конструкция, которая применялась в части I для построения римановой метрики на многообразии, позволяет построить риманову метрику на  $\xi$ . Ясно также, что любые две римановы метрики гомотопны в классе римановых метрик. Действительно, если  $(\cdot, \cdot)_0$  и  $(\cdot, \cdot)_1$  — два скалярных произведения на векторном пространстве, то  $t(\cdot, \cdot)_0 + (1 - t)(\cdot, \cdot)_1$  — скалярное произведение для всех  $t \in [0, 1]$ . Рассмотрим расслоение  $p_k: E_k \rightarrow B$ , где

$E_k$  состоит из пар

(точка  $b \in B$ ,  $k$  ортонормированных векторов в слое  $\xi$  над  $b$ );

здесь имеется в виду упорядоченный набор векторов. Топология в пространстве  $E_k$  задаётся естественным образом.

Слой построенного расслоения  $\xi_k$  — это так называемое *многообразие Штифеля*  $V(n, k)$ , состоящее из ортонормированных наборов  $k$  векторов в  $\mathbb{R}^n$ . Для расслоения  $\xi_k$  можно рассмотреть характеристический класс. Прежде всего нужно вычислить первую нетривиальную гомотопическую группу пространства  $V(n, k)$

**Задача 11.6.** Докажите, что  $V(n, k)$  — многообразие размерности  $nk - \frac{k(k+1)}{2}$ .

**У п р а ж н е н и е.** Докажите, что  $V(n+1, 2)$  — многообразие единичных касательных векторов к сфере  $S^n$ .

**Т е о р е м а 11.4.** Если  $i < n - k$ , то  $\pi_i(V(n, k)) = 0$ . Первая нетривиальная гомотопическая группа  $\pi_{n-k}(V(n, k))$  равна  $\mathbb{Z}$ , если  $n - k$  чётно или  $k = 1$ , и равна  $\mathbb{Z}_2$ , если  $n - k$  нечётно и  $k > 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Прежде всего покажем, что  $\pi_i(V(n, k)) = 0$  при  $i < n - k$ . Применим индукцию по  $k$ . При  $k = 1$  многообразие  $V(n, 1)$  представляет собой сферу  $S^{n-1}$ . Ясно, что  $\pi_i(S^{n-1}) = 0$  при  $i < n - 1$ . Чтобы сделать индукционный шаг, рассмотрим отображение  $V(n, k+1) \rightarrow V(n, k)$ , сопоставляющее набору из  $k+1$  ортонормированных векторов первые  $k$  векторов. Это отображение является локально тривиальным расслоением со слоем  $S^{n-k-1}$ . Запишем точную последовательность этого расслоения:

$$\pi_i(S^{n-k-1}) \longrightarrow \pi_i(V(n, k+1)) \longrightarrow \pi_i(V(n, k)) \longrightarrow \pi_{i-1}(S^{n-k-1}).$$

При  $i < n - k - 1$  этот участок точной последовательности имеет вид  $0 \rightarrow \pi_i(V(n, k+1)) \rightarrow 0 \rightarrow 0$ , поэтому  $\pi_i(V(n, k+1)) = 0$ .

Займёмся теперь вычислением  $\pi_{n-k}(V(n, k))$ . Случай  $k = 1$  рассматривается отдельно:  $V(n, 1) \approx S^{n-1}$ . В дальнейшем будем предполагать, что  $1 < k < n$ . Рассмотрим отображение  $V(n+1, k+1) \rightarrow V(n+1, 1) = S^n$ , сопоставляющее ортонормированным векторам  $v_1, \dots, v_{k+1}$  вектор  $v_{k+1}$ . Это отображение является локально тривиальным расслоением со слоем  $V(n, k)$ . Запишем точную гомотопическую последовательность этого расслоения:

$$\pi_{i+1}(S^n) \longrightarrow \pi_i(V(n, k)) \longrightarrow \pi_i(V(n+1, k+1)) \longrightarrow \pi_i(S^n).$$

Если  $i \leq n - 2$ , то  $\pi_i(V(n, k)) \cong \pi_i(V(n+1, k+1))$ . Последовательно применяя такие изоморфизмы, получаем  $\pi_{n-k}(V(n, k)) \cong \pi_{n-k}(V(n-k+2, 2))$ ;

изоморфизм  $\pi_{n-k}(V(n-k+3, 3)) \cong \pi_{n-k}(V(n-k+2, 2))$  обеспечивается неравенством  $n-k \leq (n-k+2) - 2$ .

Итак, остаётся проверить, что группа  $\pi_{n-2}(V(n, 2))$  равна  $\mathbb{Z}$ , если  $n$  чётно, и равна  $\mathbb{Z}_2$ , если  $n$  нечётно. Рассмотрим расслоение  $V(n, 2) \rightarrow V(n, 1) = S^{n-1}$  со слоем  $V(n-1, 1) = S^{n-2}$ . Запишем точную гомотопическую последовательность этого расслоения:

$$\pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-2}(S^{n-2}) \longrightarrow \pi_i(V(n, 2)) \longrightarrow \pi_{n-2}(S^{n-1}) = 0.$$

Гомоморфизм  $\partial_*$  отображает  $\mathbb{Z}$  в  $\mathbb{Z}$ , поэтому достаточно вычислить  $\partial_*(\text{id}_{S^{n-1}})$ . Элемент  $\partial_*(\text{id}_{S^{n-1}}) \in \pi_{n-2}(S^{n-2})$  согласно определению строится следующим образом. Рассмотрим на сфере  $S^{n-1}$  однопараметрическое семейство сфер  $S_t^{n-2}$ ,  $t \in (0, 1)$ , проходящих через фиксированную точку  $e_0 \in S^{n-1}$  и имеющих в этой точке общую касательную  $(n-2)$ -мерную плоскость. Нужно взять поднятие точки  $e_0$  в пространство расслоения  $V(n, 2)$ , продолжить это поднятие на  $S_t^{n-2}$  при малых  $t$ , а затем продолжить и для всех  $t < 1$ . При  $t \rightarrow 1$  получим некое отображение сферы  $S_t^{n-2}$  в слой. Гомотопический класс этого отображения и есть искомый элемент группы  $\pi_{n-2}(S^{n-2})$ .

Чтобы поднять в  $V(n, 2)$  точку  $e_0 \in S^{n-1}$  (которую мы рассматриваем как единичный вектор), нужно добавить к  $e_0$  некоторый единичный вектор  $e_1$ , ортогональный  $e_0$ . Вектор  $e_1$  можно рассматривать как вектор, касательный к  $S^{n-1}$  в точке  $e_0$ .

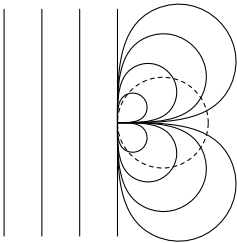


Рис. 34. Траектории векторного поля на  $S^2$

Поднятие можно построить с помощью векторного поля с одной изолированной особой точкой. При этом нужно, чтобы в одной половине окрестности особой точки векторы были параллельны друг другу, а всё вращение векторов происходило во второй половине окрестности (первая половина окрестности соответствует сферам  $S_t^{n-2}$  при  $t < 1/2$ , а вторая — при  $t > 1/2$ ). На рис. 34 для  $n = 3$  пунктиром изображена окружность  $S_t^1$ ,  $t > 1/2$ . При  $t \rightarrow 1$  степень отображения  $S_t^{n-2} \rightarrow S^{n-2}$ , сопоставляющего каждой точке касательный вектор в этой точке, равна индексу особой точки,

т.е. эйлеровой характеристике сферы  $S^{n-1}$ . Таким образом,  $\partial_*(\text{id}_{S^{n-1}}) = \chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$ . Это означает, что если  $n$  чётно, то  $\text{Im } \partial_* = 0$ , а если  $n$  нечётно, то  $\text{Im } \partial_* = 2\mathbb{Z}$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Многие другие гомотопические группы многообразий Штифеля, имеющие большое значение для теории гомотопий, вычислены в серии статей [Pa].

**Задача 11.7.** Вычислите группы гомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  многообразия Штифеля  $V(n+2, 2)$ ,  $n \geq 1$ .

Характеристический класс расслоения  $p_k$ , который лежит в группе  $H^{n-k+1}(B, \{\pi_{n-k}(V(n, k))\})$ , представляет собой препятствие к продолжению  $k$  линейно независимых сечений на  $(n-k+1)$ -мерный остов. Если  $n-k$  нечётно и  $k > 1$ , то этот класс лежит в обычных когомологиях  $H^{n-k+1}(B; \mathbb{Z}_2)$ , потому что нет нетривиальных автоморфизмов  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , т.е. в этом случае система локальных коэффициентов тривиальна. Соответствующий класс когомологий  $\omega_{2j} \in H^{2j}(B; \mathbb{Z}_2)$  называют *характеристическим классом Штифеля—Уитни*. Этот класс — препятствие к продолжению  $n+1-2j$  линейно независимых сечений на  $2j$ -мерный остов.

**Задача 11.8.** Многообразии  $M^n$  называют *почти параллелизуемым*, если многообразие  $M^n \setminus \{x\}$ , где  $x \in M^n$ , параллелизуемо. Докажите, что односвязное четырёхмерное многообразие  $M^4$  почти параллелизуемо тогда и только тогда, когда для его касательного расслоения класс  $\omega_2$  нулевой.

Чтобы определить классы Штифеля—Уитни нечётной размерности (и класс  $\omega_n$  при чётном  $n$ ), нужно привести целочисленные коэффициенты по модулю 2. Так мы получим классы Штифеля—Уитни  $\omega_{2j+1} \in H^{2j+1}(B; \mathbb{Z}_2)$ . Подчеркнём, что они не совпадают с препятствиями  $\sigma_{2j+1} \in H^{2j+1}(B, \{\pi_{2j}(V(n, n-2j))\})$ , хотя и очень близки к ним (см. задачу 11.10).

Стинрод показал, что препятствие  $\sigma_{2j+1}$ ,  $j \geq 1$ , выражается через характеристический класс  $\omega_{2j} = \sigma_{2j}$  с помощью следующей конструкции. Рассмотрим локально тривиальное расслоение  $V(n, n-2j+1) \xrightarrow{S^{2j-1}} \xrightarrow{S^{2j-1}} V(n, n-2j)$  и запишем для него точную гомотопическую последовательность:

$$\pi_{2j}(V(n, n-2j)) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{2j-1}(S^{2j-1}) \xrightarrow{i_*} \pi_{2j-1}(V(n, n-2j+1)) \rightarrow 0. \quad (1)$$

В правой части вместо группы  $\pi_{2j-1}(V(n, n-2j))$  мы поставили 0, потому что  $2j-1 < n-(n-2j)$ . Мы получили точную последовательность  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ , поэтому  $\text{Im } \partial_* = \text{Ker } i_* = 2\mathbb{Z}$ , а значит,  $\text{Ker } \partial_* = 0$ . Таким образом, в точной последовательности (1) слева можно дописать  $0 \rightarrow$  и получить короткую точную последовательность групп. Более того, мы получаем короткую точную последовательность локальных систем абелевых групп. (Это требует небольшой проверки.) Как и для обычных групп когомологий, эта точная последовательность индуцирует гомоморфизм Бокштейна

$$\beta^*: H^{2j}(B, \{\pi_{2j-1}(V(n, n-2j+1))\}) \rightarrow H^{2j+1}(B, \{\pi_{2j}(V(n, n-2j))\}).$$

**Задача 11.9.** Докажите, что  $\sigma_{2j+1} = \beta^* \sigma_{2j}$  при  $2 \leq 2j < n$ .

**Замечание.** Задача 13.2 показывает, что если  $\omega_1 = 0$ , то имеет место соотношение  $\omega_{2j+1} = \text{Sq}^1 \omega_{2j}$ .

**Задача 11.10.** Докажите, что все препятствия  $\sigma_k$ ,  $k < \dim \xi$ , имеют порядок 2. Более того, если число  $n = \dim \xi$  нечётное, то класс  $\sigma_n$  тоже имеет порядок 2.

Результат задачи 11.10 показывает, что почти все классы  $\omega_k(\xi)$  являются настоящими препятствиями, т.е. нужные продолжения сечений существуют тогда и только тогда, когда эти классы обращаются в нуль. Единственное исключение составляет класс  $\omega_n(\xi)$ , где  $n = \dim \xi$  — чётное число. Только он получается приведением по модулю 2 класса, который не обязан иметь порядок 2.

## 11.4. Свойства классов Штифеля—Уитни

Мы определили классы  $\omega_2, \dots, \omega_n$  для  $n$ -мерного векторного расслоения. Будем полагать  $\omega_0 = 1$  и  $\omega_i = 0$  при  $i > n$ .

### Класс $\omega_1$

Класс  $\omega_1$  требует отдельного определения, потому что он должен соответствовать препятствию к продолжению  $n$  линейно независимых сечений с нульмерного остова на одномерный. Если применить стандартную конструкцию теории препятствий, то соответствующий коцикл должен принимать значения в  $\pi_0(V(n, n))$ , а  $\pi_0$  — не группа. Мы определяли  $V(n, k)$  только для  $k \leq n - 1$ , но это определение годится и для  $k = n$ . Правда, при этом получается несвязное многообразие, диффеоморфное  $O(n)$ . Таким образом, множество  $\pi_0(V(n, n))$  состоит из двух элементов. Это тоже нарушает единообразие, потому что для препятствий  $\sigma_i$  с нечётными номерами локальными коэффициентами служат группы  $\mathbb{Z}$ . В связи со всем этим вместо  $\pi_0(V(n, n))$  возьмём приведённую группу гомологий  $\tilde{H}_0(V(n, n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ . Тогда мы получим локальную систему коэффициентов  $a\varepsilon$ , где  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $\varepsilon$  — ориентация слоя. Действительно, компоненты связности пространства  $V(n, n)$  отождествляются с ориентациями слоя, поэтому элементы группы  $\tilde{H}_0(V(n, n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  имеют вид  $a O_{\Gamma_1} - a O_{\Gamma_2}$ ; каждой ориентации можно сопоставить её коэффициент.

Ориентацию слоя можно переносить вдоль пути в базе, поэтому мы действительно получаем локальную систему коэффициентов.

Перейдём непосредственно к построению препятствий к продолжению  $n$  линейно независимых сечений с нульмерного остова на одномерный. Компоненты связности пространства  $V(n, n)$  — это ориентации. Так

что речь идёт о задании ориентаций в слоях над одномерным остовом. Пусть в каждой вершине  $v_i$  задана ориентация  $\varepsilon_i$ . Рассмотрим коцепь  $c^1 \in C^1(B; \{\tilde{H}_0(V(n, n); \mathbb{Z})\})$ , для которой  $\langle c^1, [v_i v_j] \rangle = \varepsilon_j - \varepsilon_i$ . Эта коцепь — коцикл, потому что

$$\begin{aligned} \langle \delta c^1, [v_i v_j v_k] \rangle &= \langle c^1, [v_j v_k] \rangle - \langle c^1, [v_i v_k] \rangle + \langle c^1, [v_i v_j] \rangle = \\ &= (\varepsilon_k - \varepsilon_j) - (\varepsilon_k - \varepsilon_i) + (\varepsilon_j - \varepsilon_i) = 0. \end{aligned}$$

Заданные ориентации  $\varepsilon_i$  продолжаются на одномерный остов тогда и только тогда, когда  $c^1 = 0$ . Изменение ориентаций в некоторых вершинах соответствует добавлению к  $c^1$  некой кограницы  $\delta c^0$ . Поэтому продолжение ориентаций на одномерный остов существует тогда и только тогда, когда когомологический класс коцикла  $c^1$ , который мы обозначим  $\sigma_1$ , равен нулю.

Класс  $\sigma_1$  не зависит от выбора сечения над нульмерным остовом. Действительно, как мы уже упоминали, если в вершинах задать другие ориентации, то добавится кограница. Из этого, в частности, следует, что  $2\sigma_1 = 0$ . В самом деле, если во всех вершинах  $v_i$  вместо ориентаций  $\varepsilon_i$  задать ориентации  $-\varepsilon_i$ , то коцикл  $c^1$  изменит знак, поэтому класс  $\sigma_1$  тоже изменит знак. Но класс  $\sigma_1$  не зависит от выбора ориентаций, поэтому  $\sigma_1 = -\sigma_1$ , т. е.  $2\sigma_1 = 0$ .

После приведения локальной системы коэффициентов  $\tilde{H}_0(V(n, n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  по модулю 2 из класса  $\sigma_1$  получим класс  $\omega_1$ . Равенства  $\sigma_1 = 0$  и  $\omega_1 = 0$  эквивалентны, потому что  $2\sigma_1 = 0$ . Таким образом,  $\omega_1 = 0$  тогда и только тогда, когда в слоях расслоения над одномерным остовом можно выбрать согласованные ориентации. Это свойство имеет следующий геометрический смысл.

Пусть  $\xi$  —  $n$ -мерное векторное расслоение над линейно связной базой. Введём в одномерном расслоении  $\Lambda^n \xi$  риманову метрику и рассмотрим в нём единичные векторы (они соответствуют ориентациям). Если полученное пространство связно, то расслоение  $\xi$  называют *неориентируемым*, а если оно состоит из двух связных компонент — *ориентируемым*. Выбор одной из этих двух компонент соответствует заданию ориентации во всех слоях расслоения.

*Пример 11.10. Одномерное расслоение ориентируемо тогда и только тогда, когда оно тривиально.*

*Теорема 11.5. Векторное расслоение над симплицальным комплексом ориентируемо тогда и только тогда, когда ориентируемо его ограничение на одномерный остов.*

*Доказательство.* Пространство  $\{x \in \Lambda^n \xi \mid \|x\| = 1\}$  двулистно накрывает базу. Это пространство является  $CW$ -комплексом, а  $CW$ -комплекс связан тогда и только тогда, когда связан его одномерный остов.  $\square$

Таким образом,  $\omega_1(\xi) = 0$  тогда и только тогда, когда расслоение  $\xi$  ориентируемо. Пользуясь этим свойством, вычислим класс  $\omega_1$  одного расслоения над  $\mathbb{R}P^n$ , которое очень важно для различных приложений характеристических классов.

Пусть  $\gamma_n^1$  — расслоение над  $\mathbb{R}P^n$ , для которого пространство расслоения  $E(\gamma_n^1)$  состоит из пар  $(x \in \mathbb{R}P^n, v = \lambda x)$ ; здесь имеется в виду, что точка  $x \in \mathbb{R}P^n$  представлена ненулевым вектором в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , а слой над этой точкой состоит из всех векторов, пропорциональных этому вектору.

**Теорема 11.6.** *Справедливо равенство  $\omega_1(\gamma_n^1) = \alpha$ , где  $\alpha$  — образующая группы  $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ .*

**Доказательство.** В группе  $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$  есть только один ненулевой элемент, поэтому достаточно проверить, что  $\omega_1(\gamma_n^1) \neq 0$ . Расслоение  $\gamma_n^1$  одномерное, поэтому нужно проверить, что оно нетривиально.

Возьмём произвольное сечение  $s: \mathbb{R}P^n \rightarrow E(\gamma_n^1)$  и рассмотрим композицию отображений  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n \xrightarrow{s} E(\gamma_n^1)$ , где первое отображение — каноническое двулистное накрытие. В результате получим отображение  $S^n \rightarrow \mathbb{R}$ , заданное формулой  $x \mapsto \lambda(x)$ . При этом  $\lambda(x)x = \lambda(-x)(-x)$ , т. е.  $\lambda(-x) = -\lambda(x)$ . Рассмотрим на сфере  $S^n$  дугу из точки  $x$  в точку  $-x$ . Функция  $\lambda$  в концах этой дуги принимает значения разного знака, поэтому в некоторой точке дуги она обращается в нуль. Таким образом, у расслоения  $\gamma_n^1$  нет сечений, нигде не обращающихся в нуль, т. е. это расслоение нетривиально.  $\square$

### Класс $\omega_n$ и эйлеров класс $e$

По определению  $\sigma_n \in H^n(B; \{\pi_{n-1}(V(n, 1))\})$  — это препятствие к продолжению одного сечения, нигде не обращающегося в нуль, на  $n$ -мерный остов. Отметим, что  $V(n, 1) \approx S^{n-1}$ .

Если расслоение ориентировано, то в каждой точке  $b \in B$  задан изоморфизм  $\varphi: \pi_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow \mathbb{Z}$ . (Всего есть два изоморфизма групп  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ; изменение ориентации соответствует изменению изоморфизма.) Применяя изоморфизм  $\varphi$ , получаем изоморфизм  $H^n(B; \{\pi_{n-1}(V(n, 1))\}) \rightarrow H^n(B; \mathbb{Z})$ . Образ класса  $\sigma_n$  при этом изоморфизме называют *эйлеровым классом* и обозначают  $e$ . Класс  $\omega_n$  получается из  $e$  приведением по модулю 2.

Если изменить ориентацию расслоения, то  $e$  изменит знак, т. е.  $e(-\xi) = -e(\xi)$ .

**Теорема 11.7.** *Если размерность расслоения  $\xi$  нечётна, то  $2e(\xi) = 0$ .*

**Доказательство.** Отображение  $v \mapsto -v$  индуцирует послыйный гомеоморфизм пространства расслоения на себя. Поэтому в случае нечётной размерности расслоения  $\xi$  и  $-\xi$  изоморфны. (В случае чётной размерности отображение  $v \mapsto -v$  сохраняет ориентацию.)  $\square$

Таким образом, для векторных расслоений нечётной размерности нет существенной разницы между классами  $\omega_n(\xi)$  и  $e(\xi)$ . Они, правда, лежат в разных группах, но оба они являются настоящими препятствиями, т. е. сечение продолжается на  $n$ -мерный остов тогда и только тогда, когда  $\omega_n(\xi) = 0$  или  $e(\xi) = 0$  (оба условия эквивалентны). Но для чётномерных ориентируемых расслоений настоящим препятствием является именно класс  $e(\xi)$ , а не  $\omega_n(\xi)$ . Из равенства  $\omega_n(\xi) = 0$  ещё не следует, что над  $n$ -мерным остовом есть сечение, нигде не обращающееся в нуль. Для этого нужно, чтобы выполнялось равенство  $e(\xi) = 0$ . Например,  $\omega_2(S^2) = 0$ , но  $e(S^2) = 2 \neq 0$ , а потому на сфере  $S^2$  нет векторного поля, нигде не обращающегося в нуль.

Пусть  $M^n$  — замкнутое ориентированное многообразие,  $\xi^n$  — ориентированное  $n$ -мерное расслоение над  $M^n$ . Используя интерпретацию класса  $e(\xi^n) \in H^n(M^n; \mathbb{Z})$  как препятствия, этот класс можно вычислить следующим образом. Пространство  $E$  расслоения  $\xi^n$  локально является произведением ориентированного многообразия  $M^n$  на другое ориентированное многообразие — слой расслоения  $\xi^n$ , поэтому его можно ориентировать. (Отметим, что при нечётном  $n$  существенно, в каком порядке берётся произведение; при перестановке порядка множителей ориентация изменяется.) Рассмотрим произвольное сечение  $s: M^n \rightarrow E$ , трансверсально пересекающее нулевое сечение  $M_0^n \subset E$  в изолированных точках. Тогда  $\langle e(\xi^n), [M^n] \rangle = \langle [M_0^n], s(M^n) \rangle$ . Действительно, если мы выберем в качестве представителя кохомологического класса  $e(\xi)$  коцикл, который является препятствием к продолжению сечения  $s$  с  $(n-1)$ -мерного остова на  $n$ -мерный остов, то этот коцикл на каждом  $n$ -мерном симплексе  $\Delta^n$  триангуляции многообразия  $M^n$  принимает значение, равное сумме индексов особых точек векторного поля  $s$  в  $\Delta^n$ . С другой стороны, индекс пересечения симплекса  $\Delta^n$  в  $M_0^n$  с  $s(M^n)$  тоже равен сумме индексов особых точек векторного поля  $s$  в этом симплексе.

**Пример 11.11.** Если  $M^n$  — замкнутое ориентированное многообразие, то  $\langle e(\tau_{M^n}), [M^n] \rangle = \chi(M^n)$ .

Обратите внимание, что при изменении ориентации одновременно изменяют знак как эйлеров класс  $e(\tau_{M^n})$ , так и фундаментальный класс  $[M^n]$ .

**Пример 11.12.** Эйлерова характеристика сферы  $S^n$  чётна, поэтому  $\omega_n(\tau_{S^n}) = 0$  для всех  $n \geq 1$ .

Для сферы  $S^2$  касательное расслоение нетривиально, но  $\omega_1 = 0$  и  $\omega_2 = 0$ . Поэтому даже полный набор классов Штифеля—Уитни не позволяет отличить тривиальное расслоение от нетривиального.

**Теорема 11.8.** Пусть  $\dim \xi = n$  и  $\dim \eta = m$ . Тогда  $\omega_{n+m}(\xi \times \eta) = \omega_n(\xi) \times \omega_m(\eta)$ .



**Доказательство.** Возьмём  $n$ -мерную клетку  $\sigma$  базы расслоения  $\xi$ . Построим сечение (не обращающееся в нуль) расслоения  $\xi$  над  $\partial\sigma$ , а затем продолжим его внутрь так, чтобы все нули сечения были невырожденными. Пусть  $a(\sigma)$  — количество этих нулей. Тогда когомологический класс  $\omega_n(\xi)$  представлен коциклом, сопоставляющим клетке  $\sigma$  элемент  $a(\sigma) \pmod{2} \in \mathbb{Z}_2$ . Над  $m$ -мерной клеткой  $\tau$  базы расслоения  $\eta$  аналогично построим сечение с  $b(\tau)$  невырожденными нулями. Прямая сумма этих сечений является сечением расслоения  $\xi \times \eta$  над клеткой  $\sigma \times \tau$ . Пусть  $c(\sigma \times \tau)$  — количество нулей этого сечения. Ясно, что  $c(\sigma \times \tau) = a(\sigma)b(\tau)$ , поскольку прямая сумма двух сечений обращается в нуль в точности в общих нулях этих сечений. Таким образом, на клетке  $\sigma \times \tau$  коцикл, представляющий класс  $\omega_{n+m}(\xi \times \eta)$ , принимает значение, равное произведению значений коциклов, представляющих  $\omega_n(\xi)$  и  $\omega_m(\eta)$ , на клетках  $\sigma$  и  $\tau$ . Согласно определению внешнего когомологического умножения это означает, что на клетке  $\sigma \times \tau$  представители классов  $\omega_{n+m}(\xi \times \eta)$  и  $\omega_n(\xi) \times \omega_m(\eta)$  принимают одинаковые значения. Остаётся проверить, что если  $\dim \sigma' + \dim \tau' = m + n$ , но  $\dim \sigma' \neq n$ , то на клетке  $\sigma' \times \tau'$  представители обоих классов принимают одинаковые значения — нулевые. Для класса  $\omega_n(\xi) \times \omega_m(\eta)$  это следует непосредственно из определения. Пусть, например,  $\dim \sigma' < n$ . Тогда над клеткой  $\sigma'$  можно построить сечение, нигде не обращающееся в нуль. Прямая сумма этого сечения и произвольного сечения над клеткой  $\tau'$  нигде не обращается в нуль. Поэтому представитель класса  $\omega_{n+m}(\xi \times \eta)$  принимает на клетке  $\sigma' \times \tau'$  нулевое значение.  $\square$

Уточнением теоремы 11.8 является следующее утверждение.

**Теорема 11.9.** Пусть  $\dim \xi = n$  и  $\dim \eta = m$ . Тогда  $e(\xi \times \eta) = e(\xi) \times e(\eta)$ .

**Доказательство.** Основные рассуждения те же, что и при доказательстве теоремы 11.8. Нужно лишь проследить за ориентациями. А именно, нужно доказать, что если векторные поля  $v$  и  $w$  в пространствах  $V$  и  $W$  имеют в начале координат невырожденные особые точки индексов  $(-1)^k$  и  $(-1)^l$ , то векторное поле  $v \oplus w$  в пространстве  $V \oplus W$  имеет в начале координат особую точку индекса  $(-1)^{k+l}$ . Это достаточно доказать для линейных векторных полей  $v(x) = Ax$  и  $w(y) = By$ . Векторное поле  $v \oplus w$  задаётся матрицей  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ . Определитель этой матрицы равен  $\det A \det B$ .  $\square$

### Естественность классов Штифеля—Уитни

Классы Штифеля—Уитни обладают следующим свойством *естественности*: если  $\xi$  — расслоение над  $B$  и  $f: B' \rightarrow B$  — непрерывное отобра-

ражение, то  $\omega_i(f^*(\xi)) = f^*(\omega_i(\xi))$ , т. е. характеристические классы индуцированного расслоения  $f^*(\xi)$  получаются из характеристических классов расслоения  $\xi$  посредством индуцированного отображения когомологий  $f^*: H^*(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(B'; \mathbb{Z}_2)$ .

Свойство естественности достаточно очевидно. Действительно, пусть  $E'$  и  $E$  — пространства расслоений  $f^*(\xi)$  и  $\xi$ . По определению

$$E' = \{(b', v) \mid v \in F_{f(b')}\},$$

т. е. слои над точками  $b' \in B'$  и  $f(b') \in B$  канонически изоморфны. Поэтому отображение  $f$  индуцирует коцепное отображение

$$f^\#: C^{n-k+1}(B; \{\pi_{n-k}(V(n, k))\}) \rightarrow C^{n-k+1}(B'; \{\pi_{n-k}(V(n, k))\}).$$

Это коцепное отображение переводит препятствующий коцикл расслоения  $\xi$  в препятствующий коцикл расслоения  $f^*(\xi)$ .

### Формула Уитни

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — векторные расслоения над симплицальным комплексом  $B$ . Тогда

$$\omega_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} \omega_i(\xi) \cup \omega_j(\eta) \quad (\text{формула Уитни}). \quad (1)$$

Вместо формулы Уитни мы докажем эквивалентную ей формулу

$$\omega_k(\xi \times \eta) = \sum_{i+j=k} \omega_i(\xi) \times \omega_j(\eta), \quad (2)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — расслоения над разными базами. Формула (1) выводится из формулы (2) следующим образом. Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — расслоения над одной базой  $B$ ,  $p_1: B \times B \rightarrow B$  и  $p_2: B \times B \rightarrow B$  — проекции на первый и второй множитель,  $d: B \rightarrow B \times B$  — диагональное отображение. Тогда  $p_1 d = p_2 d = \text{id}_B$  и  $\xi \times \eta = (p_1^* \xi) \oplus (p_2^* \eta)$ . Поэтому

$$\omega_k((p_1^* \xi) \oplus (p_2^* \eta)) = \omega_k(\xi \times \eta) = \sum_{i+j=k} \omega_i(\xi) \times \omega_j(\eta).$$

Применим к обеим частям этого равенства отображение  $d^*$ . Воспользовавшись естественностью характеристических классов, получим

$$d^*(\omega_k((p_1^* \xi) \oplus (p_2^* \eta))) = \omega_k((d^* p_1^* \xi) \oplus (d^* p_2^* \eta)) = \omega_k(\xi \oplus \eta).$$

Кроме того,  $d^*(\omega_i(\xi) \times \omega_j(\eta)) = \omega_i(\xi) \cup \omega_j(\eta)$ . Формула (2) выводится из формулы (1) следующим образом. Прежде всего заметим, что  $\xi \times \eta = (p_X^* \xi) \oplus (p_Y^* \eta)$ , где  $p_X$  и  $p_Y$  — естественные проекции  $X \times Y$  на  $X$  и на  $Y$ .

Поэтому  $\omega_k(\xi \times \eta) = \omega_k((p_X^*\xi) \oplus (p_Y^*\eta)) = \sum_{i+j=k} \omega_i(p_X^*\xi) \cup \omega_j(p_Y^*\eta) =$   
 $= \sum_{i+j=k} p_X^*\omega_i(\xi) \cup p_Y^*\omega_j(\eta)$  (при записи последнего равенства мы использо-  
 вали естественность характеристических классов). Наконец, следствие  
 теоремы 9.4 на с. 118 показывает, что  $p_X^*\omega_i(\xi) \cup p_Y^*\omega_j(\eta) = \omega_i(\xi) \times \omega_j(\eta)$ .

Векторные расслоения  $\xi$  и  $\eta$  над одной базой называют *стабильно эквивалентными*, если  $\xi \oplus \varepsilon^m \cong \eta \oplus \varepsilon^p$ , где  $\varepsilon^m$  и  $\varepsilon^p$  — тривиальные рас-  
 слоения размерностей  $m$  и  $p$  соответственно. Докажем сначала следующий  
 весьма частный случай формулы Уитни.

*Л е м м а. Характеристические классы Штифеля—Уитни ста-  
 бильно эквивалентных расслоений одинаковы.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Проверим, что препятствия к продолжению  
 сечений расслоений  $\xi$  и  $\xi \oplus \varepsilon^m$  можно выбрать совпадающими уже на  
 уровне коциклов, точнее говоря, совпадающими после отождествления  
 групп коцепей.

Препятствующий коцикл  $\sigma_k(\xi)$  лежит в  $C^{n-k+1}(B; \{\pi_{n-k}(V(n, k))\})$ , а  
 препятствующий коцикл  $\sigma_k(\xi \oplus \varepsilon^m)$  — в  $C^{n-k+1}(B; \{\pi_{n-k}(V(n+m, k+m))\})$ ;  
 здесь  $n = \dim \xi$ . Группы коэффициентов  $\pi_{n-k}(V(n, k))$  и  $\pi_{n-k}(V(n+m, k+m))$ ,  
 приведённые по модулю 2, отождествляются посредством отображения  
 $V(n, k) \rightarrow V(n+m, k+m)$ , при котором  $k$  векторам в  $\mathbb{R}^n$  сопоставля-  
 ются те же самые  $k$  векторов в  $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$  и ещё некий фиксированный  
 ортонормированный базис пространства  $\mathbb{R}^m$ .

Выберем над  $(n-k)$ -мерным остовом базы  $k$  линейно независимых  
 сечений расслоения  $\xi$ . Их можно естественным образом дополнить до  
 $k+m$  сечений расслоения  $\xi \oplus \varepsilon^m$ . Построим препятствующие коциклы  
 $\sigma_k(\xi)$  и  $\sigma_k(\xi \oplus \varepsilon^m)$  по этим сечениям. Тогда после отождествления групп  
 коэффициентов эти коциклы совпадут.  $\square$

Для доказательства формулы (2) мы воспользуемся этой леммой и те-  
 оремой 11.8 на с. 159. Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — расслоения над симплициальными  
 комплексами  $X$  и  $Y$ . Рассмотрим вложения  $i_X: X^i \rightarrow X$  и  $j_Y: Y^j \rightarrow Y$ .  
 Рассмотрим, далее, ограничения  $\xi|_{X^i}$  и  $\eta|_{Y^j}$ . Первое из этих расслоений  
 имеет  $\dim \xi - i$  линейно независимых сечений, поэтому оно стабильно  
 эквивалентно  $i$ -мерному расслоению  $\xi_0$ . Аналогично второе расслоение  
 стабильно эквивалентно  $j$ -мерному расслоению  $\eta_0$ . Согласно теореме 11.8  
 мы имеем  $\omega_{i+j}(\xi_0 \times \eta_0) = \omega_i(\xi_0) \times \omega_j(\eta_0)$ . Поэтому, воспользовавшись  
 естественностью характеристических классов, получим

$$\begin{aligned} (i_X \times j_Y)^*(\omega_{i+j}(\xi \times \eta)) &= \omega_{i+j}(\xi|_{X^i} \times \eta|_{Y^j}) = \\ &= \omega_{i+j}(\xi_0 \times \eta_0) = \omega_i(\xi_0) \times \omega_j(\eta_0) = \\ &= \omega_i(i_X^*\xi) \times \omega_j(j_Y^*\eta) = (i_X \times j_Y)^*(\omega_i(\xi) \times \omega_j(\eta)). \end{aligned}$$

Легко проверить, что если  $\alpha + \beta = i + j$  и  $\alpha \neq i$ , то  $(i_X \times j_Y)^*(\omega_{\alpha+\beta}(\xi \times \eta)) = \omega_\alpha(\xi_0) \times \omega_\beta(\eta_0) = 0$ . Действительно, если  $\alpha > i$ , то  $\omega_\alpha(\xi_0) = 0$ , поскольку  $\dim \xi_0 = i < \alpha$ . А если  $\beta > j$ , то  $\omega_\beta(\eta_0) = 0$ .

Пусть  $\omega_k = \omega_k(\xi \times \eta) - \sum_{\alpha+\beta=k} \omega_\alpha(\xi) \times \omega_\beta(\eta)$ . Мы доказали, что элемент  $\omega_k$  лежит в ядре гомоморфизма  $(i_X \times j_Y)^*: H^k(X \times Y; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^k(X^i \times Y^j; \mathbb{Z}_2)$  для всех размерностей  $i, j$ , сумма которых равна  $k$ . Мы хотим доказать, что  $\omega_k = 0$ . Для краткости опустим группу коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$ . Согласно теореме Кюннета  $H^k(X \times Y) \cong \bigoplus_{\alpha+\beta=k} H^\alpha(X) \otimes H^\beta(Y)$  и  $H^k(X^i \times Y^j) \cong \bigoplus_{\alpha+\beta=k} H^\alpha(X^i) \otimes H^\beta(Y^j) = H^i(X^i) \otimes H^j(Y^j)$ , поскольку  $H^\alpha(X^i) = 0$  при  $\alpha > i$  и  $H^\beta(Y^j) = 0$  при  $\beta > j$ . Поэтому прямая сумма отображений  $(i_X \times j_Y)^*$  для всех  $i, j$ , сумма которых равна  $k$ , представляет собой гомоморфизм

$$\bigoplus_{\alpha+\beta=k} H^\alpha(X) \otimes H^\beta(Y) \rightarrow \bigoplus_{\alpha+\beta=k} H^\alpha(X^\alpha) \otimes H^\beta(Y^\beta).$$

Этот гомоморфизм является мономорфизмом, потому что отображения  $H^\alpha(X) \rightarrow H^\alpha(X^\alpha)$  и  $H^\beta(Y) \rightarrow H^\beta(Y^\beta)$  — мономорфизмы. Действительно, они двойственны эпиморфизмам  $H_\alpha(X^\alpha) \rightarrow H_\alpha(X)$  и  $H_\beta(Y^\beta) \rightarrow H_\beta(Y)$ .

Формула Уитни удобно записывается, если использовать *полный класс Штифеля—Уитни*  $\omega(\xi) = 1 + \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi) + \dots + \omega_n(\xi)$ ,  $n = \dim \xi$ . При таких обозначениях формула Уитни принимает вид  $\omega(\xi \oplus \eta) = \omega(\xi) \cup \omega(\eta)$ .

### 11.5. Приложения классов Штифеля—Уитни

Полный класс Штифеля—Уитни  $\omega = 1 + \omega_1 + \omega_2 + \dots$  обратим в том смысле, что существует элемент  $\bar{\omega} = 1 + \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots \in H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ , для которого  $\omega \bar{\omega} = 1$  (для краткости вместо сир-произведения мы используем обычное обозначение для произведения элементов кольца). Действительно, если  $a$  — нильпотентный элемент кольца, то  $(1 + a)^{-1} = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots$ . Поэтому

$$\begin{aligned} (1 + \omega_1 + \omega_2 + \dots)^{-1} &= \\ &= 1 - (\omega_1 + \omega_2 + \dots) + (\omega_1 + \omega_2 + \dots)^2 - (\omega_1 + \omega_2 + \dots)^3 + \dots = \\ &= 1 - \omega_1 + (\omega_1^2 - \omega_2) + (-\omega_1^3 + 2\omega_1\omega_2 - \omega_3) + \dots \end{aligned}$$

Относительно сложения в кольце  $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$  все элементы имеют порядок 2, поэтому

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1 &= \omega_1, \\ \bar{\omega}_2 &= \omega_1^2 + \omega_2, \\ \bar{\omega}_3 &= \omega_1^3 + \omega_3, \\ \bar{\omega}_4 &= \omega_1^4 + \omega_1^2\omega_2 + \omega_2^2 + \omega_4, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Классы  $\bar{\omega}_i(\xi)$  называют *дуальными классами Штифеля—Уитни*.

Важное значение дуальных классов Штифеля—Уитни связано со следующей *теоремой двойственности Уитни*.

**Теорема 11.10 (Уитни).** *Предположим, что многообразие  $M^n$  погружено в  $\mathbb{R}^N$  и  $\nu_{M^n}$  — нормальное расслоение над  $M^n$ . Тогда  $\omega_i(\nu_{M^n}) = \bar{\omega}_i(\tau_{M^n})$ . В частности,  $\omega_i(\nu_{M^n})$  не зависит от погружения.*

**Доказательство.** Расслоение  $\nu_{M^n} \oplus \tau_{M^n}$  изоморфно тривиальному расслоению  $\varepsilon^N$  над  $M^n$ ; изоморфизм задаётся сопоставлением паре векторов в слоях этих расслоений над точкой  $x \in M^n$  их суммы (один из векторов перпендикулярен касательному пространству, а другой вектор лежит в касательном пространстве). Таким образом,  $\omega(\nu_{M^n})\omega(\tau_{M^n}) = \omega(\nu_{M^n} \oplus \tau_{M^n}) = 1$ , т. е.  $\omega(\nu_{M^n}) = \bar{\omega}(\tau_{M^n})$ .  $\square$

**Следствие.** *Справедливо равенство  $\omega(\tau_{S^n}) = 1$ .*

**Доказательство.** Для стандартного вложения  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  нормальное расслоение тривиально.  $\square$

**Задача 11.11.** Пусть  $M$  — риманово многообразие. Снабдите  $M \times M$  структурой риманова многообразия и докажите, что нормальное расслоение к  $d(M)$  в  $M \times M$  изоморфно касательному расслоению многообразия  $M$ ; здесь  $d(x) = (x, x)$  — диагональное отображение.

Для многообразия  $M^n$  класс  $\omega(\tau_{M^n})$  называют *классом Штифеля—Уитни многообразия  $M^n$*  и обозначают  $\omega(M^n)$ .

**Задача 11.12.** Вычислите классы  $\omega_1$  и  $\omega_2$  для сферы с  $g$  ручками.

**Задача 11.13.** Вычислите классы  $\omega_1$  и  $\omega_2$  для сферы с вклеенными  $m$  листами Мёбиуса и докажите, что  $\omega_1^2 = \omega_2$ .

**Задача 11.14.** Докажите, что если многообразие  $M^n$  погружено в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , то  $\omega_k = \omega_1^k$  для всех  $k$  (здесь  $\omega_k = \omega_k(M^n)$ ).

Классы Штифеля—Уитни всех сфер тривиальны. Более интересный пример доставляют классы Штифеля—Уитни проективных пространств  $\mathbb{R}P^n$ . Их вычисление основано на следующем утверждении.

**Теорема 11.11.** *Пусть  $\varepsilon^1$  — тривиальное одномерное расслоение над  $\mathbb{R}P^n$ . Тогда  $\tau_{\mathbb{R}P^n} \oplus \varepsilon^1 \cong \underbrace{\gamma_n^1 \oplus \dots \oplus \gamma_n^1}_{n+1}$ .*

**Доказательство.** Пространства расслоений, участвующих в формулировке теоремы, можно описать следующим образом:

$\tau(\mathbb{R}P^n)$  состоит из пар  $(\pm x, v)$ ,  $x \in S^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $x \perp v$ ;

$\varepsilon^1$  состоит из пар  $(\pm x, \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;

$\gamma_n^1$  состоит из пар  $(\pm x, \lambda(x))$ ,  $\lambda(-x) = -\lambda(x)$ ;

$(\gamma_n^1)^{n+1}$  состоит из пар  $(\pm x, v(x))$ ,  $v(-x) = -v(x)$ .

Отображение  $\tau_{\mathbb{R}P^n} \oplus \varepsilon^1 \rightarrow (\gamma_n^1)^{n+1}$  устроено следующим образом: парам  $(\pm x, v)$  и  $(\pm x, \lambda)$  сопоставляется пара  $(\pm x, v + \lambda x)$ . Обратное отображение устроено следующим образом. Представим вектор  $v(x)$  в виде  $v(x) = v_\tau + v_\nu$ , где  $v_\nu = \lambda x$  и  $v_\tau \perp x$ . Сопоставим паре  $(\pm x, v(x))$  пары  $(\pm(x, v_\tau))$  и  $(\pm(x, \varepsilon v_\nu))$ , где  $\varepsilon = 1$ , если векторы  $x$  и  $v_\nu$  сонаправлены, и  $\varepsilon = -1$ , если эти векторы противоположно направлены.  $\square$

**Следствие.** Справедливо равенство  $\omega(\mathbb{R}P^n) = (1 + \alpha)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\alpha + \dots + \binom{n+1}{n}\alpha^n$ .

**Упражнение.** Докажите, что  $\omega_1(\mathbb{R}P^n) = 0$  тогда и только тогда, когда  $n$  нечётно.

**Теорема 11.12.** Равенство  $\omega(\mathbb{R}R^n) = 1$  выполняется тогда и только тогда, когда  $n = 2^k - 1$  для некоторого  $k$ .

**Доказательство.** Ясно, что  $(a + b)^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod{2}$ . Поэтому  $(1 + \alpha)^{2^k} = 1 + \alpha^{2^k}$ . Предположим, что  $n = 2^k - 1$ . Тогда  $\omega(\mathbb{R}R^n) = (1 + \alpha)^{2^k} = 1 + \alpha^{2^k} = 1$ , поскольку  $2^k > n$ .

Предположим теперь, что  $n + 1 = 2^k m$ , где  $m$  — нечётное число,  $m > 1$ . Тогда

$$(1 + \alpha)^{n+1} = (1 + \alpha^{2^k})^m = 1 + m\alpha^{2^k} + \frac{m(m-1)}{2}\alpha^{2 \cdot 2^k} + \dots$$

Здесь  $\alpha^{2^k} \neq 0$  и  $m \not\equiv 0 \pmod{2}$ .  $\square$

**Следствие 1.** Если многообразие  $\mathbb{R}P^n$  параллелизуемо, то  $n = 2^k - 1$  для некоторого  $k$ .

**Следствие 2.** Если  $n + 1 = 2^k m$ , где  $m$  — нечётное число, то  $\omega_{2^k}(\mathbb{R}P^n) = \alpha^{2^k} \neq 0$ , поэтому на  $\mathbb{R}P^n$  не существует  $2^k$  линейно независимых векторных полей.

**Задача 11.15.** Докажите, что если  $\mathbb{R}P^n$  погружено в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , то  $n$  имеет вид  $2^r - 1$  или  $2^r - 2$ .

**Теорема 11.13.** Предположим, что существует билинейная операция умножения  $\mu: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  без делителей нуля. Предположим, далее, что существует левосторонняя единица  $e$ , т. е.  $\mu(e, x) = x$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  (ассоциативность операции не предполагается). Тогда  $n = 2^k$  для некоторого  $k$ .

**Доказательство.** Рассмотрим в  $\mathbb{R}^n$  базис  $e_1 = e, e_2, \dots, e_n$ . В каждой точке  $x \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  векторы  $x = \mu(e, x), \mu(e_2, x), \dots, \mu(e_n, x)$  линейно независимы, поскольку иначе  $\mu(y, x) = 0$  для некоторых ненулевых векторов  $y = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$  и  $x$ . Проекции векторов  $\mu(e_2, x), \dots, \mu(e_n, x)$  на касательное пространство к  $S^{n-1}$  в точке  $x$  линейно независимы. Эти проекции образуют линейно независимые векторные поля на сфере. А так как  $\mu(e_i, -x) = -\mu(e_i, x)$ , эти векторные поля переносятся на  $\mathbb{R}P^{n-1}$ . Таким образом, многообразие  $\mathbb{R}P^{n-1}$  параллелизуемо. Остаётся воспользоваться следствием 1 теоремы 11.12.  $\square$

**Теорема 11.14.** *Если  $n = 2^k$ , то многообразие  $\mathbb{R}P^n$  нельзя погрузить в  $\mathbb{R}^{2n-2}$ .*

**Доказательство.** Если  $n = 2^k$ , то  $\omega(\mathbb{R}P^n) = (1 + \alpha)(1 + \alpha)^{2^k} = (1 + \alpha)(1 + \alpha^{2^k}) = 1 + \alpha + \alpha^{2^k} + \alpha^{2^k+1} = 1 + \alpha + \alpha^n$ . По условию  $\alpha^{n+1} = 0$ , поэтому  $(1 + \alpha + \alpha^n)(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1}) = 1$ . Значит,  $\overline{\omega}(\mathbb{R}P^n) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1}$ .

Предположим, что  $\mathbb{R}P^n$  погружено в  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Тогда размерность нормального расслоения не может быть меньше максимальной размерности ненулевого дуального класса Штифеля—Уитни. В нашем случае  $m \geq n - 1$ , т. е.  $\mathbb{R}P^n$  нельзя погрузить в  $\mathbb{R}^{2n-2}$ .  $\square$

**Теорема 11.15.** *Если  $2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}$  — двоичная запись числа  $n$ , то многообразие  $\mathbb{R}P^{2^{k_1}} \times \dots \times \mathbb{R}P^{2^{k_s}}$  нельзя погрузить в  $\mathbb{R}^{2n-s-1}$ .*

**Доказательство.** Чтобы избежать громоздких обозначений, будем считать, что  $s = 2$ . Положим  $2^{k_1} = p$  и  $2^{k_2} = q$ . Пусть  $\pi_p$  и  $\pi_q$  — проекции произведения  $\mathbb{R}P^p \times \mathbb{R}P^q$  на первый и второй множители. Тогда  $\omega(\mathbb{R}P^p \times \mathbb{R}P^q) = \omega(\pi_p^*(\tau_{\mathbb{R}P^p}) \oplus \pi_q^*(\tau_{\mathbb{R}P^q})) = \pi_p^*(\omega(\mathbb{R}P^p)) \cup \pi_q^*(\omega(\mathbb{R}P^q)) = \pi_p^*(1 + \alpha_p)^{p+1} \cup \pi_q^*(1 + \alpha_q)^{q+1}$ . При доказательстве теоремы 11.14 мы убедились, что  $((1 + \alpha_p)^{p+1})^{-1} = 1 + \alpha_p + \dots + \alpha_p^{p-1}$ . Воспользовавшись тем, что для коэффициентов в  $\mathbb{Z}_2$  выполняется равенство  $(\alpha \times \beta) \cup (\gamma \times \delta) = (\alpha \cup \gamma) \times (\beta \cup \delta)$ , получим  $\overline{\omega}(\mathbb{R}P^p \times \mathbb{R}P^q) = (1 + \beta_p + \dots + \beta_p^{p-1}) \times (1 + \beta_q + \dots + \beta_q^{q-1})$ , где  $\beta_p = \pi_p^* \alpha_p$  и  $\beta_q = \pi_q^* \alpha_q$ . Старшая размерность ненулевого дуального класса  $\overline{\omega}(\mathbb{R}P^p \times \mathbb{R}P^q)$  равна  $(p - 1) + (q - 1) = n - 2$ . Для произвольного  $s$  вычисления аналогичны.  $\square$

### Числа Штифеля—Уитни

Пусть  $M^n$  — замкнутое многообразие (возможно несвязное),  $[M^n] \in H_n(M; \mathbb{Z}_2)$  — его фундаментальный класс. Тогда для любого когомологического класса  $\alpha \in H^n(M; \mathbb{Z}_2)$  определён элемент  $\langle \alpha, [M^n] \rangle \in \mathbb{Z}_2$ . В качестве  $\alpha$  можно взять класс  $\omega_1(\tau_{M^n})^{r_1} \dots \omega_n(\tau_{M^n})^{r_n}$ , где  $r_1, \dots, r_n$  — неотрицательные целые числа, для которых  $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$ . Полученное

при этом число

$$\langle \omega_1(\tau_{M^n})^{r_1} \dots \omega_n(\tau_{M^n})^{r_n}, [M^n] \rangle \in \mathbb{Z}_2$$

называют *числом Штифеля—Уитни*, соответствующим классу когомологий  $\omega_1^{r_1} \dots \omega_n^{r_n}$ . Это число обозначают  $\omega_1^{r_1} \dots \omega_n^{r_n}[M^n]$ .

**Задача 11.16.** Докажите, что если  $n$  чётно, то  $\omega_n[\mathbb{R}P^n] \neq 0$  и  $\omega_1^{r_1}[\mathbb{R}P^n] \neq 0$ .

**Задача 11.17.** Докажите, что если  $n$  нечётно, то все числа Штифеля—Уитни многообразия  $\mathbb{R}P^n$  нулевые.

**Теорема 11.16 (Понтрягин).** Пусть  $M^n = \partial W^{n+1}$ , где  $W^{n+1}$  — компактное многообразие. Тогда все числа Штифеля—Уитни многообразия  $M^n$  равны нулю.

**Доказательство.** Будем рассматривать гомологии и когомологии с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ . Пусть  $[W^{n+1}] \in H_{n+1}(W^{n+1}, M^n)$  — фундаментальный класс. При доказательстве теоремы двойственности Лефшеца мы показали, что гомоморфизм  $\partial_*: H_{n+1}(W^{n+1}, M^n) \rightarrow H_n(M^n)$  переводит  $[W^{n+1}]$  в фундаментальный класс  $[M^n] \in H_n(M^n)$ . Поэтому если  $\alpha \in H^n(M^n)$ , то  $\langle \alpha, [M^n] \rangle = \langle \alpha, \partial_*[W^{n+1}] \rangle = \langle \delta^* \alpha, [W^{n+1}] \rangle$ , где  $\delta^*: H^n(M^n) \rightarrow H^{n+1}(W^{n+1}, M^n)$  — гомоморфизм, двойственный гомоморфизму  $\partial_*$ .

Из теоремы о воротнике (для гладких многообразий) легко выводится, что  $\tau_{W^{n+1}|_{M^n}} \cong \tau_{M^n} \oplus \varepsilon^1$ , где  $\varepsilon^1$  — тривиальное одномерное расслоение над  $M^n$ . Действительно, нас интересует только часть многообразия  $W^{n+1}$ , расположенная вблизи  $\partial W^{n+1} = M^n$ . Поэтому для наших целей можно считать, что  $W^{n+1} = M^n \times I$ . В результате получаем, что  $\omega_j(M^n) = \omega_j(\tau_{W^{n+1}|_{M^n}})$  для всех  $j$ . Далее,  $\omega_j(\tau_{W^{n+1}|_{M^n}}) = i^* \omega_j(W^{n+1})$ , где  $i^*: H^j(W^{n+1}) \rightarrow H^j(M^n)$  — гомоморфизм, индуцированный включением  $i: M^n \rightarrow W^{n+1}$ . Поэтому  $\omega_1^{r_1}(M^n) \dots \omega_n^{r_n}(M^n) = i^* \alpha$ , где  $\alpha = \omega_1^{r_1}(W^{n+1}) \dots \omega_n^{r_n}(W^{n+1})$ .

Точная когомологическая последовательность пары

$$H^n(W^{n+1}) \xrightarrow{i^*} H^n(M^n) \xrightarrow{\delta^*} H^{n+1}(W^{n+1}, M^n)$$

показывает, что  $\delta^* i^* = 0$ . Поэтому  $\delta^*(\omega_1^{r_1}(M^n) \dots \omega_n^{r_n}(M^n)) = \delta^* i^* \alpha = 0$ , а значит,

$$\langle \omega_1^{r_1}(M^n) \dots \omega_n^{r_n}(M^n), [M^n] \rangle = \langle \delta^*(\omega_1^{r_1}(M^n) \dots \omega_n^{r_n}(M^n)), [W^{n+1}] \rangle = 0,$$

т. е.  $\omega_1^{r_1} \dots \omega_n^{r_n}[M^n] = 0$ . □

## 11.6. Универсальное расслоение

Есть ещё один важный подход к построению характеристических классов, основанный на том, что любое векторное расслоение данной размерности можно получить из некоторого фиксированного расслоения над многообразием Грассмана посредством перехода к индуцированному



расслоению. При этом характеристические классы Штифеля—Уитни получаются из некоторого набора мультипликативных образующих кольца когомологий многообразия Грассмана посредством индуцированного отображения когомологий.

Напомним, что многообразие Грассмана  $G(n, k)$  — это многообразие, точками которого являются  $k$ -мерные подпространства в  $\mathbb{R}^n$ . Естественное включение  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , при котором точке с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  сопоставляется точка с координатами  $(x_1, \dots, x_n, 0)$ , индуцирует включение  $G(n, k) \subset G(n+1, k)$ . Поэтому можно рассмотреть *бесконечное многообразие Грассмана*  $G(\infty, k) = \bigcup_{n \geq k} G(n, k)$ , которое снабжено следующей топологией: множество  $U \subset G(\infty, k)$  открыто тогда и только тогда, когда множества  $U \cap G(n, k)$  открыты для всех  $n \geq k$ .

Используя бесконечное многообразие Грассмана, основной результат этого пункта (теоремы 11.17, 11.18 и 11.19) можно сформулировать так: множество  $k$ -мерных векторных расслоений над компактным хаусдорфовым пространством  $B$ , рассматриваемых с точностью до изоморфизма, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством гомотопических классов отображений  $[B, G(\infty, k)]$ . Но сформулировать и доказать этот результат можно и не обращаясь к бесконечным многообразиям Грассмана, а ограничившись обычными многообразиями Грассмана. Мы именно так и поступим.

Над многообразием Грассмана  $G(n, k)$  имеется *каноническое*  $k$ -мерное векторное расслоение  $\gamma_n^k$ , которое устроено следующим образом. Пространство расслоения  $E(\gamma_n^k)$  состоит из пар

$$(k\text{-мерное подпространство } \Pi^k \subset \mathbb{R}^n, \text{ вектор } v \in \Pi^k);$$

проекция  $p: E(\gamma_n^k) \rightarrow G(n, k)$  сопоставляет такой паре подпространство  $\Pi^k$ , которое рассматривается как точка многообразия  $G(n, k)$ . Топология пространства  $E(\gamma_n^k)$  индуцирована его вложением в  $G(n, k) \times \mathbb{R}^n$ . Слой над точкой  $\Pi^k \in G(n, k)$  естественным образом отождествляется с  $k$ -мерным пространством  $\Pi^k$ , поэтому слой снабжён структурой линейного пространства. Остаётся проверить, что для  $\gamma_n^k$  выполняется условие локальной тривиальности.

Мы воспользуемся координатными окрестностями  $U_I$ , построенными при доказательстве того, что  $G(n, k)$  — гладкое многообразие (часть I, с. 211). Здесь  $I$  — набор чисел  $\{i_1, \dots, i_k\}$ , удовлетворяющих неравенствам  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ ; множество  $U_i \subset G(n, k)$  состоит из  $k$ -мерных подпространств в  $\mathbb{R}^n$ , трансверсальных\*) ортогональному дополнению

\*) Трансверсальность двух линейных подпространств размерностей  $k$  и  $n - k$  в  $\mathbb{R}^n$  означает, что их пересечение состоит только из нулевого вектора.

к пространству  $\mathbb{R}_f^k$ , порождённому векторами  $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ . Ортогональная проекция на  $\mathbb{R}_f^k$  каждого  $k$ -мерного подпространства  $\Pi^k \in U_f$  является изоморфизмом линейных пространств. Гомеоморфизм  $U_f \times \mathbb{R}_f^k \rightarrow p^{-1}(U_f)$  устроен следующим образом: паре  $(\Pi^k, v) \in U_f \times \mathbb{R}_f^k$  сопоставляется пара  $(\Pi^k, v') \in E(\gamma_n^k)$ , где  $v' \in \Pi^k$  — тот вектор, который проецируется на вектор  $v \in \mathbb{R}_f^k$ .

**Теорема 11.17.** *Любое  $k$ -мерное векторное расслоение  $\xi$  над компактной хаусдорфовой базой  $B$  индуцировано каноническим расслоением  $\gamma_n^k$  для некоторого  $n$ .*

**Доказательство.** Выберем открытые множества  $U_1, \dots, U_m$  так, чтобы они покрывали  $B$  и над каждым из них расслоение  $\xi$  было тривиально. Компактное хаусдорфово пространство паракомпактно, а потому нормально. Следовательно, существует разбиение единицы  $f_1, \dots, f_m$ , подчинённое покрытию  $U_1, \dots, U_m$ .

С помощью гомеоморфизма  $h_i: U_i \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U_i)$  построим отображение  $\varphi_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^k$ , которое является композицией отображений

$$p^{-1}(U_i) \xrightarrow{h_i^{-1}} U_i \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k.$$

Затем рассмотрим отображение  $g_i: E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^k$ , заданное формулой

$$g_i(x) = \begin{cases} f_i(x)\varphi_i(x) & \text{при } x \in U_i; \\ 0 & \text{при } x \notin U_i. \end{cases}$$

Наконец, положим  $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$ . Здесь  $g$  — отображение  $E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^{mk}$ . При этом каждый слой изоморфно отображается на некоторое  $k$ -мерное подпространство  $\Pi^k \subset \mathbb{R}^{mk}$ . В результате получаем отображение  $\hat{g}: B \rightarrow G(mk, k)$ .

Легко проверить, что  $\hat{g}^*\gamma_{mk}^k \cong \xi$ . Действительно, пространство расслоения  $\hat{g}^*\gamma_{mk}^k$  состоит из троек  $(\Pi^k, v \in \Pi^k, b)$ , где  $\hat{g}(b) = \Pi^k$ . Поэтому слои расслоений  $\xi$  и  $\hat{g}^*\gamma_{mk}^k$  над каждой точкой  $b \in B$  канонически изоморфны.  $\square$

Для компактного хаусдорфова пространства  $B$  гомотопные отображения  $f_0, f_1: B \rightarrow G(n, k)$  индуцируют изоморфные расслоения, т. е.  $f_0^*\gamma_n^k \cong f_1^*\gamma_n^k$ . Это утверждение справедливо даже в следующей более общей ситуации.

**Теорема 11.18.** *Пусть  $B$  — компактное хаусдорфово пространство,  $\xi$  — расслоение над пространством  $X$ ,  $f_0, f_1: B \rightarrow X$  — гомотопные отображения. Тогда  $f_0^*\xi \cong f_1^*\xi$ .*

**Доказательство.** Пусть  $F: B \times I \rightarrow X$  — гомотопия, связывающая  $f_0$  и  $f_1$ ;  $f_t$  — ограничение  $F$  на  $B \times \{t\}$ . Рассмотрим над  $B \times I$  два расслоения:  $F^*\xi$  и  $p^*f_t^*\xi$ , где  $p: B \times I \rightarrow B$  — естественная проекция. Ограничения этих расслоений на  $B \times \{t\}$  изоморфны. Изоморфизм расслоений  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — это сечение расслоения  $\text{Hom}(\xi_1, \xi_2)$ , для которого все отображения слоёв — изоморфизмы.

**Лемма.** Пусть  $Y$  — замкнутое подмножество компактного хаусдорфова пространства  $Z$ ;  $\xi$  — векторное расслоение над  $Z$ . Тогда любое сечение расслоения  $\xi|_Y$  можно продолжить до сечения всего расслоения  $\xi$ .

**Доказательство.** Покроем  $Z$  конечным числом координатных окрестностей. Над каждой координатной окрестностью  $U_i$  сечение можно рассматривать как отображение  $f_i: U_i \cap Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ . В топологии пространства  $U_i$  множество  $U_i \cap Y$  замкнуто, поэтому отображение  $f_i$  можно продолжить до отображения  $F_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Выберем разбиение единицы  $\{\lambda_i\}$ , подчинённое покрытию  $\{U_i\}$ , и положим

$$s_i(x) = \begin{cases} \lambda_i(x)F_i(x) & \text{для } x \in U_i; \\ 0 & \text{для } x \notin U_i. \end{cases}$$

Тогда  $\sum s_i(x)$  — сечение расслоения  $\xi$ , продолжающее данное сечение над  $Y$ .  $\square$

Продолжим изоморфизм ограничений расслоений  $F^*\xi$  и  $p^*f_t^*\xi$  на  $B \times \{t\}$  до сечения расслоения  $\text{Hom}(F^*\xi, p^*f_t^*\xi)$ . В пространстве  $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  изоморфизмы образуют открытое подмножество, поэтому из компактности пространства  $B$  следует, что ограничения расслоений  $F^*\xi$  и  $p^*f_t^*\xi$  на множество  $B \times \{V(t)\}$ , где  $V(t)$  — некоторое открытое подмножество отрезка  $I$ , содержащее точку  $t$ , изоморфны. Тогда для всех  $\tau \in V(t)$  расслоения  $p^*f_\tau^*\xi$  изоморфны. Поэтому из компактности (и связности) отрезка  $I$  следует, что  $f_0^*\xi \cong f_1^*\xi$ .  $\square$

Вложение  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+a}$  индуцирует вложение  $i_a: G(n, k) \rightarrow G(n+a, k)$ . При этом  $i_a^*(\gamma_{n+a}^k) = \gamma_n^k$ . Таким образом, любое расслоение, индуцированное расслоением  $\gamma_n^k$ , индуцировано также и расслоением  $\gamma_{n+a}^k$  для всех  $a \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 11.19.** Пусть  $B$  — компактное хаусдорфово пространство,  $f_0$  и  $f_1$  — отображения  $B$  в  $G(n, k)$ . Расслоения  $f_0^*\gamma_n^k$  и  $f_1^*\gamma_n^k$  изоморфны тогда и только тогда, когда отображения  $i_a f_0$  и  $i_a f_1$  гомотопны для некоторого  $a$ .

**Доказательство.** Мы только что доказали, что гомотопные отображения индуцируют изоморфные расслоения. Поэтому нужно лишь до-

казать, что если расслоения  $f_0^* \gamma_n^k$  и  $f_1^* \gamma_n^k$  изоморфны, то отображения  $i_a f_0$  и  $i_a f_1$  гомотопны для некоторого  $a$ .

Отождествив изоморфные расслоения  $f_0^* \gamma_n^k$  и  $f_1^* \gamma_n^k$ , будем считать, что заданы две коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_i} & E(\gamma_n^k) \subset G(n, k) \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f_i} & G(n, k). \end{array}$$

Вместо отображения  $\varphi_i$  рассмотрим отображение  $\psi_i: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ , которое представляет собой композицию  $\varphi_i$  и естественной проекции  $G(n, k) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . При этом  $f_i(b)$  — подпространство  $\psi_i(p^{-1}(b)) \in G(n, k)$ , т. е. отображение  $\psi_i$  однозначно задаёт  $f_i$ .

Рассмотрим два вложения  $j_{n,0}, j_{n,1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ ; здесь  $j_{n,0}$  — изоморфизм на первое слагаемое,  $j_{n,1}$  — на второе. Они индуцируют вложения  $i_{n,0}, i_{n,1}: G(n, k) \rightarrow G(2n, k)$ ; при этом  $i_{n,0} = i_n$  и  $i_{n,1} \simeq i_n$  (при  $n = 1$  гомотопия между  $i_{n,0}$  и  $i_{n,1}$  строится посредством поворота координатных осей; при  $n > 1$  ту же самую конструкцию можно применить к каждой плоскости, порождённой векторами  $e_\alpha$  и  $e_{n+\alpha}$ ).

Каждое отображение  $\psi_{n,t} = (1-t)j_{n,0}\psi_0 + tj_{n,1}\psi_1$  задаёт отображение  $f_{n,t}: B \rightarrow G(2n, k)$ . Действительно, из того, что  $\psi_0$  и  $\psi_1$  — мономорфные отображения слоя  $p^{-1}(b)$  в  $\mathbb{R}^n$ , следует, что отображение  $\psi_{n,t}$  тоже мономорфно, потому что векторы  $j_{n,0}\psi_0(v)$  и  $j_{n,1}\psi_1(v)$  лежат в ортогональных подпространствах.

Итак, отображения  $f_{n,0} = i_{n,0}f_0 = i_n f_0$  и  $f_{n,1} = i_{n,1}f_1 \simeq i_n f_1$  гомотопны, поэтому отображения  $i_n f_0$  и  $i_n f_1$  тоже гомотопны.  $\square$

**Задача 11.18.** Пусть  $\xi^k$  — векторное расслоение размерности  $k$  над компактным  $CW$ -комплексом  $B$ , размерность которого меньше  $k$ ;  $\varepsilon^1$  — тривиальное одномерное векторное расслоение над  $B$ . Докажите, что расслоение  $\xi^k$  тривиально тогда и только тогда, когда расслоение  $\xi^k \oplus \varepsilon^1$  тривиально.

Многообразие  $M^n$  называют *стабильно параллелизуемым*, если для некоторого тривиального  $k$ -мерного расслоения  $\varepsilon^k$  над  $M^n$  расслоение  $\tau_{M^n} \oplus \varepsilon^k$  тривиально.

**Задача 11.19.** Докажите, что многообразие  $M^n$  стабильно параллелизуемо тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- а) расслоение  $\tau_{M^n} \oplus \varepsilon^1$  тривиально;
- б) для вложения  $M^n$  в  $\mathbb{R}^N$ , где  $N \geq 2n + 1$ , нормальное расслоение тривиально.

### 11.7. Стабильные когомологии многообразий Грассмана

Взаимно однозначное соответствие между  $k$ -мерными векторными расслоениями над  $B$  и гомотопическими классами отображений  $B \rightarrow G(\infty, k)$  показывает, что для изучения векторных расслоений большой интерес представляют когомологии многообразий  $G(n, k)$  и их поведение при вложениях  $G(n, k) \rightarrow G(n, k + a)$ . Действительно, каждый когомологический класс, стабильный относительно таких вложений, позволяет сопоставить расслоению  $\xi$  над  $B$  класс когомологий пространства  $B$  — характеристический класс расслоения  $\xi$ .

Здесь мы займёмся вычислением гомологий и когомологий (вещественного) многообразия Грассмана  $G(n, k)$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ . Мы будем использовать координатные окрестности  $U_i$  и открытые клетки Шуберта  $e(\sigma)$ , введённые в части I. Открытая клетка Шуберта  $e(\sigma)$  целиком лежит в карте  $U_i$ , где  $I = \sigma$ , и задаётся в ней системой уравнений вида  $x_i = 0$ . Её замыкание  $\overline{e(\sigma)}$  пересекается лишь с теми картами  $U_i$ , для которых  $i_1 \leq \sigma_1, \dots, i_k \leq \sigma_k$ . В такой карте множество  $\overline{e(\sigma)} \cap U_i$  задаётся уравнениями того же вида. Поэтому  $\overline{e(\sigma)}$  — подмногообразие в  $G(n, k)$ . Его называют *многообразием Шуберта*.

Открытые клетки Шуберта образуют клеточное разбиение многообразия Грассмана, а их замыкания являются подмногообразиями. Поэтому  $G(n, k)$  можно триангулировать так, чтобы каждое многообразие Шуберта оказалось при этом тоже триангулированным. После этого можно вычислять клеточные гомологии. Для этого нужно выяснить, как устроено характеристическое отображение клетки Шуберта.

Размерность клетки  $e(\sigma)$  равна  $(\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + \dots + (\sigma_k - k)$ . Нас интересует, с какими коэффициентами входят в  $\partial[e(\sigma)]$  клетки размерности на 1 меньше. Если клетка  $e(\sigma')$  содержится в  $e(\sigma)$ , то  $\sigma'_1 \leq \sigma_1, \dots, \sigma'_k \leq \sigma_k$ . Поэтому для такой клетки равенство  $\sigma'_1 + \dots + \sigma'_k = \sigma_1 + \dots + \sigma_k - 1$  может выполняться лишь в том случае, когда  $\sigma'_i = \sigma_i - 1$  и  $\sigma'_j = \sigma_j$  при  $j \neq i$ ; при этом  $\sigma_{i-1} = \sigma_i - 1$ . В подходящей системе координат множество  $e(\sigma')$  задаётся в  $e(\sigma)$  уравнением  $v_{i, \sigma_i} = 0$  (рис. 35). В зависимости от ориентаций двух частей клетки  $e(\sigma)$ , примыкающих к  $e(\sigma')$ , клетка  $e(\sigma')$  может входить в  $\partial[e(\sigma)]$  с коэффициентом  $\pm 2$  или 0. Поэтому для гомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  получаем  $\partial[e(\sigma)] = 0$ . Таким образом,  $H_r(G(n, k); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{N(r, n, k)}$ , где  $N(r, n, k)$  — количество  $r$ -мерных клеток Шуберта многообразия  $G(n, k)$ .

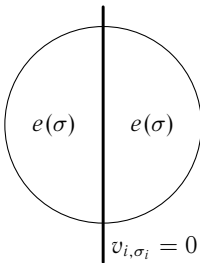


Рис. 35. Граница клетки Шуберта

Каждому символу Шуберта  $\sigma$  можно сопоставить последовательность чисел  $\sigma_1 - 1, \sigma_2 - 2, \dots, \sigma_k - k$ . После удаления из неё нулей получим последовательность  $i_1, i_2, \dots, i_s$ , где  $s \leq k$  и  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s \leq n - k$  (неравенство  $i_\alpha \leq i_{\alpha+1}$  следует из неравенства  $\sigma_\beta < \sigma_{\beta+1}$ ).

Неупорядоченный набор натуральных чисел  $i_1, i_2, \dots, i_s$  называют *разбиением* числа  $r$ , если  $i_1 + \dots + i_s = r$ . Каждому неупорядоченному набору однозначно соответствует набор чисел, расположенных в порядке возрастания. Поэтому число  $N(r, n, k)$  равно количеству разбиений числа  $r$  на не более чем  $k$  натуральных чисел, каждое из которых не превосходит  $n - k$ . В частности, если оба числа  $k$  и  $n - k$  не меньше  $r$ , то  $N(r, n, k) = p(r)$  — количество всех разбиений числа  $r$ .

Если  $n \geq r + k$ , то вложение  $G(n, k) \rightarrow G(n + 1, k)$  индуцирует изоморфизм гомологий  $H_r(G(n, k); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_r(G(n + 1, k); \mathbb{Z}_2)$  и изоморфизм двойственных пространств когомологий  $H^r(G(n + 1, k); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^r(G(n, k); \mathbb{Z}_2)$ ; здесь имеется в виду двойственность линейных пространств, а не двойственность Пуанкаре. При  $n \geq r + k$  группу  $H^r(G(n, k); \mathbb{Z}_2)$  будем обозначать  $H^r(G(\infty, k); \mathbb{Z}_2)$ .

Вычислим мультипликативную структуру кольца  $H^*(G(\infty, k); \mathbb{Z}_2)$ . Для этого рассмотрим вложение

$$f: \underbrace{\mathbb{R}P^{n-1} \times \dots \times \mathbb{R}P^{n-1}}_k \rightarrow G(nk, k),$$

при котором набору векторов  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  сопоставляется подпространство в  $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ , натянутое на векторы  $(v_1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, v_2, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, \dots, v_k)$ . Это отображение индуцирует гомоморфизм колец

$$H^*(G(nk, k); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(\mathbb{R}P^{n-1} \times \dots \times \mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2).$$

Кольцо  $H^*(\mathbb{R}P^{n-1} \times \dots \times \mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$  изоморфно кольцу многочленов  $\mathbb{Z}_2[\alpha_1, \dots, \alpha_k]$ , профакторизованному по соотношениям  $\alpha_i^n = 0, i = 1, \dots, k$ .

Вложение  $\mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$  при  $r \leq n$  индуцирует изоморфизм колец  $H^r(\mathbb{R}P^{n+1}; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^r(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ , поэтому можно определить кольцо  $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha]$ . При каждом фиксированном  $r$  нужно просто считать, что мы имеем дело с  $\mathbb{R}P^n$ , где  $n$  достаточно велико. Аналогично можно ввести кольцо  $H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha_1, \dots, \alpha_k]$  и определить гомоморфизм

$$f^*: H^*(G(\infty, k); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha_1, \dots, \alpha_k].$$

**Теорема 11.20.** *Гомоморфизм  $f^*$  является изоморфизмом на подкольцо симметрических многочленов. При этом  $f^*(w_i(\gamma_\infty^k)) = \sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , где  $\sigma_i$  — элементарная симметрическая функция.*

**Доказательство.** Прежде всего покажем, что размерность пространства  $H^r(G(\infty, k); \mathbb{Z}_2)$  совпадает с размерностью пространства симметрических многочленов степени  $r$  от  $k$  переменных над полем  $\mathbb{Z}_2$ . Для этого нужно установить взаимно однозначное соответствие между разбиениями числа  $r$  на не более чем  $k$  положительных слагаемых и многочленами вида  $\sigma_1^{r_1} \dots \sigma_k^{r_k}$ , где  $r_1 + 2r_2 + \dots + kr_k = r$  ( $r_1 \geq 0$ ). Рассмотрим числа  $r_k \leq r_k + r_{k-1} \leq \dots \leq r_k + \dots + r_1$ . Их сумма равна  $r$ . Наоборот, если  $r = s_1 + \dots + s_k$  и  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k \geq 0$ , то положим  $r_k = s_k$ ,  $r_{k-1} = s_{k-1} - s_k$ ,  $\dots$ ,  $r_1 = s_1 - s_2$ .

Легко проверить, что  $f^* \gamma_\infty^k \cong \gamma_\infty^1 \times \dots \times \gamma_\infty^1$ , точнее говоря,  $f^* \gamma_{nk}^k \cong \gamma_{n-1}^1 \times \dots \times \gamma_{n-1}^1$ . Действительно, слой расслоения  $f^* \gamma_{nk}^k$  над точкой  $(x_1, \dots, x_k)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^n$ , состоит из векторов  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ .

Воспользовавшись естественностью, получим  $f^*(w(\gamma_\infty^k)) = w(f^*(\gamma_\infty^k)) = w(\gamma_\infty^1 \times \dots \times \gamma_\infty^1) = (1 + \alpha_1) \dots (1 + \alpha_k)$ , где  $\alpha_i$  — образующая кольца когомологий  $i$ -го пространства  $\mathbb{R}P^\infty$ . Таким образом,  $f^*(w(\gamma_\infty^k)) = \sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ . Из этого следует, что  $f^*$  — эпиморфизм кольца  $H^*(G(\infty, k); \mathbb{Z}_2)$  на кольцо симметрических многочленов над полем  $\mathbb{Z}_2$  от переменных  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Поэтому  $f^*$  — изоморфизм пространства  $H^r(G(\infty, k); \mathbb{Z}_2)$  на пространство симметрических многочленов степени  $r$ .  $\square$

**Следствие** (аксиоматический подход к классам Штифеля—Уитни). *Предположим, что каждому векторному расслоению  $\xi$  над каждым симплициальным комплексом  $B$  сопоставлены когомологические классы  $\tilde{w}_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$  так, что  $\tilde{w}_0(\xi) = 1$ ,  $\tilde{w}_i(\xi) = 0$  при  $i > \dim \xi$ ,  $\tilde{w}_1(\gamma_\infty^1) = \alpha$ , выполняется свойство естественности и справедлива формула Уитни (формула (2) на с. 161). Тогда  $\tilde{w}_i(\xi) = w_i(\xi)$  — класс Штифеля—Уитни.*

**Доказательство.** При доказательстве теоремы 11.20 мы пользовались только этими свойствами классов Штифеля—Уитни. Поэтому, повторив те же самые рассуждения, получим  $f^*(\tilde{w}_i(\gamma_\infty^k)) = f^*(w_i(\gamma_\infty^k))$ . Но  $f^*$  — изоморфизм, поэтому  $\tilde{w}_i(\gamma_\infty^k) = w_i(\gamma_\infty^k)$ . Из универсальности расслоения  $\gamma_\infty^k$  следует, что  $\tilde{w}_i(\xi) = w_i(\xi)$  для любого  $k$ -мерного расслоения  $\xi$ .  $\square$

С помощью теоремы 11.20 можно получить формулу, выражающую характеристические классы расслоения  $\xi^m \otimes \eta^n$  ( $m$  и  $n$  — размерности расслоений) через характеристические классы расслоений  $\xi^m$  и  $\eta^n$ .

**Теорема 11.21.** *Пусть  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  и  $\sigma'_1, \dots, \sigma'_n$  — элементарные симметрические функции над полем  $\mathbb{Z}_2$  от переменных  $t_1, \dots, t_m$  и  $t'_1, \dots, t'_n$ . Рассмотрим (единственный) многочлен  $p_{m,n}$  от  $m+n$  переменных, для которого*

$$p_{m,n}(\sigma_1, \dots, \sigma_m, \sigma'_1, \dots, \sigma'_n) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (1 + t_i + t'_j).$$

Тогда  $\omega(\xi^m \otimes \eta^n) = p_{m,n}(\omega_1, \dots, \omega_m, \omega'_1, \dots, \omega'_n)$ , где  $\omega_i = \omega_i(\xi^m)$  и  $\omega'_j = \omega_j(\eta^n)$ .

**Доказательство.** Прежде всего покажем, что для одномерных расслоений выполняется равенство  $\omega_1(\xi^1 \otimes \eta^1) = \omega_1(\xi^1) + \omega_1(\eta^1)$ . Действительно, для одномерного расслоения класс  $\omega_1$  полностью определяется ограничением расслоения на одномерный остов, поэтому требуемое равенство достаточно проверить для одномерных расслоений над окружностью. А в случае окружности расслоение  $\xi^1 \otimes \eta^1$  ориентируемо тогда и только тогда, когда оба расслоения  $\xi^1$  и  $\eta^1$  одновременно либо ориентируемы, либо неориентируемы (если при обходе вдоль окружности ориентации слоёв расслоений  $\xi^1$  и  $\eta^1$  умножаются на  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , то ориентация слоя расслоения  $\xi^1 \otimes \eta^1$  умножается на  $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ ).

По-другому требуемое утверждение равенство можно доказать, воспользовавшись тем, что коцикл, представляющий, к примеру, класс  $\omega_1(\xi^1)$ , принимает на одномерной клетке значение, равное остатку от деления на 2 количества невырожденных нулей сечения расслоения  $\xi^1$  над этой клеткой. Выберем над одномерным остовом сечения расслоений  $\xi^1$  и  $\eta^1$  так, чтобы у них не было общих нулей и все нули были невырожденными. Тензорное произведение этих сечений является сечением расслоения  $\xi^1 \otimes \eta^1$ , нулями которого служат нули сечений расслоений  $\xi^1$  и  $\eta^1$ .

**Шаг 1.** Требуемое утверждение верно для прямых сумм одномерных расслоений, т. е. в том случае, когда  $\xi^m = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_m$  и  $\eta^n = \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_n$ , где все расслоения  $\xi_i$  и  $\eta_j$  одномерные.

Пусть  $t_i = \omega_1(\xi_i)$  и  $t'_j = \omega_1(\eta_j)$ . Тогда  $\omega = \prod(1 + t_i)$  и  $\omega' = \prod(1 + t'_j)$ , т. е.  $\omega_i = \sigma_i$  и  $\omega'_j = \sigma'_j$ . При этом

$$(\xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_m) \otimes (\eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_n) = \bigoplus_{i,j} (\xi_i \otimes \eta_j).$$

Значит,

$$\omega(\xi^m \otimes \eta^n) = \prod_{i,j} \omega(\xi_i \otimes \eta_j) = \prod_{i,j} (1 + t_i + t'_j).$$

По условию

$$\prod_{i,j} (1 + t_i + t'_j) = p_{m,n}(\sigma_1, \dots, \sigma_m, \sigma'_1, \dots, \sigma'_n),$$

т. е.  $\omega(\xi^m \otimes \eta^n) = p_{m,n}(\omega_1, \dots, \omega_m, \omega'_1, \dots, \omega'_n)$ .

**Шаг 2.** Требуемое утверждение достаточно доказать для прямых сумм одномерных расслоений.



Пусть  $p_1$  и  $p_2$  — проекции  $G(\infty, m) \times G(\infty, n)$  на первый и второй множители,  $\gamma_1^m = p_1^* \gamma^m$  и  $\gamma_2^m = p_2^* \gamma^m$ . Расслоение  $\gamma_1^m \otimes \gamma_2^m$  над  $G(\infty, m) \times G(\infty, n)$  является универсальным для расслоений вида  $\xi^m \otimes \eta^n$ . Действительно, если  $\xi^m = f_1^* \gamma^m$  и  $\eta^n = f_2^* \gamma^n$ , то  $\xi^m \otimes \eta^n = (f_1 \times f_2)^*(\gamma_1^m \otimes \gamma_2^m)$ ; здесь  $(f_1 \times f_2)(b) = (f_1(b), f_2(b))$ .

Таким образом,

$$\omega(\xi^m \otimes \eta^n) \in (f_1 \times f_2)^* H^*(G(\infty, m) \times G(\infty, n); \mathbb{Z}_2);$$

для краткости будем опускать группу коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$ . Если  $\alpha \in H^*(G(\infty, m))$  и  $\beta \in H^*(G(\infty, n))$ , то  $\alpha \times \beta = p_1^* \alpha \cup p_2^* \beta$ . Согласно теореме Кюннета отображение  $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \times \beta$  индуцирует изоморфизм когомологий

$$H^*(G(\infty, m)) \otimes H^*(G(\infty, n)) \rightarrow H^*(G(\infty, m) \times G(\infty, n)).$$

Поэтому кольцо  $H^*(G(\infty, m) \times G(\infty, n))$  мультипликативно порождено свободными образующими  $\omega_i(\gamma_1^m) = \omega_i$  и  $\omega_i(\gamma_2^m) = \omega'_i$ . Значит, полный класс Штифеля—Уитни расслоения  $\gamma_1^m \otimes \gamma_2^m$  *единственным* образом представляется в виде  $p_{m,n}(\omega_1, \dots, \omega_m, \omega'_1, \dots, \omega'_n)$ .  $\square$

**Пример 11.13.** *Справедливо равенство  $\omega_1(\xi^m \otimes \eta^n) = n\omega_1(\xi^m) + m\omega_1(\eta^n)$ .*

**Доказательство.** Имеем  $\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (1 + t_i + t'_j) = 1 + n(t_1 + \dots + t_m) + m(t'_1 + \dots + t'_n) + \dots$ .  $\square$

Теорему 11.21 можно применить для вычисления классов Штифеля—Уитни многообразий Грассмана. Пусть  $\overline{\gamma}_n^k$  — расслоение над  $G(n, k)$ , слой которого над  $\mathbb{P}^k \in G(n, k)$  представляет собой ортогональное дополнение к подпространству  $\mathbb{P}^k$ . Тогда расслоение  $\gamma_n^k \oplus \overline{\gamma}_n^k$  тривиально, поэтому  $\omega(\overline{\gamma}_n^k) = \overline{\omega}(\gamma_n^k)$ .

**Теорема 11.22.**  $\tau_{G(n,k)} \cong \text{Hom}(\gamma_n^k, \overline{\gamma}_n^k)$ .

**Доказательство.** Касательный вектор в точке  $\mathbb{P}^k \in G(n, k)$  задаётся кривой  $\mathbb{P}^k(t)$ , где  $\mathbb{P}^k(0) = \mathbb{P}^k$ . При малых  $t$  подпространство  $\mathbb{P}^k(t)$  однозначно задаётся линейным отображением  $\varphi_t: \mathbb{P}^k \rightarrow (\mathbb{P}^k)^\perp$ . Действительно, выберем в  $\mathbb{P}^k$  базис  $e_1, \dots, e_k$ . Пусть  $e'_1, \dots, e'_k$  — векторы в  $\mathbb{P}^k(t)$ , которые при ортогональной проекции на  $\mathbb{P}^k$  отображаются в  $e_1, \dots, e_k$ . Пусть, далее,  $e''_1, \dots, e''_k$  — ортогональные проекции векторов  $e'_1, \dots, e'_k$  на  $(\mathbb{P}^k)^\perp$ . Формула  $\varphi_t(e_i) = e''_i$  задаёт линейное отображение  $\varphi_t: \mathbb{P}^k \rightarrow (\mathbb{P}^k)^\perp$ ; при этом  $\varphi_0 = 0$ . Отображение  $\varphi_t$  однозначно задаёт подпространство  $\mathbb{P}^k(t)$ . Действительно, подпространство  $\mathbb{P}^k(t)$  натянуто на векторы  $e_1 + \varphi_t(e_1), \dots, e_k + \varphi_t(e_k)$ .

Итак, кривую на многообразии  $G(n, k)$ , проходящую через точку  $\mathbb{P}^k$ , при малых  $t$  можно рассматривать как кривую в пространстве

$\text{Hom}(\Pi^k, (\Pi^k)^\perp)$ , проходящую через начало координат. Касательные векторы к таким кривым находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами пространства  $\text{Hom}(\Pi^k, (\Pi^k)^\perp)$ . В результате получаем изоморфизм  $\tau_{G(n,k)} \cong \text{Hom}(\gamma_n^k, \overline{\gamma_n^k})$ .  $\square$

Из линейной алгебры (см., например, [П2], с. 170) известен изоморфизм  $\text{Hom}(\gamma_n^k, \overline{\gamma_n^k}) \cong (\gamma_n^k)^* \otimes \overline{\gamma_n^k}$ , где  $*$  означает переход к двойственному пространству. Выбрав в расслоении  $\overline{\gamma_n^k}$  риманову метрику, получим изоморфизм  $(\gamma_n^k)^* \cong \gamma_n^k$ . Итак,  $\tau_{G(n,k)} \cong \gamma_n^k \otimes \overline{\gamma_n^k}$ , поэтому  $\omega(G(n, k)) = \omega(\gamma_n^k \otimes \overline{\gamma_n^k}) = \rho_{k,n-k}(\omega_1, \dots, \omega_k, \overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_{n-k})$ , где  $\omega_i = \omega_i(\gamma_n^k)$  и  $\overline{\omega}_j = \omega_j(\overline{\gamma_n^k}) = \overline{\omega}_j(\gamma_n^k)$ .

**Пример 11.14.** *Многообразие Грассмана  $G(n, k)$  ориентируемо тогда и только тогда, когда  $n$  чётно.*

**Доказательство.** Воспользовавшись примером 11.13, получим  $\omega_1(G(n, k)) = (n - k)\omega_1(\gamma_n^k) + k\overline{\omega}_1(\gamma_n^k) = n\omega_1(\gamma_n^k)$ , поскольку  $\overline{\omega}_1 = \omega_1$ . Кроме того,  $\omega_1(\gamma_n^k) \neq 0$ .  $\square$

### 11.8. Характеристические классы Чженя

По аналогии с вещественными векторными расслоениями можно определить *комплексные* векторные расслоения, слоями которых служат векторные пространства над  $\mathbb{C}$ . Для комплексных векторных расслоений тоже можно применить конструкции теории препятствий и построить характеристические классы. Для комплексных расслоений ситуация даже во многом упрощается. Одна из причин этого состоит в том, что овеществление комплексного пространства имеет каноническую ориентацию и поэтому овеществление комплексного векторного расслоения всегда ориентируемо. Поясним это подробнее.

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{C}$  с базисом  $e_1, \dots, e_n$ . Ему можно сопоставить векторное пространство  $V_{\mathbb{R}}$  над  $\mathbb{R}$  с базисом  $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ . Если матрица перехода от базиса  $e$  к базису  $\varepsilon$  имеет вид  $A + iB$ , где  $A$  и  $B$  — матрицы с вещественными элементами, то матрица перехода от базиса  $e, ie$  к базису  $\varepsilon, i\varepsilon$  имеет вид  $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ . Определитель этой матрицы равен  $|\det(A + iB)|^2 > 0$ , поскольку

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + iB & -B + iA \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + iB & 0 \\ B & A - iB \end{vmatrix}.$$

Поэтому в пространстве  $V_{\mathbb{R}}$  есть каноническая ориентация.

Пусть  $\omega$  — комплексное расслоение,  $\omega_{\mathbb{R}}$  — его овеществление; это расслоение ориентировано. По аналогии с конструкцией универсального расслоения в вещественном случае можно построить универсальное расслоение

ние в комплексном случае. База этого расслоения — комплексное многообразие Грассмана  $G_{\mathbb{C}}(\infty, k)$ ,  $k = \dim_{\mathbb{C}} \omega = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \omega_{\mathbb{R}}$ .

В каждом слое комплексного векторного расслоения  $\omega$  над компактной базой можно задать эрмитову метрику и построить расслоение  $\omega_k$ , слоем которого является *комплексное многообразие Штифеля*  $V_{\mathbb{C}}(n, k)$ ; точками этого многообразия служат наборы  $k$  векторов в  $\mathbb{C}^n$ , ортонормированных относительно эрмитова скалярного произведения. Для построения характеристического класса расслоения  $\omega_k$  нужно вычислить первую нетривиальную гомотопическую группу  $\pi_i(V_{\mathbb{C}}(n, k))$ .

**Теорема 11.23.** *Если  $i \leq 2(n - k)$ , то  $\pi_i(V_{\mathbb{C}}(n, k)) = 0$ . Первая нетривиальная гомотопическая группа  $\pi_{2(n-k)+1}(V_{\mathbb{C}}(n, k))$  равна  $\mathbb{Z}$ .*

**Доказательство.** Мы воспользуемся той же схемой рассуждений, что и при доказательстве теоремы 11.4 (см. с. 153). В комплексном случае рассуждения упрощаются, потому что не нужно вычислять гомоморфизм  $\partial_*$ .

При  $k = 1$  многообразие  $V_{\mathbb{C}}(n, 1)$  гомеоморфно  $S^{2n-1}$ ; ясно, что  $\pi_i(S^{2n-1}) = 0$  при  $i \leq 2(n - 1)$ . Локально тривиальное расслоение  $V_{\mathbb{C}}(n, k + 1) \rightarrow V_{\mathbb{C}}(n, k)$  со слоем  $S^{2(n-k)-1}$  позволяет сделать шаг индукции и показать, что  $\pi_i(V_{\mathbb{C}}(n, k + 1)) = 0$  при  $i \leq 2(n - k - 1)$ .

Локально тривиальное расслоение  $V_{\mathbb{C}}(n + 1, k + 1) \rightarrow V_{\mathbb{C}}(n + 1, 1) = S^{2n+1}$  со слоем  $V_{\mathbb{C}}(n, k)$  позволяет показать, что  $\pi_i(V_{\mathbb{C}}(n, k)) \cong \pi_i(V_{\mathbb{C}}(n + 1, k + 1))$  при  $i \leq 2n - 1$ . Поэтому при  $i \leq 2(n - k) + 1$  получаем  $\pi_i(V_{\mathbb{C}}(n - k + 1, 1)) \cong \pi_i(V_{\mathbb{C}}(n - k + 2, 2)) \cong \dots$ . Следовательно,  $\pi_{2(n-k)+1}(V_{\mathbb{C}}(n, k)) \cong \pi_{2(n-k)+1}(V_{\mathbb{C}}(n - k + 1, 1)) = \pi_{2(n-k)+1}(S^{2(n-k)+1}) = \mathbb{Z}$ .  $\square$

Каноническая ориентация пространства  $\mathbb{C}^n$  позволяет установить канонический изоморфизм  $\pi_{2(n-k)+1}(V_{\mathbb{C}}(n, k)) \cong \mathbb{Z}$ . Поэтому вместо когомологий с локальными коэффициентами мы получаем обычные когомологии с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ . *Характеристический класс Чженя\**  $c_{i+1}(\omega)$  определяется как препятствие к продолжению  $n - i$  линейно независимых сечений расслоения  $\omega$  на  $(2i + 2)$ -мерный остов; это препятствие лежит в группе  $H^{2i+2}(B; \{\pi_{2i+1}(V_{\mathbb{C}}(n, n - i))\}) = H^{2i+2}(B; \mathbb{Z})$ .

Непосредственно из определений видны следующие свойства классов Чженя.

1. Если  $\dim_{\mathbb{C}} \omega = n$ , то  $c_n(\omega) = e(\omega_{\mathbb{R}})$ , т.е. старший класс Чженя совпадает с эйлеровым классом овеществления расслоения  $\omega$ .

2. Гомоморфизм  $H^i(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(B; \mathbb{Z}_2)$  отображает полный класс Чженя  $c(\omega)$  в полный класс Штифеля—Уитни  $\omega(\omega_{\mathbb{R}})$ . В частности,  $\omega_{2j+1}(\omega_{\mathbb{R}}) = 0$  для всех  $j$ .

\*) Эту фамилию часто пишут по-другому: Черн.

Точно так же, как и для классов Штифеля—Уитни, доказываются следующие утверждения.

1. Классы Чженя обладают свойством естественности.
2. Классы Чженя стабильно эквивалентных расслоений одинаковы.

Пусть  $\gamma_n^1$  — расслоение над  $\mathbb{C}P^n$ , для которого пространство расслоения состоит из пар  $(x \in \mathbb{C}P^n, v = \lambda x)$ , где  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Теорема 11.24.** *Справедливо равенство  $c_1(\gamma_n^1) = \alpha$ , где  $\alpha$  — образующая группы  $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ .*

**Доказательство.** Вычислим сначала  $c_1(\gamma_1^1)$ . Для этого опишем более подробно строение расслоения  $\gamma_1^1$ . Представим  $\mathbb{C}P^1 = \{(z_1 : z_2)\}$  в виде объединения множеств  $U_1$  и  $U_2$ , заданных неравенствами  $|z_1| \leq |z_2|$  и  $|z_1| \geq |z_2|$ . В качестве координат на  $U_1$  и  $U_2$  можно взять  $\omega_1 = z_1/z_2$  и  $\omega_2 = z_2/z_1$ . Слой расслоения  $\gamma_1^1$  над точкой  $(z_1 : z_2)$  состоит из векторов  $(\lambda z_1 : \lambda z_2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ограничения расслоения  $\gamma_1^1$  на  $U_1$  и  $U_2$  тривиальны; тривиализации имеют вид  $(\lambda \omega_1, \lambda)$  и  $(\mu, \mu \omega_2)$ . Слои над точками  $\omega_1$  и  $\omega_2 = \omega_1^{-1}$  отождествляются следующим образом:  $(\lambda \omega_1, \lambda) = (\mu, \mu \omega_2)$ , т. е.  $\mu = \lambda \omega_1$ . Сечение  $\lambda = 1$  над окружностью  $|\omega_1| = 1$  переходит в сечение, которое над точкой  $\omega_2 = \omega_1^{-1}$  задаётся формулой  $\mu = \omega_1$ . Получаем отображение  $S^1 \rightarrow S^1$  степени  $-1$ . Значит, при продолжении этого сечения внутрь  $U_2$  получится сечение с одним невырожденным нулём. Из этого следует, что  $c_1(\gamma_1^1) = e((\gamma_1^1)_{\mathbb{R}})$  — образующая группы  $H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ .

Пусть  $i: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^n$  — естественное включение. Непосредственно из определения видно, что  $i^*(\gamma_n^1) \cong \gamma_1^1$ , поэтому  $i^*c_1(\gamma_n^1) = c_1(\gamma_1^1)$ . Ясно, что включение  $i$  индуцирует изоморфизм  $i^*: H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z})$ . Поэтому  $c_1(\gamma_n^1)$  — образующая группы  $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ .  $\square$

**Замечание.** Из того, что степень рассматриваемого отображения  $S^1 \rightarrow S^1$  равна  $-1$ , следует, что  $c_1(\gamma_n^1)$  — не та образующая группы  $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ , которая на  $\mathbb{C}P^1$  с канонической ориентацией принимает значение  $+1$ , а та, которая принимает значение  $-1$ .

**Теорема 11.25.** *Пусть  $\omega$  и  $\varphi$  — комплексные векторные расслоения над симплицальными комплексами  $X$  и  $Y$ . Тогда  $c_k(\omega \times \varphi) = \sum_{i+j=k} c_i(\omega) \times c_j(\varphi)$ .*

**Доказательство.** Рассуждения во многом похожи на доказательство обобщённой формулы Уитни (формула (2) на с. 161), но есть и существенные отличия. Снова рассмотрим вложения  $i_X$  и  $j_Y$ . Расслоение  $\omega|_{X^i}$  имеет  $\dim \omega - [i/2]$  линейно независимых сечений, поэтому оно стабильно эквивалентно расслоению  $\omega_0$  размерности  $[i/2]$ . Если вместо теоремы 11.8 мы воспользуемся теоремой 11.9, то получим, что элемент  $c_k(\omega \times \varphi) = \sum_{\alpha+\beta=k} c_\alpha(\omega) \times c_\beta(\varphi)$  лежит в ядре гомоморфизма  $(i_X \times j_Y)^*$  для

всех пар  $i, j$ , для которых  $[i/2] + [j/2] = k$ . Мы хотим доказать, что этот элемент равен нулю. Отметим, что если  $i + j = 2k + 1$ , то  $[i/2] + [j/2] = k$ . Действительно,  $i = 2i'$  и  $j = 2j' + 1$  (или наоборот), поэтому  $[i/2] + [j/2] = i' + j' = (i + j - 1)/2 = k$ . Покажем, что прямая сумма отображений  $(i_X \times j_Y)^*$  для всех пар  $i, j$ , сумма которых равна  $2k + 1$ , является мономорфизмом.

Для коэффициентов в  $\mathbb{Z}$  согласно теореме Кюннета группа  $H^{2k}(X \times Y)$  является прямой суммой групп

$$\bigoplus_{\alpha+\beta=2k} H^\alpha(X) \otimes H^\beta(Y) \quad \text{и} \quad \bigoplus_{\alpha+\beta=2k+1} \text{Tor}(H^\alpha(X), H^\beta(Y)).$$

Аналогично группа  $H^{2k}(X^i \times Y^j)$  является прямой суммой групп

$$\bigoplus_{\alpha+\beta=2k} H^\alpha(X^i) \otimes H^\beta(Y^j) \cong (H^i(X^i) \otimes H^{j-1}(Y^j)) \oplus (H^{i-1}(X^i) \otimes H^j(Y^j))$$

и

$$\bigoplus_{\alpha+\beta=2k+1} \text{Tor}(H^\alpha(X^i), H^\beta(Y^j)) = \text{Tor}(H^i(X^i), H^j(Y^j)).$$

Оба отображения  $H^\alpha(X) \otimes H^\beta(Y)$  в  $H^\alpha(X^\alpha) \otimes H^\beta(Y^{\beta+1})$  и в  $H^\alpha(X^{\alpha+1}) \otimes H^\beta(Y^\beta)$  являются мономорфизмами. Для слагаемого  $\text{Tor}$  соответствующие отображения — тоже мономорфизмы.  $\square$

Доказанные свойства классов Чженя позволяют воспользоваться той же схемой рассуждений, что и при доказательстве теоремы 11.20, и доказать следующее утверждение.

**Теорема 11.26. Гомоморфизм**

$$f^* : H^*(G_{\mathbb{C}}(\infty, k); \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \dots \times \mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_k]$$

является изоморфизмом на подкольцо симметрических многочленов. При этом  $f^*(c_i(\gamma_\infty^k)) = \sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , где  $\sigma_i$  — элементарная симметрическая функция.

Единственное существенное отличие в доказательстве от вещественного случая состоит в том, что у комплексных многообразий Грассмана все клетки Шуберта имеют чётную размерность, поэтому граничный гомоморфизм нулевой по очевидным причинам и для коэффициентов в  $\mathbb{Z}$ .

Характеристические классы Чженя, как и классы Штифеля—Уитни, можно задавать набором аксиом; переформулировка следствия теоремы 11.20 достаточно очевидна.

Формула для выражения класса Чженя  $c(\xi^m \otimes \eta^n)$  через классы  $c(\xi^m)$  и  $c(\eta^n)$  выглядит точно так же, как и соответствующая формула для классов Штифеля—Уитни (теорема 11.21). Единственное существенное отличие в доказательстве состоит в том, что теперь нам нужно следующее утверждение.

*Л е м м а.* Если  $\omega_1^1$  и  $\omega_2^1$  — одномерные комплексные расслоения над одной и той же базой, то  $c_1(\omega_1^1 \otimes \omega_2^1) = c_1(\omega_1^1) + c_1(\omega_2^1)$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Для одномерного расслоения класс  $c_1$  — это препятствие к продолжению ненулевого сечения на двумерный остов. Кочикл, представляющий этот класс, на двумерной клетке принимает значение, равное сумме индексов особых точек сечения (предполагается, что все особые точки невырожденные). Выберем сечения расслоений  $\omega_1^1$  и  $\omega_2^1$  в общем положении, т. е. так, чтобы все нули были попарно различны. Тензорное произведение этих сечений имеет нули в тех точках, в которых имеет нули одно из них. Проверим, что знаки нуля сечения и тензорного произведения сечений над каждой особой точкой совпадают.

Достаточно рассмотреть случай, когда одно сечение постоянно, а другое задаётся линейным отображением. Пусть сечение расслоения  $\omega_1^1$  на базисе задаётся формулой  $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12}i \\ a_{21} + a_{22}i \end{pmatrix}$ , а на вектор  $xe_1 + ye_2$  отображение продолжается по линейности; сечение расслоения  $\omega_2^1$  постоянно — оно задаётся вектором  $\lambda + \mu i$ . Тогда сечение расслоения  $\omega_1^1 \otimes \omega_2^1$  задаётся формулой

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \mapsto \left( \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12}i \\ a_{21} + a_{22}i \end{pmatrix} \otimes (\lambda + \mu i) \right) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} - \mu a_{12} + (\lambda a_{12} + \mu a_{11})i \\ \lambda a_{21} - \mu a_{22} + (\lambda a_{22} + \mu a_{21})i \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы этого отображения равен  $(\lambda^2 + \mu^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ . Поэтому особая точка сечения расслоения  $\omega_1^1$  имеет такой же индекс, как и особая точка сечения расслоения  $\omega_1^1 \otimes \omega_2^1$ .  $\square$

Для комплексных векторных расслоений тоже можно доказать, что множество  $k$ -мерных векторных расслоений над компактным хаусдорфовым пространством  $B$  находится во взаимно однозначном соответствии с множеством гомотопических классов отображений  $[B, G_{\mathbb{C}}(\infty, k)]$ , где  $G_{\mathbb{C}}(\infty, k)$  — бесконечное комплексное многообразие Грассмана, которое определяется аналогично вещественному. Для одномерных расслоений эти две классификационные теоремы (вещественную и комплексную) можно существенно уточнить, используя то обстоятельство, что пространства  $G(\infty, 1) = \mathbb{R}P^{\infty}$  и  $G_{\mathbb{C}}(\infty, 1) = \mathbb{C}P^{\infty}$  являются пространствами типа  $K(\pi, n)$ , а именно  $\mathbb{R}P^{\infty} = K(\mathbb{Z}_2, 1)$  и  $\mathbb{C}P^{\infty} = K(\mathbb{Z}, 2)$ . Поэтому, воспользовавшись теоремой 10.10 (см. с. 137), получим, что если  $X$  — конечный симплициальный комплекс, то элементы множеств  $[X, \mathbb{R}P^{\infty}]$  и  $[X, \mathbb{C}P^{\infty}]$  находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами групп  $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$  и  $H^2(X; \mathbb{Z})$ . С другой стороны, элементы множеств  $[X, \mathbb{R}P^{\infty}]$  и  $[X, \mathbb{C}P^{\infty}]$  находятся во взаимно однозначном соответствии с одномерными вещественными или комплексными расслоениями над  $X$ , рассматриваемыми с точностью до изоморфизма.

С помощью характеристических классов это соответствие описывается явным образом. А именно, пусть расслоение  $\xi$  задаётся отображением  $f: X \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$  или  $f: X \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ . Теорема 10.10 сопоставляет отображению  $f$  элемент  $f^*(F_\pi) \in H^n(X; \pi)$ ; здесь  $n = 1$  и  $\pi = \mathbb{Z}_2$  в вещественном случае,  $n = 2$  и  $\pi = \mathbb{Z}$  в комплексном случае. При этом когомологический класс  $F_\pi$ , как видно из его описания, является образующей группы  $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$  или  $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ . Таким образом, взаимно однозначное соответствие между одномерными расслоениями и элементами группы  $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$  или  $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$  задаётся формулой  $\xi \mapsto \omega_1(\xi)$  или  $\xi \mapsto c_1(\xi)$ ; при этом сложение когомологических классов соответствует тензорному умножению расслоений. В итоге получаем следующее утверждение.

**Теорема 11.27.** *Пусть  $X$  — конечномерный симплициальный комплекс.*

а) *Одномерные вещественные расслоения  $\xi$  и  $\eta$  над  $X$  изоморфны тогда и только тогда, когда  $\omega_1(\xi) = \omega_1(\eta)$ , причём для каждого элемента  $\alpha \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$  существует одномерное вещественное расслоение  $\xi$  над  $X$ , для которого  $\omega_1(\xi) = \alpha$ .*

б) *Одномерные комплексные расслоения  $\xi$  и  $\eta$  над  $X$  изоморфны тогда и только тогда, когда  $c_1(\xi) = c_1(\eta)$ , причём для каждого элемента  $\alpha \in H^2(X; \mathbb{Z})$  существует одномерное комплексное расслоение  $\xi$  над  $X$ , для которого  $c_1(\xi) = \alpha$ .*

Заметим, что одномерные комплексные расслоения — это то же самое, что ориентированные вещественные двумерные расслоения с фиксированной римановой метрикой. Действительно, чтобы задать комплексную структуру на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , нужно задать умножение на  $i$ , т.е. поворот на  $90^\circ$ . Ясно также, что эйлеров класс ориентированного двумерного вещественного расслоения совпадает с первым классом Чженя соответствующего одномерного комплексного расслоения. Напомним, что при изменении ориентации расслоения его эйлеров класс меняет знак. Из теоремы 11.27 б) вытекает следующее утверждение.

**Теорема 11.28.** *Ориентированные двумерные вещественные расслоения  $\xi$  и  $\eta$  над конечным симплициальным комплексом  $X$  изоморфны тогда и только тогда, когда  $e(\xi) = e(\eta)$ , причём для любого элемента  $\alpha \in H^2(X; \mathbb{Z})$  существует ориентированное двумерное вещественное расслоение  $\xi$ , для которого  $e(\xi) = \alpha$ .*

## 11.9. Расщепляющие отображения

Пусть  $\xi$  — векторное расслоение над базой  $B$ . Непрерывное отображение  $f: B_1 \rightarrow B$  называют *расщепляющим* для расслоения  $\xi$ , если  $f^*(\xi)$  — прямая сумма одномерных расслоений и  $f^*: H^*(B) \rightarrow H^*(B_1)$  —

мономорфизм. Расщепляющие отображения позволяют сводить доказательства многих утверждений о характеристических классах к их проверке для прямых сумм одномерных расслоений. Для доказательства существования расщепляющих отображений нам понадобится следующая конструкция с векторными расслоениями.

Каждому векторному расслоению  $\xi$  над базой  $B$  можно сопоставить его *проективизацию*  $P\xi$ , которая является локально тривиальным расслоением над  $B$ . Слой расслоения  $P\xi$  над точкой  $b \in B$  получается следующим образом. Возьмём слой  $V$  расслоения  $\xi$  и отождествим в  $V \setminus \{0\}$  все точки прямой, проходящей через нуль. Таким образом, слой расслоения  $P\xi$  — это  $\mathbb{R}P^{n-1}$  или  $\mathbb{C}P^{n-1}$ , где  $n = \dim \xi$ .

**З а д а ч а 11.20.** Пусть  $E(P\gamma_n^k) \rightarrow G(n, k)$  — проективизация канонического расслоения  $\gamma_n^k$  над  $G(n, k)$ ,  $E(P\overline{\gamma}_n^{k-1}) \rightarrow G(n, k-1)$  — проективизация ортогонального дополнения канонического расслоения  $\overline{\gamma}_n^{k-1}$  над  $G(n, k-1)$ . Докажите, что  $E(P\gamma_n^k) \approx E(P\overline{\gamma}_n^{k-1})$ .

Пусть расслоение  $P\xi$  задаётся отображением  $q: E(P\xi) \rightarrow B$ . Рассмотрим индуцированное векторное расслоение  $q^*(\xi)$  над  $E(P\xi)$ . Точками пространства  $E(P\xi)$  служат прямые  $l$ , проходящие через нуль. Поэтому в  $q^*(\xi)$  есть одномерное подрасслоение  $\lambda_\xi$ , для которого пространство расслоения состоит из пар  $(v, l)$ , где  $v \in l$ . Если база  $B$  компактна, то в расслоении  $q^*(\xi)$  можно ввести риманову (в комплексном случае — эрмитову) метрику, поэтому  $q^*(\xi) \cong \lambda_\xi \oplus \sigma_\xi$ , где  $\sigma_\xi$  — ортогональное дополнение к  $\lambda_\xi$ .

Расслоение  $\lambda_\xi$ , как и любое другое одномерное расслоение, получается из канонического расслоения  $\gamma^1$  над  $\mathbb{R}P^\infty$  (или над  $\mathbb{C}P^\infty$ ), т. е. существует отображение  $f: E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ , для которого  $f^*(\gamma^1) \cong \lambda_\xi$ . Пусть  $\alpha$  — образующая группы  $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$  в вещественном случае и образующая группы  $H^1(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$  в комплексном случае. Рассмотрим элемент  $a_\xi = f^*(\alpha) \in H^*(E(P\xi))$ ; этот элемент зависит только от расслоения  $\xi$ , поскольку если два отображения  $E(P\xi) \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$  индуцируют из  $\gamma^1$  изоморфные расслоения, то эти отображения гомотопны.

**Т е о р е м а 11.29** (Лере—Хирш). Пусть  $\xi$  — вещественное или комплексное векторное расслоение размерности  $n$  над компактной базой  $B(\xi)$ .

а) В вещественном случае элементы  $1, a_\xi, a_\xi^2, \dots, a_\xi^{n-1}$  порождают линейное пространство  $\langle 1, a_\xi, \dots, a_\xi^{n-1} \rangle$  размерности  $n$  и при этом

$$H^*(E(P\xi); \mathbb{Z}_2) \cong H^*(B(\xi); \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \langle 1, a_\xi, \dots, a_\xi^{n-1} \rangle.$$

Здесь пространство  $H^*(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$  можно отождествить с образом отображения  $q^*: H^*(B(\xi); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(E(P\xi); \mathbb{Z}_2)$  и тогда каждый элемент  $\beta \otimes a_\xi^i$  отождествится с  $\beta \cup a_\xi^i$ .



б) В комплексном случае элементы  $1, a_\xi, a_\xi^2, \dots, a_\xi^{n-1}$  порождают в  $H^*(E(P\xi); \mathbb{Z})$  свободную абелеву группу  $\langle 1, a_\xi, \dots, a_\xi^{n-1} \rangle$  ранга  $n$  и при этом

$$H^*(E(P\xi); \mathbb{Z}) \cong H^*(B(\xi); \mathbb{Z}) \otimes \langle 1, a_\xi, \dots, a_\xi^{n-1} \rangle.$$

Это разложение тоже согласовано с гомоморфизмом  $q^*$ .

Доказательство. Для каждой точки  $b \in B$  рассмотрим отображение  $i_b: \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow E(P\xi)$  — включение слоя в пространство расслоения (в комплексном случае вместо  $\mathbb{R}P^{n-1}$  берётся  $CP^{n-1}$ ). Непосредственно из определений видно, что  $i_b^*(\lambda_\xi)$  — это каноническое расслоение  $\gamma_{n-1}^1$  над  $\mathbb{R}P^{n-1}$  или  $CP^{n-1}$ . Расслоение  $i_b^*(f^*(\gamma^1))$  совпадает с  $\gamma_{n-1}^1$ , поэтому отображение  $f i_b$  гомотопно естественному вложению  $\mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$  или  $CP^{n-1} \rightarrow CP^\infty$ . Из этого следует, что элементы  $i_b^*(1), \dots, i_b^*(a_\xi^{n-1})$  независимы.

Требуемые изоморфизмы доказываются следующим образом. Рассмотрим в  $B$  подкомплекс  $K$ , над которым расслоение  $P\xi$  тривиально. Например, в качестве  $K$  можно взять любой симплекс. Пусть  $E_K = q^{-1}(K)$ . Тогда имеется гомеоморфизм  $K \times F \rightarrow E_K$ , согласованный с проекцией  $q$ . Изоморфизм  $H^*(E_K) \cong H^*(K) \otimes H^*(F)$ , согласованный с проекцией  $q$ , существует в силу теоремы Кюннета. В вещественном случае здесь имеется в виду тензорное произведение векторных пространств над  $\mathbb{Z}_2$ . В комплексном случае для доказательства нужно воспользоваться тем, что группа  $H^*(F) = \langle 1, a_\xi, \dots, a_\xi^{n-1} \rangle$  свободная.

Изоморфизм групп  $H^*(E_K)$  и  $H^*(K) \otimes H^*(F)$ , согласованный с проекцией, формально можно записать следующим образом. Рассмотрим гомоморфизм  $\varphi_K^m$ , заданный формулой  $\sum \beta^k \rightarrow \sum q^*(\beta^k) \cup a_\xi^l$ , где  $\beta^k \in H^k(K)$ , а  $l$  выбирается так, что  $k + l = m$  в вещественном случае и  $k + 2l = m$  в комплексном случае. В вещественном случае должны выполняться неравенства  $0 \leq m - k \leq n - 1$ , а в комплексном случае должны выполняться неравенства  $0 \leq m - k \leq 2n - 2$  и число  $m - k$  должно быть чётным. Рассмотрим группу  $\mathcal{H}^m(K)$ , которая равна  $\bigoplus_{k=1-n+m}^m H^k(K)$  в вещественном случае и  $\bigoplus_{\substack{k=2-2n+m \\ m-k \text{ чётно}}}^m H^k(K)$  в комплексном случае. Отображение  $\varphi_K^m: \mathcal{H}^m(K) \rightarrow H^m(E_K)$  является изоморфизмом для всех  $m$ .

Группу  $\mathcal{H}^m(L)$  и гомоморфизм  $\varphi_L^m$  можно определить для любого подкомплекса  $L \subset B$ . Требуется доказать, что  $\varphi_B^m$  — изоморфизм для всех  $m$ . Для этого мы воспользуемся точной последовательностью Майера—Вьеториса и 5-леммой. Точная последовательность Майера—Вьеториса для групп  $\mathcal{H}^*$  имеет место, поскольку прямая сумма точных последователь-

ностей тоже является точной последовательностью. Коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{H}^{m+1}(K \cap L) & \longrightarrow & \mathcal{H}^m(K) \oplus \mathcal{H}^m(L) & \longrightarrow & \mathcal{H}^m(K \cup L) & \longrightarrow & \\
 \downarrow \varphi_{K \cap L}^{m+1} & & \downarrow \varphi_K^m \oplus \varphi_L^m & & \downarrow \varphi_{K \cup L}^m & & \\
 H^{m+1}(E_{K \cap L}) & \longrightarrow & H^m(E_K) \oplus H^m(E_L) & \longrightarrow & H^m(E_{K \cup L}) & \longrightarrow & \\
 & & & & & & \longrightarrow \mathcal{H}^m(K \cap L) \longrightarrow \mathcal{H}^{m-1}(K) \oplus \mathcal{H}^{m-1}(L) \\
 & & & & & & \downarrow \varphi_{K \cap L}^m \qquad \qquad \qquad \downarrow \varphi_K^{m-1} \oplus \varphi_L^{m-1} \\
 & & & & & & \longrightarrow H^m(E_{K \cap L}) \longrightarrow H^{m-1}(E_K) \oplus H^{m-1}(E_L)
 \end{array}$$

показывает, что если  $\varphi_K$ ,  $\varphi_L$  и  $\varphi_{K \cap L}$  — изоморфизмы, то  $\varphi_{K \cup L}$  тоже изоморфизм. Из этого следует требуемое.  $\square$

Из теоремы 11.29 легко выводится существование расщепляющих отображений.

**Теорема 11.30.** *Для любого векторного расслоения  $\xi$  над компактным симплицальным комплексом  $B$  существует расщепляющее отображение  $f: B_1 \rightarrow B$ .*

**Доказательство.** Применим индукцию по  $n = \dim \xi$ . При  $n = 1$  отображение  $\text{id}_B$  является расщепляющим. Предположим, что для любого векторного расслоения размерности меньше  $n$  существует расщепляющее отображение. Согласно теореме 11.29 отображение  $q^*: H^*(B) \rightarrow H^*(E(P\xi))$  — мономорфизм. Кроме того,  $q^*(\xi) = \lambda_\xi \oplus \sigma_\xi$ , где  $\lambda_\xi$  — одномерное расслоение. Согласно предположению индукции для  $\sigma_\xi$  существует расщепляющее отображение  $g: B_1 \rightarrow E(P\xi)$ . Покажем, что отображение  $f = qg$  расщепляющее. Действительно,  $f^* = g^*q^*$  — мономорфизм, поскольку  $g^*$  и  $q^*$  мономорфизмы. Кроме того,  $f^*(\xi) = g^*(\lambda_\xi) \oplus g^*(\sigma_\xi)$ , а по условию  $g^*(\sigma_\xi)$  — прямая сумма одномерных расслоений.  $\square$

В качестве приложения расщепляющих отображений приведём новое доказательство одного доказанного ранее утверждения. А именно, покажем, что из существования расщепляющих отображений следует единственность классов Штифеля—Уитни и Чженя (аксиоматический подход: см. с. 174). Действительно, для одномерного расслоения класс Штифеля—Уитни или класс Чженя непосредственно определяется естественностью, условием на  $w_1(\gamma^1)$  и универсальностью расслоения  $\gamma^1$ . Пусть  $f: B_1 \rightarrow B$  — расщепляющее отображение для расслоения  $\xi$ . Тогда  $f^*(\xi) = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n$ , где все расслоения  $\xi_1, \dots, \xi_n$  одномерные. Поэтому класс  $f^*(w(\xi)) = \prod (1 + w_1(\xi_i))$  определён однозначно. Из мономорфности отображения  $f^*$  следует, что класс  $w(\xi)$  определён однозначно.

Мы уже обсудили два подхода к характеристическим классам Штифеля—Уитни и Чженя: построение их как препятствий к продолжению

сечений и аксиоматический подход. Теорема 11.29 предоставляет ещё одну возможность построения этих характеристических классов. Согласно этой теореме элемент  $a_\xi^n$  однозначно представляется в виде суммы  $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_i(\xi) a_\xi^{n-i}$ , где элемент  $x_i(\xi)$  лежит в  $H^i(B; \mathbb{Z}_2)$  в вещественном случае и в  $H^{2i}(B; \mathbb{Z})$  в комплексном случае. Характеристические классы Штифеля—Уитни и Чженя можно строить на основе следующего утверждения.

**Теорема 11.31.** *Положим  $x_0(\xi) = 1$  и  $x_i(\xi) = 0$  при  $i > \dim \xi$ . Тогда в вещественном случае  $x_i(\xi) = \omega_i(\xi)$ , а в комплексном случае  $x_i(\xi) = c_i(\xi)$ .*

Теорему 11.31 удобно доказывать с помощью сингулярных когомологий, поэтому мы отложим её доказательство до с. 272.

Векторному пространству  $V$  над  $\mathbb{C}$  можно сопоставить векторное пространство  $\bar{V}$  над  $\mathbb{C}$ , элементами которого служат векторы из  $V$  (вектору  $v \in V$  соответствует вектор  $\bar{v} \in \bar{V}$ ), а умножение на комплексные числа задаётся формулой  $\lambda \bar{v} = \overline{\lambda v}$ , т. е. умножение на  $\lambda$  заменяется умножением на  $\bar{\lambda}$ . Такую операцию можно проделать с каждым слоем комплексного векторного расслоения  $\omega$ . В результате получим расслоение  $\bar{\omega}$ , которое называют *сопряжённым*.

**Пример 11.15.** Пусть  $\tau^1$  — комплексное касательное расслоение  $\mathbb{C}P^1$ . Тогда расслоения  $\tau^1$  и  $\overline{\tau^1}$  не изоморфны.

**Доказательство.** Пусть  $f: V \rightarrow \bar{V}$  — изоморфизм над  $\mathbb{C}$ . Если  $f(v) = \bar{w}$ , то  $f(\lambda v) = \lambda \bar{w} = \overline{\lambda w}$ . Это означает, что если мы отождествим соответствующие элементы пространств  $V$  и  $\bar{V}$ , то отображение  $f$  должно удовлетворять соотношению  $f(\lambda v) = \bar{\lambda} f(v)$ . Если  $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ , то изоморфизм  $f$  изменяет ориентацию пространства  $V_{\mathbb{R}}$ , поэтому с геометрической точки зрения  $f$  — симметрия относительно некоторой прямой; эта прямая однозначно задаёт изоморфизм  $\bar{f}$ .

Овеществление расслоения  $\tau^1$  — это касательное расслоение сферы  $S^2$ . Поэтому если бы расслоения  $\tau^1$  и  $\overline{\tau^1}$  были изоморфны, мы получили бы на  $S^2$  непрерывное поле направлений, чего не может быть. Действительно, непрерывное поле направлений на замкнутом многообразии существует тогда и только тогда, когда на нём существует непрерывное векторное поле без особых точек (задача 18.12 из части I).  $\square$

С сопряжённым расслоением  $\bar{\omega}$  тесно связано *двойственное* расслоение  $\omega^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\omega, \mathbb{C})$ . Если в пространстве  $V$  над  $\mathbb{C}$  задано эрмитово скалярное произведение, для которого  $(\lambda v, \mu w) = \lambda \bar{\mu} (v, w)$ , то формула  $\bar{v} \mapsto \varphi(x) = (x, v)$  задаёт изоморфизм  $\bar{V} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ . Поэтому при

наличии в расслоении  $\omega$  эрмитовой метрики сопряжённое расслоение  $\bar{\omega}$  канонически изоморфно двойственному расслоению  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\omega, \mathbb{C})$ .

**Теорема 11.32.** *Расслоение  $\omega^* \otimes \omega$  имеет ненулевое сечение. В частности, если  $\dim_{\mathbb{C}} \omega = 1$ , то расслоение  $\omega^* \otimes \omega$  тривиально.*

**Доказательство.** Имеет место канонический изоморфизм  $V^* \otimes V \cong \text{Hom}(V, V)$  (см., например, [П2], с. 170). В пространстве  $\text{Hom}(V, V)$  есть выделенный элемент — тождественное отображение. Поэтому расслоение  $\omega^* \otimes \omega$  имеет ненулевое сечение.  $\square$

**Теорема 11.33.** *Справедливо равенство  $c_k(\bar{\omega}) = (-1)^k c_k(\omega)$ .*

**Доказательство.** Если  $\dim \omega = 1$ , то  $c_1(\omega) = e(\omega_{\mathbb{R}})$  и  $c_1(\bar{\omega}) = e(\bar{\omega}_{\mathbb{R}})$ . Ориентации расслоений  $\omega_{\mathbb{R}}$  и  $\bar{\omega}_{\mathbb{R}}$  противоположны, поэтому  $c_1(\bar{\omega}) = -c_1(\omega)$ .

Пусть  $\omega$  — комплексное векторное расслоение размерности  $n$ ,  $f$  — рашепляющее отображение для  $\omega$ . Тогда  $f^*(\omega) = \omega_1 \oplus \dots \oplus \omega_n$ , поэтому

$$\begin{aligned} f^*(c(\bar{\omega})) &= c(f^*(\bar{\omega})) = c(\bar{\omega}_1) \dots c(\bar{\omega}_n) = \\ &= (1 - c_1(\bar{\omega}_1)) \dots (1 - c_1(\bar{\omega}_n)) = \\ &= \sum (-1)^k c_k(f^*(\bar{\omega})) = f^* \left( \sum (-1)^k c_k(\bar{\omega}) \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $f^*$  — мономорфизм, получаем требуемое.  $\square$

**Следствие.** *Если  $\bar{\omega} \cong \omega$ , то  $2c_{2k+1}(\omega) = 0$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\bar{\omega} \cong \omega$ . Тогда  $c_{2k+1}(\omega) = c_{2k+1}(\bar{\omega}) = (-1)^{2k+1} c_{2k+1}(\omega) = -c_{2k+1}(\omega)$ .  $\square$

*Классы Чженя комплексных многообразий* определяются как классы Чженя их касательных расслоений.

Классы Чженя комплексных проективных пространств вычисляются аналогично классам Штифеля—Уитни вещественных проективных пространств (следствие теоремы 11.11).

**Пример 11.16.** *Справедливо равенство  $c(\mathbb{C}P^n) = (1 + \alpha)^{n+1}$ , где  $\alpha$  — образующая группы  $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ , а именно  $\alpha = -c_1(\gamma_n^1)$*

**Доказательство.** Слоем расслоения  $\gamma_n^1$  над точкой  $l \in \mathbb{C}P^n$  является прямая  $l$  в  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Пусть  $\omega^n$  — расслоение над  $\mathbb{C}P^n$ , слоем которого над точкой  $l$  является ортогональное дополнение  $l^\perp$  к прямой  $l$  в  $\mathbb{C}^{n+1}$  относительно эрмитова произведения. Покажем, что  $\tau_{\mathbb{C}P^n} \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_n^1, \omega^n)$ . Действительно, касательный вектор к  $\mathbb{C}P^n$  задаётся парой  $(x, v)$ , где  $x \in l \setminus \{0\}$  и  $v$  — вектор, ортогональный  $x$ ; при этом пары  $(\lambda x, \lambda v)$  для всех  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  задают один и тот же касательный вектор. Поэтому касательный вектор однозначно задаётся линейным отображением  $l \rightarrow l^\perp$ , которое переводит  $x$  в  $v$ .

Расслоение  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$  тривиально, поскольку оно имеет нулевое сечение, соответствующее тождественному отображению. Пусть  $\varepsilon^k$  — триви-

альное  $k$ -мерное расслоение над  $CP^n$ . Тогда  $\tau_{CP^n} \oplus \varepsilon^1 \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_n^1, \omega^n \oplus \gamma_n^1) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1})$ , поэтому расслоение  $\tau_{CP^n} \oplus \varepsilon^1$  изоморфно прямой сумме  $n+1$  экземпляров расслоения  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_n^1, \varepsilon^1) \cong \overline{\gamma_n^1}$ . Согласно теореме 11.33 мы имеем  $c_1(\overline{\gamma_n^1}) = -c_1(\gamma_n^1)$ . Поэтому согласно теоремам 11.25 и 11.24 получаем  $c(CP^n) = (1 - c_1(\overline{\gamma_n^1}))^{n+1} = (1 + \alpha)^{n+1}$ .  $\square$

Каждому векторному пространству  $V$  над  $\mathbb{R}$  можно сопоставить его *комплексификацию*  $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . Как пространство над  $\mathbb{R}$  оно канонически изоморфно пространству, состоящему из векторов  $v + i\omega$ , где  $v, \omega \in V$ . Умножение на  $i$  задаётся формулой  $i(v + i\omega) = i v - \omega$ .

Если  $\xi$  — вещественное расслоение, то можно комплексифицировать каждый его слой. Полученное расслоение будем обозначать  $\xi \otimes \mathbb{C}$ .

**Л е м м а.** *Расслоение  $\xi \otimes \mathbb{C}$  изоморфно сопряжённому расслоению  $\overline{\xi \otimes \mathbb{C}}$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим отображение  $f$ , заданное формулой  $f(v + i\omega) = v - i\omega$ . Легко проверить, что  $f(i(v + i\omega)) = -if(v + i\omega)$ . Поэтому отображение  $f$  задаёт послойный изоморфизм расслоений  $\xi \otimes \mathbb{C}$  и  $\overline{\xi \otimes \mathbb{C}}$ .  $\square$

**С л е д с т в и е.** *Справедливо равенство  $2c_{2k+1}(\xi \otimes \mathbb{C}) = 0$ .*

Для каждого вещественного расслоения  $\xi$  *характеристические классы Понтрягина* определяются следующим образом:

$$p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi \otimes \mathbb{C}) \in H^{4k}(B; \mathbb{Z}).$$

Элементы порядка 2, а именно  $c_{2k+1}(\xi \otimes \mathbb{C})$ , при этом игнорируются. Классы Понтрягина обладают свойством естественности; классы Понтрягина стабильно эквивалентных расслоений одинаковы. Но формула  $p(\xi \oplus \eta) = p(\xi)p(\eta)$  неверна, потому что мы отбросили элементы порядка 2. Верно лишь следующее утверждение.

**Т е о р е м а 11.34.**  $2(p(\xi \oplus \eta) - p(\xi)p(\eta)) = 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Расслоение  $(\xi \oplus \eta) \otimes \mathbb{C}$  изоморфно  $(\xi \otimes \mathbb{C}) \oplus (\eta \otimes \mathbb{C})$ . Поэтому

$$c_k((\xi \oplus \eta) \otimes \mathbb{C}) = \sum_{i+j=k} c_i(\xi \otimes \mathbb{C})c_j(\eta \otimes \mathbb{C}).$$

Отбрасывая нечётномерные классы Чженя, получим

$$2c_{2k}((\xi \oplus \eta) \otimes \mathbb{C}) = 2 \sum_{i+j=k} c_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C})c_{2j}(\eta \otimes \mathbb{C}).$$

Чтобы получить требуемое, умножим обе части на  $(-1)^k = (-1)^i(-1)^j$ .  $\square$

**Теорема 11.35.** Пусть  $\omega$  — комплексное  $n$ -мерное векторное расслоение,  $p_k = p_k(\omega_{\mathbb{R}})$  и  $c_k = c_k(\omega)$ . Тогда

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k p_k = \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k \right) \sum_{k=0}^n c_k.$$

**Доказательство.** По определению  $(-1)^k p_k = c_{2k}(\omega_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C})$ . Поэтому достаточно проверить, что  $\omega_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \cong \omega \oplus \bar{\omega}$ .

Пусть  $W$  — комплексное пространство и  $V = W_{\mathbb{R}}$ . Пространство  $V \otimes \mathbb{C}$  канонически изоморфно пространству  $V \oplus V$ , на котором задана операция  $J(x, y) = (-y, x)$ , соответствующая умножению на  $i$ . В пространстве  $W$  задано умножение на  $i$ , поэтому можно рассмотреть два отображения  $f_{\pm}(x) = (x, \mp ix)$  из  $V$  в  $V \oplus V$ . Легко проверить, что  $f_{\pm}(ix) = \pm J(f_{\pm}(x))$ , т. е. отображение  $f_+$  комплексно-линейное, а отображение  $f_-$  антилинейное. Кроме того,  $V \oplus V = \text{Im } f_+ \oplus \text{Im } f_-$ , поскольку  $(x, y) = f_+\left(\frac{x+iy}{2}\right) + f_-\left(\frac{x-iy}{2}\right)$ . Пространство  $\text{Im } f_+$  канонически изоморфно  $W$ , а пространство  $\text{Im } f_-$  канонически изоморфно  $\bar{W}$ . Такие канонические разложения можно построить для всех слоёв расслоения  $\omega_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ . В результате получим требуемый изоморфизм.  $\square$

**С л е д с т в и е.** Справедливо равенство  $p(\mathbb{C}P^n) = (1 + \alpha^2)^{n+1}$ , где  $\alpha$  — образующая группы  $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ .

**Доказательство.** Пусть  $\tau$  — касательное расслоение  $\mathbb{C}P^n$  как комплексного многообразия,  $\tau_{\mathbb{R}}$  — его овеществление, т. е. касательное расслоение  $\mathbb{C}P^n$  как вещественного многообразия. Мы уже знаем, что  $c(\tau) = (1 + \alpha)^{n+1} = \sum c_k$ . Поэтому  $\sum (-1)^k c_k = (1 - \alpha)^{n+1}$ , а значит,  $\sum (-1)^k p_k(\tau_{\mathbb{R}}) = ((1 - \alpha)(1 + \alpha))^{n+1} = (1 - \alpha^2)^{n+1}$ . А из этого уже следует, что  $\sum p_k(\tau_{\mathbb{R}}) = (1 + \alpha^2)^{n+1}$ .  $\square$

## § 12. Действия групп

### 12.1. Симплициальные действия

Топологическое пространство  $X$  с фиксированным действием группы  $G$  называют  $G$ -пространством. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  двух  $G$ -пространств называют *эквивариантным*, если  $f(g(x)) = g(f(x))$  для всех  $g \in G$  и всех  $x \in X$ .

Пусть  $G$  — конечная группа, действующая на пространстве  $|K|$ , где  $K$  — симплициальный комплекс. Это действие называют *симплициальным*, если для любого  $g \in G$  отображение  $g: |K| \rightarrow |K|$  симплици-

ально. Симплициальный комплекс  $K$  с фиксированным симплициальным действием конечной группы  $G$  называют *симплициальным  $G$ -комплексом*.

Симплициальное отображение симплициальных комплексов индуцирует симплициальное отображение их барицентрических подразделений. Поэтому барицентрическое подразделение симплициального  $G$ -комплекса тоже является симплициальным  $G$ -комплексом.

Для симплициального  $G$ -комплекса  $K$  определим симплициальный комплекс  $K/G$  следующим образом. Вершины комплекса  $K/G$  — это орбиты действия группы  $G$  на множестве вершин комплекса  $K$ , т. е. каждая вершина  $K/G$  имеет вид  $v^* = G(v)$ , где  $v$  — вершина  $K$ . Вершины  $v_0^*, \dots, v_n^*$  являются вершинами симплекса в  $K/G$  тогда и только тогда, когда из орбит  $v_0^*, \dots, v_n^*$  можно выбрать вершины  $v_0, \dots, v_n$ , которые являются вершинами симплекса в  $K$ . В таком случае будем говорить, что симплекс  $[v_0, \dots, v_n]$  лежит *над* симплексом  $[v_0^*, \dots, v_n^*]$ . Отметим, что если из орбит  $v_0^*, \dots, v_n^*$  выбрать другие вершины, то не обязательно получится симплекс.

Сопоставляя вершине  $v$  орбиту  $v^*$ , получаем симплициальное отображение  $K \rightarrow K/G$ , а значит, и непрерывное отображение  $|K| \rightarrow |K/G|$ . На топологическом пространстве  $|K|$  действует группа  $G$ : элемент  $g \in G$  переводит точку  $\sum \lambda_i v_i$  в точку  $\sum \lambda_i g v_i$  (мы пользуемся тем, что  $g$  переводит симплекс в симплекс). Поэтому можно рассмотреть пространство орбит  $|K|/G$ . Сопоставим орбите  $G(\sum \lambda_i v_i)$  точку  $\sum \lambda_i G(v_i) = \sum \lambda_i v_i^*$ . В результате получим отображение  $|K|/G \rightarrow |K/G|$ . Это отображение взаимно однозначно тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: если  $(v_0, \dots, v_n)$  и  $(g_0 v_0, \dots, g_n v_n)$  — два симплекса в  $K$ , то найдётся такой элемент  $g \in G$ , что  $g v_i = g_i v_i$  для  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Многие теоремы о симплициальных  $G$ -комплексах можно доказать лишь в том случае, когда этот  $G$ -комплекс обладает некоторыми дополнительными свойствами. Но, как правило, выполнения этих свойств всегда можно добиться, измельчив триангуляцию (например, перейдя к первому или второму барицентрическому подразделению). К таким свойствам относятся сформулированные ниже свойства (R) и (A).

Симплициальный  $G$ -комплекс  $K$  называют *регулярным*, если для любой подгруппы  $H \subset G$  выполняется следующее свойство (R).

*Пусть  $h_0, \dots, h_n \in H$  и  $[v_0, \dots, v_n], [h_0 v_0, \dots, h_n v_n]$  — два симплекса в  $K$ . Тогда найдётся такой элемент  $h \in H$ , что  $h v_i = h_i v_i$  для  $i = 0, 1, \dots, n$ .*

Будем говорить, что симплициальный  $G$ -комплекс обладает свойством (A), если он обладает любым из двух свойств, сформулированных в условии следующей леммы.

*Лемма.* Для симплициального  $G$ -комплекса  $K$  следующие условия эквивалентны:

1) для любого элемента  $g \in G$  и любого симплекса  $\Delta$  из  $K$  все точки множества  $\Delta \cap g\Delta$  неподвижны относительно действия элемента  $g$ ;

2) если вершины  $v$  и  $gv$  принадлежат одному симплексу, то  $v = gv$ .

*Доказательство.* Предположим, что выполнено условие 1). Пусть вершины  $v$  и  $gv$  принадлежат симплексу  $\Delta$ . Тогда вершины  $g^{-1}v$  и  $v$  принадлежат симплексу  $g^{-1}\Delta$ , поэтому они соединены ребром  $\Delta^1$  (или совпадают). Ясно, что  $v \in \Delta^1 \cap g\Delta^1$ , поэтому  $gv = v$ .

Предположим, что выполнено условие 2). Пусть  $v \in \Delta \cap g\Delta$ . Тогда вершины  $v$  и  $gv$  принадлежат одному симплексу  $\Delta$ , а значит,  $v = gv$ .  $\square$

*Теорема 12.1.* Второе барицентрическое подразделение любого симплициального  $G$ -комплекса является регулярным  $G$ -комплексом.

*Доказательство.* Докажем сначала, что барицентрическое подразделение  $K'$  любого симплициального  $G$ -комплекса  $K$  обладает свойством (A).

Каждой вершине  $v$  комплекса  $K'$  соответствует симплекс  $\Delta(v)$  в  $K$ , внутренней точкой которого она является. При этом вершины  $v_1$  и  $v_2$  принадлежат одному и тому же симплексу из  $K'$  тогда и только тогда, когда один из симплексов  $\Delta(v_1)$  и  $\Delta(v_2)$  является гранью другого. Кроме того,  $\Delta(gv) = g\Delta(v)$ ; в частности, размерности симплексов  $\Delta(v)$  и  $\Delta(gv)$  равны. Поэтому если вершины  $v$  и  $gv$  лежат в  $K'$  в одном и том же симплексе, то один из симплексов  $\Delta(v)$  и  $\Delta(gv)$  является гранью другого и при этом их размерности равны. Следовательно,  $\Delta(v) = \Delta(gv)$ , а значит,  $v = gv$ .

Докажем теперь, что если симплициальный  $G$ -комплекс  $K$  обладает свойством (A), то его барицентрическое подразделение  $K'$  обладает свойством (R).

Применим индукцию по  $n$ . Предположим, что  $[v_0, \dots, v_n]$  и  $[h_0v_0, \dots, h_nv_n]$  — симплексы в  $K'$  и свойство (R) выполняется для  $(n-1)$ -мерных симплексов,  $n \geq 1$  (для нульмерных симплексов свойство (R) выполняется всегда). Изменив нумерацию вершин, можно считать, что  $\Delta(v_0) \subset \Delta(v_1) \subset \dots \subset \Delta(v_n)$ , т. е.  $v_0$  — вершина симплекса из  $K$ ,  $v_1$  — середина ребра и т. д. Согласно предположению индукции найдётся такой элемент  $h \in H$ , что  $hv_i = h_iv_i$  при  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Покажем, что  $h_nv_i = h_iv_i$  при всех  $i$ . При  $i = n$  равенство очевидно, поэтому его нужно проверить для  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Под действием элемента  $h^{-1}$  симплекс  $[h_0v_0, \dots, h_nv_n]$  переходит в симплекс  $[v_0, \dots, v_{n-1}, h^{-1}h_nv_n]$ . При этом

$$\Delta(v_0) \subset \Delta(v_1) \subset \dots \subset \Delta(v_{n-1}) \subset \Delta(h^{-1}h_nv_n) = h^{-1}h_n\Delta(v_n).$$



Следовательно,  $\Delta(v_{n-1}) \subset \Delta(v_n) \cap h^{-1}h_n\Delta(v_n)$ . Согласно свойству (А) все точки  $(n-1)$ -мерного симплекса  $\Delta(v_{n-1})$  неподвижны относительно действия элемента  $h^{-1}h_n$ . Поэтому  $h^{-1}h_nv_i = v_i$  при  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Следовательно,  $h_nv_i = hv_i = h_iv_i$ , что и требовалось.  $\square$

Итак, после измельчения триангуляции комплекса  $K$  можно отождествить множества  $|K|/G$  и  $|K/G|$ . При таком отождествлении естественные топологии этих множеств совпадают, т. е. отображение  $|K|/G \rightarrow |K/G|$  — гомеоморфизм. Действительно, симплициальное отображение  $K \rightarrow K/G$  сюръективно, поэтому множество открыто в  $|K/G|$  тогда и только тогда, когда его прообраз открыт в  $|K|$ . На пространстве орбит  $|K|/G$  топология такова: множество открыто в  $|K|/G$  тогда и только тогда, когда его прообраз открыт в  $|K|$ . Остаётся заметить, что композиция отображений  $|K| \rightarrow |K|/G \rightarrow |K/G|$  совпадает с отображением  $|K| \rightarrow |K/G|$ .

## 12.2. Эквивариантная симплициальная аппроксимация

Будем говорить, что симплициальный  $G$ -комплекс  $L$  обладает свойством (I), если из того, что  $g(\Delta) = \Delta$  для некоторого симплекса  $\Delta$  в  $L$ , следует, что ограничение действия элемента  $g$  на  $\Delta$  — тождественное отображение.

Барицентрическое подразделение  $K'$  любого симплициального  $G$ -комплекса  $K$  обладает свойством (I). Это общее свойство симплициальных отображений (часть I, теорема 8.3).

*Теорема 12.2. Пусть  $K$  и  $L$  — симплициальные  $G$ -комплексы, причём  $L$  обладает свойством (I). Тогда для любого непрерывного отображения  $f: |K| \rightarrow |L|$  существует эквивариантная симплициальная аппроксимация  $\varphi: K^{(n)} \rightarrow L$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\psi: K^{(n)} \rightarrow L$  — произвольная симплициальная аппроксимация отображения  $f$ . Определим эквивариантное симплициальное отображение  $\varphi: K^{(n)} \rightarrow L$  следующим образом. Каждой вершине  $v \in K^{(n)}$  сопоставим её орбиту  $\{g(v) \mid g \in G\}$ . Орбиты двух вершин либо совпадают, либо не пересекаются. Выберем в каждой орбите одну вершину  $v$ . Для неё положим  $\varphi(v) = \psi(v)$ , а для всех остальных вершин из той же самой орбиты положим  $\varphi(g(v)) = g(\varphi(v)) = g(\psi(v))$ . Прежде всего нужно проверить, что это определение корректно, т. е. если  $g_1(v) = g_2(v)$ , то  $g_1(\psi(v)) = g_2(\psi(v))$ . Эквивалентное условие таково: если  $g(v) = v$ , то  $g(\psi(v)) = \psi(v)$ ; здесь  $g = g_1^{-1}g_2$ . Для доказательства воспользуемся свойством (I). Пусть  $\Delta$  — симплекс в  $L$ , внутренней точкой которого является точка  $f(v)$ . Точка  $g(f(v)) = f(g(v)) = f(v)$  тоже является внутренней точкой симплекса  $\Delta$ , поэтому  $g(\Delta) = \Delta$ . В таком случае согласно свойству (I) мы имеем  $g|_{\Delta} = \text{id}_{\Delta}$ . Но  $\psi$  — симплициальная

аппроксимация отображения  $f$ , поэтому  $\psi(v) \in \Delta$ , а значит,  $g(\psi(v)) = \psi(v)$ .

Остаётся проверить, что  $\varphi$  — симплициальная аппроксимация отображения  $f$ , т. е.  $f(\text{st } v) \subset \text{st } \varphi(v)$  для любой вершины  $v \in K^{(n)}$ . Если  $v$  — выбранная точка для данной орбиты, то  $\varphi(v) = \psi(v)$  и  $f(\text{st } v) \subset \text{st } \varphi(v)$ , поскольку  $\psi$  — симплициальная аппроксимация отображения  $f$ . Для любого элемента  $g \in G$  симплициальное отображение  $g$  взаимно однозначно, поэтому  $\text{st } g(v) = g(\text{st } v)$ , где  $v$  — вершина комплекса  $K^{(n)}$  или  $L$ . Таким образом, если  $f(\text{st } v) \subset \text{st } \varphi(v)$ , то  $f(\text{st } g(v)) = f(g(\text{st } v)) = g(f(\text{st } v)) \subset g(\text{st } \varphi(v)) = \text{st}(g\varphi(v)) = \text{st } \varphi(g(v))$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Построенное отображение  $\varphi$  эквивариантно гомотопно  $f$ , т. е. гомотопно в классе эквивариантных отображений. Гомотопия строится обычным образом (точки  $\varphi(x)$  и  $f(x)$  лежат в одном и том же симплексе, поэтому их можно соединить отрезком).

### 12.3. Неподвижные точки и неподвижные симплексы

Для  $G$ -пространства  $X$  положим  $X^G = \{x \in X \mid gx = x \forall g \in G\}$ , т. е.  $X^G$  — множество точек, неподвижных относительно действия группы  $G$ . Для симплициального  $G$ -комплекса  $K$  обозначим через  $K^G$  подкомплекс в  $K$ , состоящий из симплексов, поточечно неподвижных относительно действия группы  $G$ . Ясно, что  $|K^G| \subset |K|^G$ . Точка  $x$  принадлежит множеству  $|K|^G \setminus |K^G|$  тогда и только тогда, когда она лежит внутри симплекса  $\Delta = [v_0, \dots, v_n]$ ,  $gx = x$  для всех  $g \in G$ , но  $gv_i \neq v_i$  для некоторого  $i$  и некоторого  $g \in G$ . Если внутренняя точка симплекса  $\Delta$  неподвижна относительно действия элемента  $g$ , то  $g\Delta = \Delta$ . В частности, если симплициальный  $G$ -комплекс  $K$  обладает свойством (А), то  $|K^G| = |K|^G$ . Напомним, что свойством (А) обладает барицентрическое подразделение любого симплициального  $G$ -комплекса. Поэтому после измельчения разбиения всегда можно считать, что  $|K^G| = |K|^G$ .

**Т е о р е м а 12.3.** Пусть  $K$  — симплициальный  $\mathbb{Z}_n$ -комплекс, обладающий свойством (А)\*,  $g$  — образующая группы  $\mathbb{Z}_n$ . Тогда  $\chi(K^G) = \Lambda(g)$ , где  $\Lambda(g)$  — число Лефшеца отображения  $g: |K| \rightarrow |K|$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** (см. [We3]). Представим  $C_k(K; \mathbb{R})$  в виде  $V_k \oplus W_k$ , где  $V_k = C_k(K^G; \mathbb{R})$ , а базисом пространства  $W_k$  служат симплексы, не принадлежащие  $K^G$ . По определению  $\chi(K^G) = \sum (-1)^k \dim V_k$  и  $\Lambda(g) = \sum (-1)^k \text{tr } g_k$ , где отображение  $g_k: C_k(K; \mathbb{R}) \rightarrow C_k(K; \mathbb{R})$  индуцировано действием элемента  $g$  на  $k$ -мерных симплексах. Из свойства (А) следует, что если  $g\Delta = \Delta$ , то  $\Delta \in K^G$ . Поэтому если записать мат-

\* Свойство (А) сформулировано на с. 190. Напомним, что барицентрическое подразделение любого симплициального  $G$ -комплекса обладает свойством (А).

рицу отображения  $g_k$  относительно естественного базиса пространства  $V_k \oplus W_k$ , то первые  $\dim V_k$  диагональных элементов этой матрицы будут равны 1, а все остальные диагональные элементы будут равны 0. Следовательно,  $\text{tr } g_k = \dim V_k$ .  $\square$

Действие группы  $G$  на пространстве  $X$  называют *эффeктивным*, если для любого элемента  $g \in G$ , отличного от единичного элемента, найдётся точка  $x \in X$ , для которой  $gx \neq x$ .

**Теорема 12.4 (Минковский).** Пусть  $M$  — триангулированная сфера с  $n$  ручками,  $n \geq 2$ , на которой эффeктивно (и симплициально) действует конечная группа  $G$ , причём выполняется свойство (A). Тогда для любого элемента  $g \in G$ , отличного от единичного элемента, отображение  $g_*: H_1(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{R})$  не тождественно.

**Доказательство** (см. [We3]). Покажем, что множество точек многообразия  $M$ , неподвижных относительно действия подгруппы  $\mathbb{Z}_m \subset G$ , порождённой элементом  $g$ , представляет собой объединение нескольких изолированных точек и непересекающихся окружностей. Во-первых, эффeктивное действие на  $M$  не может иметь неподвижных двумерных симплексов, потому что двумерные симплексы, имеющие общее ребро с неподвижным симплексом, тоже должны быть неподвижными (свободная вершина может перейти только сама в себя). Во-вторых, если  $v$  — неподвижная вершина, то либо она является изолированной неподвижной точкой, либо из неё выходят ровно два неподвижных ребра. Действительно, пусть  $v_1, \dots, v_m$  — вершины, соседние с  $v$ , занумерованные по порядку (например, по часовой стрелке). Предположим, что  $gv_1 = v_k$ . Тогда  $gv_2 = v_{k+1}$  или  $gv_2 = v_{k-1}$ . В первом случае  $gv_i = v_{k-1+i}$ , а во втором случае  $gv_i = v_{k+1-i}$ . В первом случае внутри многоугольника  $v_1 \dots v_m$  неподвижна только точка  $v$ , а во втором случае есть два неподвижных отрезка, соединяющих  $v$  либо с некоторой вершиной  $v_j$ , либо с серединой некоторого ребра  $v_j v_{j+1}$ . Свойство (A) исключает второй вариант.

Предположим, что отображение  $g_*$  тождественное. Тогда  $\Lambda(g) = \chi(M) = 2 - 2n < 0$ , поскольку  $n > 1$ . С другой стороны, согласно теореме 12.3 мы имеем  $\Lambda(g) = \chi(M^{\mathbb{Z}_m})$ , а  $\chi(M^{\mathbb{Z}_m}) \geq 0$ , поскольку  $M^{\mathbb{Z}_m}$  состоит из нескольких изолированных точек и попарно не пересекающихся окружностей.  $\square$

## 12.4. Трансфер

Пусть  $G$  — конечная группа,  $K$  — регулярный симплициальный  $G$ -комплекс,  $C_*(K)$  — симплициальный цепной комплекс. Зададим на  $C_*(K)$  действие группы  $G$ , положив  $g[v_0, \dots, v_n] = [gv_0, \dots, gv_n]$ . Рассмотрим гомоморфизм  $\sigma: C_*(K) \rightarrow C_*(K)$ , переводящий цепь  $c$  в  $\sum_{g \in G} gc$ .

Если подкомплекс  $L \subset K$  инвариантен относительно действия группы  $G$ , то действие группы  $G$  можно перенести на  $C_*(K, L) = C_*(K)/C_*(L)$ . В этом случае гомоморфизм  $\sigma: C_*(K, L) \rightarrow C_*(K, L)$  определяется аналогично.

Пусть  $p: K \rightarrow K/G$  — каноническая проекция (она является симплициальным отображением). Отображение  $p$  индуцирует цепное отображение  $p_\#: C_*(K, L) \rightarrow C_*(K/G, L/G)$ .

**Теорема 12.5.** *Пусть подкомплекс  $L \subset K$  инвариантен относительно действия группы  $G$ . Тогда  $\text{Кег } \sigma = \text{Кег } p_\#$ .*

**Доказательство.** Прежде всего покажем, что из условия регулярности комплекса  $K$  следует свойство (А). Предположим, что вершины  $v$  и  $gv$  принадлежат одному симплексу. Тогда  $[v, v]$  и  $[v, gv]$  — симплексы в  $K$ . Согласно условию регулярности  $v = g'v$  и  $gv = g'v$  для некоторого элемента  $g' \in G$ . Таким образом,  $v = g'v = gv$ , что и требовалось.

Рассмотрим в  $K/G$  симплекс  $\Delta^k$ . Пусть  $\Delta_1^k, \dots, \Delta_n^k$  — симплексы из  $K$ , лежащие над  $\Delta^k$ . Из условия регулярности следует, что эти симплексы можно ориентировать согласованно с  $\Delta^k$ , т.е. так, чтобы проекция  $p_i: \Delta_i^k \rightarrow \Delta^k$  сохраняла ориентацию. Действительно, из условия регулярности следует свойство (А). Поэтому если  $g[v_0, \dots, v_n] = [v_0, \dots, v_n]$ , то все точки симплекса  $[v_0, \dots, v_n]$  неподвижны относительно действия элемента  $g$ ; в частности,  $g$  сохраняет ориентацию симплекса  $[v_0, \dots, v_n]$ .

Пусть  $c = \sum_{i=1}^n a_i \Delta_i^k$ . Тогда  $p_\# c = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \Delta^k$  и  $\sigma c = \frac{|G|}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \Delta_i^k \right)$ ;

второе равенство следует из того, что  $\sum_{g \in G} g \Delta_j^k = \frac{|G|}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^k$ . При вычислении  $\text{Кег } \sigma$  и  $\text{Кег } p_\#$  нужно разбить каждую цепь на слагаемые вида  $\sum_{i=1}^n a_i \Delta_i^k$ ; цепь лежит в ядре тогда и только тогда, когда каждое её слагаемое такого вида лежит в ядре. Для таких слагаемых условия принадлежности ядра почти одинаковые:  $\frac{|G|}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) = 0$  и  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ ; для целочисленных коэффициентов  $a_i$  эти условия в точности одинаковые. □

**З а м е ч а н и е.** Если вместо группы коэффициентов  $\mathbb{Z}$  рассматривать произвольную группу коэффициентов  $A$ , то теорема 12.5 остаётся верной в том случае, когда в  $A$  нет элемента  $a$ , для которого  $|G|a = 0$ .

Отображение  $p_\#: C_*(K, L) \rightarrow C_*(K/G, L/G)$  эпиморфно, поэтому  $C_*(K/G, L/G) \cong C_*(K, L)/\text{Кег } p_\# = C_*(K, L)/\text{Кег } \sigma \cong \sigma C_*(K, L)$ , т.е. мы получаем канонический цепной изоморфизм  $\mu: C_*(K/G, L/G) \rightarrow \sigma C_*(K, L)$ . Композиция этого гомоморфизма и включения  $\sigma C_*(K, L) \subset C_*(K, L)$

индуцирует гомоморфизм  $\mu_*: H_*(K/G, L/G) \rightarrow H_*(K, L)$ , называемый *трансфером*. Ясно также, что отображение  $p$  индуцирует гомоморфизм  $p_*: H_*(K, L) \rightarrow H_*(K/G, L/G)$ . Выясним, как устроены композиции гомоморфизмов  $p_*\mu_*$  и  $\mu_*p_*$ .

Непосредственно из определения видно, что  $\mu p_{\#}c = \sigma c$ , поэтому  $\mu_*p_* = \sum_{g \in G} g_*$ , где отображение  $g_*: H_*(K, L) \rightarrow H_*(K, L)$  индуцировано действием элемента  $g$ . Кроме того, любой элемент  $\tilde{c} \in C_*(K/G, L/G)$  можно представить в виде  $\tilde{c} = p_{\#}c$ , где  $c \in C_*(K, L)$ . Поэтому  $\mu\tilde{c} = \mu p_{\#}c = \sigma c$ , а значит,  $p_{\#}\mu\tilde{c} = p_{\#}\sigma c = |G|p_{\#}c = |G|\tilde{c}$ . Таким образом,  $p_*\mu_*$  — умножение на  $|G|$ .

Любая цепь  $\sigma c = \sum_{g \in G} gc$  инвариантна относительно действия группы  $G$ .

Поэтому  $\text{Im } \mu \subset C_*(K, L)^G$  и  $\text{Im } \mu_* \subset H_*(K, L)^G$ . Ясно, что ограничение отображения  $\mu_*p_*$  на  $H_*(K, L)^G$  представляет собой сумму  $|G|$  тождественных отображений, т. е. тоже является умножением на  $|G|$ . Воспользовавшись замечанием после теоремы 12.5, получаем следующее утверждение.

**Теорема 12.6.** Пусть  $F$  — поле, характеристика которого взаимно проста с  $|G|$  или равна нулю. Тогда отображения

$$p_*: H_*(K, L; F)^G \rightarrow H_*(K/G, L/G; F)$$

и

$$\mu_*: H_*(K/G, L/G; F) \rightarrow H_*(K, L; F)^G$$

— изоморфизмы. Кроме того, ядро гомоморфизма  $p_*: H_*(K, L; F) \rightarrow H_*(K/G, L/G; F)$  совпадает с ядром отображения  $\sigma_*$ .

Покажем, что в теореме 12.6 нельзя отбросить условие взаимной простоты  $|G|$  и характеристики поля коэффициентов  $F$ . Рассмотрим в качестве примера линзу  $L(p, q)$ . В этом случае  $K = S^3$  — регулярный  $G$ -комплекс, где  $G = \mathbb{Z}_p$ ,  $L(p, q) = K/G$ . Из формулы универсальных коэффициентов легко выводится, что если  $p'$  — простое число, то при  $k = 1$  и  $2$  имеет место изоморфизм

$$H_k(L(p, q); \mathbb{Z}_{p'}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{p'}, & \text{если } p \text{ делится на } p'; \\ 0, & \text{если } p \text{ не делится на } p'. \end{cases}$$

Таким образом, если  $p = |G|$  делится на  $p'$ , то группы  $H_k(L(p, q); \mathbb{Z}_{p'})$  и  $H_k(S^3; \mathbb{Z}_{p'})^G = 0$  не изоморфны.

Теорема 12.6 естественным образом переносится и на группы когомологий.

## 12.5. Теория Смита

Здесь мы будем рассматривать случай, когда  $G = \mathbb{Z}_p$ , причём  $p$  — простое число. (Отметим, что в приложениях интересен даже самый простой случай  $p = 2$ .) Гомологии и когомологии тоже будем рассматривать только с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_p$ .

Пусть  $K$  — регулярный  $G$ -комплекс,  $L$  — инвариантный подкомплекс. Цепи из  $C_*(K, L; \mathbb{Z}_p)$  можно умножать на элементы *группового кольца*  $\mathbb{Z}_p G$ , состоящего из формальных сумм  $\sum a_i g_i$ , где  $a_i \in \mathbb{Z}_p$  и  $g_i \in G = \mathbb{Z}_p$ . Пусть  $g$  — фиксированная образующая группы  $G$  (т. е. любой ненулевой элемент). Для группы  $G$  мы будем использовать мультипликативные обозначения, т. е. будем считать, что  $G$  состоит из элементов  $\{1, g, \dots, g^{p-1}\}$ . Рассмотрим в групповом кольце  $\mathbb{Z}_p G$  элементы  $\sigma = 1 + g + \dots + g^{p-1}$  и  $\tau = 1 - g$ . Из равенства  $g^p = 1$  следует, что  $\sigma\tau = 0$ .

Проверим теперь, что  $\tau^{p-1} = \sigma$ , т. е.  $(-1)^k \binom{p-1}{k} \equiv 1 \pmod{p}$ . В самом деле,  $(1-p)(2-p)\dots(k-p) \equiv 1 \cdot 2 \dots k \pmod{p}$ , поэтому

$$\frac{1 \cdot 2 \dots (p-k-1) \cdot (-1)^k (p-k) \dots (p-1)}{1 \cdot 2 \dots (p-k-1) \cdot 1 \cdot 2 \dots k} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Для элементов вида  $\rho = \tau^k$  введём обозначение  $\bar{\rho} = \tau^{p-k}$ . В частности,  $\tau = \bar{\sigma}$  и  $\sigma = \bar{\tau}$ . Для каждого  $\rho = \tau^k$ ,  $1 \leq k \leq p-1$ , рассмотрим цепной подкомплекс  $\rho C_*(K, L; \mathbb{Z}_p) \subset C_*(K, L; \mathbb{Z}_p)$ . В дальнейших обозначениях группу коэффициентов  $\mathbb{Z}_p$  будем опускать.

**Теорема 12.7.** *Для любого  $\rho = \tau^k$ ,  $1 \leq k \leq p-1$ , последовательность цепных комплексов*

$$0 \longrightarrow \bar{\rho} C_*(K, L) \oplus C_*(K^G, L^G) \xrightarrow{i} C_*(K, L) \xrightarrow{\rho \times} \rho C_*(K, L) \longrightarrow 0$$

*точна. (Здесь  $i$  — сумма естественных включений,  $\rho \times$  — умножение на  $\rho$ .)*

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что включение  $C_*(K^G, L^G) \rightarrow C_*(K, L)$  определено корректно, поскольку  $L^G = L \cap K^G$ .

Нас интересуют только симплексы из  $K \setminus L$ . Предположим, что  $\Delta \subset K^G$ . Тогда  $\tau\Delta = 0$ , поэтому  $\rho\Delta = 0$  и  $\bar{\rho}\Delta = 0$ . Это, в частности, означает, что отображение  $i$  переводит  $\bar{\rho} C_*(K, L) \oplus 0$  и  $0 \oplus C_*(K^G, L^G)$  в подпространства, которые пересекаются только по нулю. Кроме того, отображение  $\rho \times$  переводит подпространство  $C_*(K^G, L^G) \subset C_*(K, L)$  в нуль. Поэтому достаточно проверить точность для цепей вида  $\sum a_i g^i \Delta$ , где  $\Delta \notin K^G$ . При фиксированном  $\Delta$  цепь такого вида однозначно задаётся элементом  $\sum a_i g^i \in \Lambda$ , где  $\Lambda = \mathbb{Z}_p G$  — групповое кольцо. Поэтому остаётся проверить

точность последовательности

$$0 \longrightarrow \bar{\rho}\Lambda \xrightarrow{i} \Lambda \xrightarrow{\rho \times} \rho\Lambda \longrightarrow 0.$$

Ясно, что  $i$  — мономорфизм, а  $\rho \times$  — эпиморфизм. Поэтому нужно лишь проверить, что  $\dim(\rho\Lambda) + \dim(\bar{\rho}\Lambda) = \dim \Lambda = p$  (имеется в виду размерность над полем  $\mathbb{Z}_p$ ). Напомним, что  $\rho = \tau^k$ , где  $1 \leq k \leq p-1$ , и  $\bar{\rho} = \tau^{p-k}$ . Покажем, что  $\dim(\tau^k\Lambda) = p-k$ . Ядро отображения  $\tau$  состоит из элементов  $\sum a_i g^i$ , для которых  $\sum a_i g^i = \sum a_i g^{i+1}$ . Это означает, что  $a_i = a_{i+1} = \dots$ , т. е. ядро порождено одним элементом  $\sigma = 1 + g + \dots + g^{p-1}$ . Поэтому  $\dim(\tau\Lambda) = p-1$ . Кроме того,  $\sigma = \tau^{p-1} = \tau^k \tau^{p-k-1}$ , поэтому  $\text{Кер } \tau = \langle \sigma \rangle \subset \tau\Lambda$ . Следовательно,  $\dim(\tau^{k+1}\Lambda) = \dim \tau(\tau^k\Lambda) = \dim(\tau^k\Lambda) - 1$ .  $\square$

Группы гомологий  $H_*^\rho(K, L; \mathbb{Z}_p) = H_*(\rho C_*(K, L; \mathbb{Z}_p))$  называют *гомологическими группами Смита*. Короткая точная последовательность из теоремы 12.7 индуцирует точную последовательность гомологий

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_q^{\bar{\rho}}(K, L) \oplus H_q(K^G, L^G) \xrightarrow{i_*} H_q(K, L) \xrightarrow{(\rho \times)_*} H_q^\rho(K, L) \xrightarrow{d_*} \\ \xrightarrow{d_*} H_{q-1}^{\bar{\rho}}(K, L) \oplus H_{q-1}(K^G, L^G) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Её называют *точной последовательностью Смита*. Обычно точную последовательность Смита используют для  $\rho = \sigma$  и для  $\rho = \tau$ .

Для гомологических групп Смита можно построить ещё один набор точных последовательностей (для каждого  $k = 1, \dots, p-2$ ). Рассуждения, приведённые в конце доказательства теоремы 12.7, показывают, что последовательность

$$0 \longrightarrow \sigma\Lambda \xrightarrow{i} \tau^k\Lambda \xrightarrow{\tau \times} \tau^{k+1}\Lambda \longrightarrow 0 \quad (1)$$

точна. Это следует из того, что  $\sigma = \tau^{p-1}$  и  $\dim(\tau^k\Lambda) = p-k$ . Отметим, что при  $k = p-1$  последовательность (1) вырождается:  $0 \rightarrow \sigma\Lambda \rightarrow \sigma\Lambda \rightarrow 0 \rightarrow 0$ . Из короткой точной последовательности (1) получаем точную последовательность гомологий

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_q^\sigma(K^G, L^G) \xrightarrow{i_*} H_q^{\tau^k}(K, L) \xrightarrow{(\tau \times)_*} \\ \xrightarrow{(\tau \times)_*} H_q^{\tau^{k+1}}(K, L) \xrightarrow{d_*} H_{q-1}^\sigma(K^G, L^G) \longrightarrow \dots \quad (2) \end{aligned}$$

Пусть  $K$  — конечный симплициальный комплекс,  $L$  — его подкомплекс. Назовём *эйлеровой характеристикой* пары  $(K, L)$  число  $\chi(K, L) = \sum (-1)^i \dim H_i(K, L; F)$ , где  $F$  — некоторое поле. Как и для обычной эйлеровой характеристики, число  $\chi(K, L)$  не зависит от выбора поля  $F$ .

Теорема 12.8. а) Для любого целого  $n \geq 0$  выполняется неравенство

$$\dim H_n^p(K, L) + \sum_{i \geq n} \dim H_n(K^G, L^G) \leq \sum_{i \geq n} \dim H_n(K, L).$$

б)  $\chi(K^G, L^G) \equiv \chi(K, L) \pmod{p}$ .

Доказательство. а) Пусть  $a_i = \dim H_i(K^G, L^G)$ ,  $b_i = \dim H_i(K, L)$ ,  $c_i = \dim H_i^p(K, L)$  и  $\bar{c}_i = \dim H_i^{\bar{p}}(K, L)$ . Из точной последовательности Смита

$$H_{i+1}^p(K, L) \longrightarrow H_i^{\bar{p}}(K, L) \oplus H_i(K^G, L^G) \longrightarrow H_i(K, L)$$

следует неравенство  $\bar{c}_i + a_i \leq c_{i+1} + b_i$ . Если записать последовательность Смита для  $\bar{p}$ , аналогично получим  $c_i + a_i \leq \bar{c}_{i+1} + b_i$ . Рассмотрим последовательность неравенств

$$\begin{aligned} c_n + a_n &\leq \bar{c}_{n+1} + b_n, \\ \bar{c}_{n+1} + a_{n+1} &\leq c_{n+2} + b_{n+1}, \\ c_{n+2} + a_{n+2} &\leq \bar{c}_{n+3} + b_{n+2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что симплициальный комплекс  $K$  конечный, поэтому эта последовательность неравенств конечная (т. е. неравенства с большими номерами имеют вид  $0 \leq 0$ ). Сложив все неравенства, получим требуемое.

б) Точную последовательность пространств  $0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_n \rightarrow 0$  можно представить в виде прямой суммы коротких точных последовательностей  $0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow V_{i-1}^\alpha \rightarrow V_i^\alpha \rightarrow V_{i+1}^\alpha \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0$ . Для каждой короткой точной последовательности выполняется равенство  $\sum (-1)^i \dim V_i^\alpha = 0$ , поэтому  $\sum (-1)^i \dim V_i = 0$ . Таким образом, если для пространств  $A_i, B_i, C_i$  имеет место точная последовательность  $0 \rightarrow A_0 \rightarrow B_0 \rightarrow C_0 \rightarrow A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_n \rightarrow 0$ , то  $\sum (-1)^i \dim A_i + \sum (-1)^i \dim C_i = \sum (-1)^i \dim B_i$ . Поэтому из точной последовательности Смита следует, что

$$\chi(\bar{p}) + \chi(K^G, L^G) + \chi(p) = \chi(K, L), \tag{3}$$

где  $\chi(p) = \sum (-1)^i \dim H_i^p(K, L)$ .

Аналогично из точной последовательности (2) получаем

$$\chi(\sigma) + \chi(\tau^{k+1}) = \chi(\tau^k), \quad k = 1, \dots, p - 2. \tag{4}$$

Сложим равенства (4) для  $k = 1, \dots, p - 2$ . В результате получим  $(p - 2)\chi(\sigma) + \chi(\tau^{p-1}) = \chi(\tau)$ . Но  $\sigma = \tau^{p-1}$ , поэтому  $\chi(\tau) = (p - 1)\chi(\sigma)$ .



Запишем равенство (3) для  $\rho = \tau$ :

$$\chi(\sigma) + \chi(\tau) + \chi(K^G, L^G) = \chi(K, L).$$

Таким образом,  $\chi(K, L) = p\chi(\sigma) + \chi(K^G, L^G) \equiv \chi(K^G, L^G) \pmod{p}$ .  $\square$

Теорема 12.8 позволяет наложить существенные ограничения на то, какими могут быть множества неподвижных точек для действия группы  $\mathbb{Z}_p$  на сферах и дисках. При этом используется только информация о гомологиях, т. е. эти рассуждения можно применить к гомологическим сферам и дискам. Симплициальный комплекс  $K$  называют  $r$ -мерной *гомологической  $\mathbb{Z}_p$ -сферой*, если  $H_i(K; \mathbb{Z}_p) \cong H_i(S^r; \mathbb{Z}_p)$  для всех  $i$ . Пару  $(K, L)$  называют  $r$ -мерным *гомологическим  $\mathbb{Z}_p$ -диском*, если  $H_i(K, L; \mathbb{Z}_p) \cong H_i(D^r, S^{r-1}; \mathbb{Z}_p)$  для всех  $i$ .

Теорема 12.9 (Смит [Sm]). Пусть  $G = \mathbb{Z}_p$  ( $p$  — простое число),  $K$  — регулярный  $G$ -комплекс,  $L$  — его инвариантный подкомплекс.

а) Если  $K$  —  $n$ -мерная  $\mathbb{Z}_p$ -гомологическая сфера, то  $K^G$  —  $r$ -мерная  $\mathbb{Z}_p$ -гомологическая сфера, причём  $-1 \leq r \leq n$ . (Подразумевается, что сфера размерности  $-1$  — пустое множество.) Если  $p > 2$ , то  $r \equiv n \pmod{2}$ .

б) Если пара  $(K, L)$  —  $n$ -мерный  $\mathbb{Z}_p$ -гомологический диск, то  $(K^G, L^G)$  —  $r$ -мерный  $\mathbb{Z}_p$ -гомологический диск, причём  $-1 \leq r \leq n$ . Если  $p > 2$ , то  $r \equiv n \pmod{2}$ .

Доказательство (см. [Fl]). а) Применим теорему 12.8 в случае  $L = \emptyset$ . В результате получим  $\sum_{i \geq 0} \dim H_i(K^G) \leq \sum_{i \geq 0} \dim H_i(K) = 2$  и  $\chi(K^G) \equiv \chi(K) \pmod{p}$ . Мы знаем, что  $\chi(K) = 0$  или  $2$ . Поэтому равенство  $\sum_{i \geq 0} \dim H_i(K^G) = 1$  выполняться не может. Следовательно,  $\sum_{i \geq 0} \dim H_i(K^G) = 0$  или  $2$ . В первом случае  $K^G = \emptyset$ , во втором случае  $K^G$  —  $\mathbb{Z}_p$ -гомологическая сфера некоторой неотрицательной размерности  $r$ .

Неравенство  $r \leq n$  следует из того, что

$$\sum_{i \geq n+1} \dim H_i(K^G) \leq \sum_{i \geq n+1} \dim H_i(K) = 0.$$

Если  $p > 2$ , то из сравнения  $\chi(K^G) \equiv \chi(K) \pmod{p}$ , т. е.  $(-1)^r + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod{p}$ , следует, что  $r \equiv n \pmod{2}$ .

б) Для гомологических дисков доказательство ещё проще. Достаточно воспользоваться тем, что  $\sum_{i \geq 0} \dim H_i(K^G, L^G) \leq \sum_{i \geq 0} \dim H_i(K, L) = 1$  и  $\sum_{i \geq n+1} \dim H_i(K^G, L^G) \leq \sum_{i \geq n+1} \dim H_i(K, L) = 0$ .  $\square$

Действие группы  $G$  на топологическом пространстве  $X$  называют *свободным*, если  $gx \neq x$  для любой точки  $x \in X$  и любого элемента  $g \in G$ ,  $g \neq e$ .

**Задача 12.1** (Смит). Докажите, что конечная\*) группа не может свободно действовать на  $\mathbb{R}^n$ .

**Упражнение.** Докажите, что если  $G = \mathbb{Z}_p$  ( $p$  — простое число) и  $K$  — ацикличный регулярный  $G$ -комплекс, то  $K^G$  — ацикличный комплекс. (В частности,  $K^G \neq \emptyset$ .)

### § 13. Квадраты Стинрода

Здесь строятся квадраты Стинрода и доказываются некоторые их свойства. Квадраты Стинрода нам понадобятся в п. 16.2 для доказательства формул Тома и Ву и доказательства теоремы Штифеля о параллелизуемости ориентируемых трёхмерных многообразий.

#### 13.1. Построение квадратов Стинрода

Квадраты Стинрода — это дополнительные алгебраические операции на кольце когомологий, обобщающие сур-произведение. Напомним, что сур-произведение можно построить, используя произвольную диагональную аппроксимацию  $D_0: C_*(K) \rightarrow C_*(K) \otimes C_*(K)$ , переводящую вершину  $v$  в  $v \otimes v$ . Диагональная аппроксимация не единственна. В случае, когда  $K$  представляет собой одномерный симплекс, две диагональные аппроксимации  $D_0$  и  $TD_0$  изображены на рис. 36. Диагональная аппроксимация  $TD_0$  симметрична  $D_0$  относительно диагонали. Формально симметрию относительно диагонали можно определить следующим образом. Рассмотрим на  $C_*(K) \otimes C_*(K)$  цепное преобразование  $T$ , заданное формулой  $T(\sigma^p \otimes \tau^q) = (-1)^{pq} \tau^q \otimes \sigma^p$ ; знак выбран так, чтобы отображение было цепным. Диагональная аппроксимация  $TD_0$  — это композиция диагональной аппроксимации  $D_0$  и цепного преобразования  $T$ .

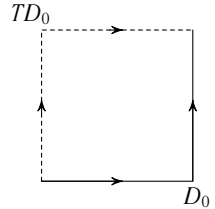


Рис. 36. Две диагональные аппроксимации

Диагональное отображение  $d: |K| \rightarrow |K \times K|$  не клеточное, поэтому  $TD_0 \neq D_0$ , и можно рассмотреть разность  $D_0 - TD_0$ . Оказывается, отображения  $D_0$  и  $TD_0$  цепно гомотопны, т. е.  $D_0 - TD_0 = \partial D_1 + D_1 \partial$  для некоторого гомоморфизма  $D_1: C_*(K) \rightarrow C_*(K) \otimes C_*(K)$ , повышающего размерность цепи на 1. Более того, эту конструкцию можно продолжить дальше и получить последовательность гомоморфизмов

\*) Содержащая не только единичный элемент.

$D_k: C_*(K) \rightarrow (C_*(K) \otimes C_*(K))_{i+k}$ . Квадраты Стиррода строятся с помощью гомоморфизмов  $D_k$ , поэтому займёмся построением этих гомоморфизмов.

Для этой цели используется цепной комплекс  $W$ , соответствующий  $CW$ -комплексу  $S^\infty$ , имеющему по две клетки в каждой размерности от 0 до  $\infty$  ( $k$ -мерный остов комплекса  $S^\infty$  — это сфера  $S^k$ ). Цепное преобразование  $T$  можно рассматривать как действие образующей  $T$  группы  $\mathbb{Z}_2$ . Образующая  $T$  группы  $\mathbb{Z}_2$  действует и на  $S^\infty$  как симметрия относительно центра сферы. Поэтому цепной комплекс  $W$  в каждой размерности  $k \geq 0$  имеет две образующие  $w_k$  и  $Tw_k$ . Образующие можно выбрать так, что  $\partial w_1 = w_0 - Tw_0$ ,  $\partial w_2 = w_1 + Tw_1$  и вообще  $\partial w_k = w_{k-1} + (-1)^k Tw_{k-1}$  (отображение  $T$  сохраняет ориентацию клетки при нечётном  $k$  и изменяет при чётном  $k$ ).

Пусть  $K$  — произвольный симплициальный комплекс. Зададим действие группы  $\mathbb{Z}_2$  на цепном комплексе  $W \otimes C_*(K)$  формулой  $T(w_k \otimes \sigma) = (Tw_k \otimes \sigma)$ . Действие на  $C_*(K) \otimes C_*(K)$  уже было определено выше. Пусть  $C_*(K \times K)$  — цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий. Его можно отождествить с  $C_*(K) \otimes C_*(K)$ . Для любой клетки (симплекса)  $\sigma$  в  $K$  определён цепной подкомплекс  $C_*(\sigma \times \sigma)$ ; соответствующий ему подкомплекс в  $C_*(K) \otimes C_*(K)$  будем обозначать точно так же.

Положим  $\mathcal{L}(w_k \otimes \sigma) = C_*(\sigma \times \sigma) \subset C_*(K) \otimes C_*(K)$ . Подкомплекс  $\mathcal{L}(w_k \otimes \sigma)$  ацикличесен, и  $T\mathcal{L}(w_k \otimes \sigma) = \mathcal{L}(w_k \otimes \sigma)$ . Эти свойства позволяют построить цепное отображение  $\varphi: W \otimes C_*(K) \rightarrow C_*(K) \otimes C_*(K)$ , которое эквивариантно (т.е.  $\varphi T = T\varphi$ ) и переносится  $\mathcal{L}$  в том смысле, что  $\varphi(w_k \otimes \sigma) \in \mathcal{L}(w_k \otimes \sigma)$ . Отображение  $\varphi$  строится индукцией по  $\dim(w_k \otimes \sigma)$ . Для вершины  $v$  положим  $\varphi(w_0 \otimes v) = v \otimes v$ . Заметим, далее, что

$$\begin{aligned} \partial(\varphi(w_k \otimes \sigma)) &= \varphi(\partial(w_k \otimes \sigma)) = \varphi(\partial w_k \otimes \sigma \pm w_k \otimes \partial \sigma) = \\ &= \varphi((w_{k-1} \pm Tw_{k-1}) \otimes \sigma \pm w_k \otimes \partial \sigma) \subset \\ &\subset \mathcal{L}(w_{k-1} \otimes \sigma) + \mathcal{L}(w_k \otimes \partial \sigma) = \\ &= C_*(\sigma \times \sigma) + C_*(\partial \sigma \times \partial \sigma) = C_*(\sigma \times \sigma). \end{aligned}$$

Цепь  $\partial(\varphi(w_k \otimes \sigma))$  является циклом и лежит в ациклическом цепном комплексе  $C_*(\sigma \times \sigma)$ . Поэтому в  $C_*(\sigma \times \sigma) = \mathcal{L}(w_k \otimes \partial \sigma)$  есть цепь  $c$ , для которой  $\partial(\varphi(w_k \otimes \sigma)) = \partial c$ . Положим  $\varphi(w_k \otimes \sigma) = c$  и  $\varphi(Tw_k \otimes \sigma) = Tc$ .

Теперь уже можно построить гомоморфизмы  $D_k$ . А именно, положим  $D_k(c) = \varphi(w_k \otimes c)$  для  $c \in C_*(K)$ . Ясно, что  $D_k$  увеличивает размерность цепи  $c$  на  $k$  и  $D_0$  — диагональная аппроксимация.

Теорема 13.1.  $D_{k-1} + (-1)^k TD_{k-1} = \partial D_k + (-1)^{k+1} D_k \partial$ .

Доказательство. Отображение  $\varphi$  цепное, поэтому

$$\begin{aligned}\partial D_k(c) &= \partial(\varphi(\omega_k \otimes c)) = \varphi(\partial(\omega_k \otimes c)) = \\ &= \varphi(\partial\omega_k \otimes c + (-1)^k \omega_k \otimes \partial c).\end{aligned}$$

Учитывая, что  $D_k \partial c = \varphi(\omega_k \otimes \partial c)$ , получаем

$$\begin{aligned}\partial D_k(c) + (-1)^{k+1} D_k \partial c &= \varphi(\partial\omega_k \otimes c) = \\ &= \varphi((\omega_{k-1} + (-1)^k T\omega_{k-1}) \otimes c) = \\ &= D_{k-1}c + (-1)^k TD_{k-1}c,\end{aligned}$$

что и требовалось.  $\square$

Следствие. Справедливо равенство  $D_0 - TD_0 = \partial D_1 + D_1 \partial$ , т. е.  $D_1$  — цепная гомотопия, связывающая  $D_0$  и  $TD_0$ .

Для  $k \geq 0$  определим  $\smile_k$ -произведение следующим образом. Коцепь  $c^p \smile_k c^q$ , где  $c^p \in C^p(K)$  и  $c^q \in C^q(K)$ , принимает на цепи  $c \in C_{p+q-k}(K)$  значение

$$\langle c^p \otimes c^q, D_k c \rangle = \langle c^p \otimes c^q, \varphi(\omega_k \otimes c) \rangle.$$

Удобно также положить  $c^p \smile_{-1} c^q = 0$ .

Отметим, что  $\smile_k$ -произведение зависит от выбора отображения  $\varphi$ . Поэтому нам ещё предстоит проверить, что отображение  $\text{Sq}_k$ , которое определяется с помощью  $\smile_k$ , не зависит от  $\varphi$ .

Теорема 13.2 (формула кограницы). Справедливо равенство

$$\begin{aligned}\delta(c^p \smile_k c^q) &= (-1)^k \delta c^p \smile_k c^q + (-1)^{p+k} c^p \smile_k \delta c^q - \\ &\quad - (-1)^k c^p \smile_{k-1} c^q - (-1)^{pq} c^q \smile_{k-1} c^p.\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть  $c \in C_{p+q-k+1}(K)$ . Тогда

$$\langle \delta(c^p \smile_k c^q), c \rangle = \langle c^p \smile_k c^q, \partial c \rangle = \langle c^p \otimes c^q, \varphi(\omega_k \otimes c) \rangle.$$

По определению  $\partial(\omega_k \otimes c) = \partial\omega_k \otimes c + (-1)^k \omega_k \otimes \partial c$ . Поэтому

$$\begin{aligned}\langle \delta(c^p \smile_k c^q), c \rangle &= (-1)^k \langle c^p \otimes c^q, \varphi(\partial(\omega_k \otimes c)) \rangle - (-1)^k \langle c^p \otimes c^q, \varphi(\partial\omega_k \otimes c) \rangle = \\ &= (-1)^k \langle c^p \otimes c^q, \partial(\varphi(\omega_k \otimes c)) \rangle - (-1)^k \langle c^p \otimes c^q, \varphi(\omega_{k-1} \otimes c) \rangle - \\ &\quad - (-1)^{2k} \langle c^p \otimes c^q, \varphi(T\omega_{k-1} \otimes c) \rangle = \\ &= (-1)^k \langle \delta(c^p \otimes c^q), \varphi(\omega_k \otimes c) \rangle - (-1)^k \langle c^p \otimes c^q, \varphi(\omega_{k-1} \otimes c) \rangle - \\ &\quad - \langle c^p \otimes c^q, T\varphi(\omega_{k-1} \otimes c) \rangle = \\ &= (-1)^k \langle \delta(c^p \otimes c^q), \varphi(\omega_k \otimes c) \rangle - (-1)^k \langle c^p \otimes c^q, \varphi(\omega_{k-1} \otimes c) \rangle - \\ &\quad - (-1)^{pq} \langle c^q \otimes c^p, \varphi(\omega_{k-1} \otimes c) \rangle.\end{aligned}$$

По определению  $\delta(c^p \otimes c^q) = (\delta c^p) \otimes c^q + (-1)^p c^p \otimes \delta c^q$ . Поэтому первый член полученного выражения равен

$$(-1)^k \langle \delta c^p \otimes c^q, \varphi(\omega_k \otimes c) \rangle + (-1)^{p+k} \langle c^p \otimes \delta c^q, \varphi(\omega_k \otimes c) \rangle.$$

Это завершает доказательство.  $\square$

*С л е д с т в и е.* Если коцепь  $c^p \in C^p(K)$  является коциклом по модулю 2, т.е.  $\delta c^p = 2c^{p+1}$ , где  $c^{p+1} \in C^{p+1}(K)$ , то коцепь  $c^p \cup_k c^p \in C^{2p-k}(K)$  тоже является коциклом по модулю 2.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Согласно формуле кограницы

$$\begin{aligned} \delta(c^p \cup_k c^p) &= (-1)^k 2c^{p+1} \cup_k c^p + \\ &+ (-1)^{p+k} c^p \cup_k 2c^{p+1} - (-1)^k c^p \cup_{k-1} c^p - (-1)^{p^2} c^p \cup_{k-1} c^p. \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что  $(-1)^k + (-1)^{p^2} = \pm 1 \pm 1 \equiv 0 \pmod{2}$ .  $\square$

Таким образом, формула  $\text{Sq}_k c^p = c^p \cup_k c^p$  задаёт некоторое отображение  $\text{Sq}_k: Z^p(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow Z^{2p-k}(K; \mathbb{Z}_2)$ . Применив естественную проекцию  $Z^{2p-k}(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{2p-k}(K; \mathbb{Z}_2)$ , получим отображение  $\text{Sq}_k: Z^p(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{2p-k}(K; \mathbb{Z}_2)$ .

*Т е о р е м а 13.3.* Для любого  $k \geq 0$  отображение  $c^p \mapsto \text{Sq}_k c^p$  индуцирует гомоморфизм групп  $\text{Sq}_k: H^p(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{2p-k}(K; \mathbb{Z}_2)$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Проверим сначала, что если  $c^p \equiv \delta c \pmod{2}$ , то  $\text{Sq}_k c^p$  — кограница по модулю 2. Действительно,  $c^p \cup_k c^p \equiv \delta(c \cup_k \delta c + c \cup_{k-1} c) \pmod{2}$ , поскольку

$$\begin{aligned} \delta(c \cup_k \delta c + c \cup_{k-1} c) &\equiv \delta c \cup_k \delta c + c \cup_{k-1} \delta c + \delta c \cup_{k-1} c + \\ &+ \delta c \cup_{k-1} c + c \cup_{k-1} \delta c + c \cup_{k-2} c + c \cup_{k-2} c \equiv \\ &\equiv \delta c \cup_k \delta c \equiv c^p \cup_k c^p \pmod{2}. \end{aligned}$$

Проверим теперь, что отображение  $\text{Sq}_k$  — гомоморфизм. Ясно, что

$$\text{Sq}_k(c^p + d^p) = \text{Sq}_k c^p + \text{Sq}_k d^p + c^p \cup_k d^p + d^p \cup_k c^p.$$

Кроме того, если  $\delta c^p \equiv 0 \pmod{2}$  и  $\delta d^p \equiv 0 \pmod{2}$ , то

$$\begin{aligned} \delta(c^p \cup_{k+1} d^p) &\equiv \delta c^p \cup_{k+1} d^p + c^p \cup_{k+1} \delta d^p + c^p \cup_k d^p + d^p \cup_k c^p \equiv \\ &\equiv c^p \cup_k d^p + d^p \cup_k c^p \pmod{2}. \end{aligned} \quad \square$$

*Т е о р е м а 13.4.* Гомоморфизм  $f^*: H^*(L; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(K; \mathbb{Z}_2)$  коммутирует с  $\text{Sq}_k$  для любого симплициального отображения  $f: K \rightarrow L$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* По определению

$$\begin{aligned} \langle f^*(\text{Sq}_k c), c' \rangle &= \langle c \otimes c, \varphi_L(\omega_k \otimes f(c')) \rangle = \langle c \otimes c, \varphi_L(1 \otimes f)(\omega_k \otimes c') \rangle, \\ \langle \text{Sq}_k(f^* c), c' \rangle &= \langle f^* c \otimes f^* c, \varphi_K(\omega_k \otimes c') \rangle = \langle c \otimes c, (f \otimes f)\varphi_K(\omega_k \otimes c') \rangle. \end{aligned}$$

У эквивариантных цепных отображений  $\varphi_L(1 \otimes f)$  и  $(f \otimes f)\varphi_K$  есть общий эквивариантный носитель  $\mathcal{L}(\omega_k \otimes \sigma) = C_*(f\sigma \times f\sigma)$ . Этот носитель эквивариантен в том смысле, что  $T\mathcal{L}(\omega_k \otimes \sigma) = \mathcal{L}(\omega_k \otimes \sigma)$ . Из цикличности и эквивариантности носителя посредством стандартной конструкции (см. с. 202 и с. 16) выводится существование цепной гомотопии  $D$ , которая связывает отображения  $\varphi_L(1 \otimes f)$  и  $(f \otimes f)\varphi_K$  и обладает тем свойством, что  $DT = D$  (если  $D(\omega_k \otimes \sigma) = c$ , то мы полагаем  $D(T\omega_k \otimes \sigma) = c$ ). Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle (f^* \text{Sq}_k - \text{Sq}_k f^*)c, c' \rangle &= \langle c \otimes c, (\partial D + D\partial)(\omega_k \otimes c') \rangle = \\ &= \langle \delta(c \otimes c), D(\omega_k \otimes c') \rangle + \langle c \otimes c, D(\partial\omega_k \otimes c' \pm \omega_k \otimes \partial c') \rangle. \end{aligned}$$

Если  $\delta c \equiv 0 \pmod{2}$ , то  $\delta(c \otimes c) \equiv 0 \pmod{2}$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} D(\partial\omega_k \otimes c') &= D((\omega_{k-1} \pm T\omega_{k-1}) \otimes c') = \\ &= D(\omega_{k-1} \otimes c') \pm D(\omega_{k-1} \otimes c') \equiv 0 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Поэтому  $(f^* \text{Sq}_k - \text{Sq}_k f^*)c \equiv \delta d \pmod{2}$ , где  $\langle d, c'' \rangle = \langle c \otimes c, D(\omega_k \otimes c') \rangle$ .  $\square$

*С л е д с т в и е.* Операция  $\text{Sq}_k$  не зависит от выбора эквивариантного цепного отображения  $\varphi$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Положим  $K = L$  и  $f = \text{id}_K$ . В таком случае  $\varphi_K$  и  $\varphi_L$  — два варианта выбора  $\varphi$ . Если  $\text{Sq}_k$  и  $\text{Sq}'_k$  — две операции, построенные с помощью разных вариантов выбора  $\varphi$ , то  $\text{Sq}_k - \text{Sq}'_k = \text{id}^* \text{Sq}_k - \text{Sq}'_k \text{id}^* = 0$ .  $\square$

По некоторым причинам более удобно другое обозначение  $\text{Sq}^k = \text{Sq}_{p-k}: H^p(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{p+k}(K; \mathbb{Z}_2)$ . Здесь предполагается, что  $0 \leq k \leq p$ . При  $k > p$  операция  $\text{Sq}^k$  на  $H^p(K; \mathbb{Z}_2)$  нулевая.

Непосредственно из определения видно, что для  $k$ -мерных когомологий  $\text{Sq}^k = \text{Sq}_0$  — когомологическое возведение в квадрат. В связи с этим операции  $\text{Sq}^k$ , построенные Стинродом ([St2], [St4], [St5]), называют *квадратами Стинрода*.

Квадраты Стинрода можно определить и для относительных когомологий. Пусть  $L \subset K$  — симплициальный подкомплекс. Тогда имеет место короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow C^*(K, L) \xrightarrow{p^*} C^*(K) \xrightarrow{i^*} C^*(L) \longrightarrow 0.$$

По построению  $\varphi_K(\omega_k \otimes \sigma) \in C_*(\sigma \times \sigma) \subset C_*(L \times L)$  для всех  $\sigma \subset L$ . Поэтому можно считать, что  $\varphi_L = \varphi_K|_{W \otimes C_*(L)}$ . Тогда для любых коцепей  $c, c' \in C^*(K)$  имеет место равенство  $i^*(c \cup_k c') = i^*c \cup_k i^*c'$ . В частности, для любых двух коцепей  $c, c' \in C^*(K, L)$  имеет место равенство  $i^*(p^*c \cup_k p^*c') = i^*p^*c \cup_k i^*p^*c' = 0$ , поскольку  $i^*p^* = 0$ . Из точности последовательности вытекает, что  $p^*c \cup_k p^*c' = p^*d$  для некото-

рой коцепи  $d \in C^*(K, L)$ ; коцепь  $d$  определена однозначно в силу мономорфности отображения  $p^*$ . Положим  $c \cup_k c' = d$ . По определению  $p^*(c \cup_k c') = p^*c \cup_k p^*c'$ . Для относительного  $\cup_k$ -произведения легко доказывается формула кограницы. После этого строится отображение  $\text{Sq}^k: H^p(K, L; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{p+k}(K, L; \mathbb{Z}_2)$ . Непосредственно из определений видно, что  $p^* \text{Sq}_k = \text{Sq}_k p^*$ .

### 13.2. Свойства квадратов Стиррода

Про квадраты Стиррода мы уже доказали следующее.

1. Квадраты Стиррода обладают свойством естественности:  $f^* \text{Sq}^k = \text{Sq}^k f^*$  для любого отображения  $f: (K, L) \rightarrow (K_1, L_1)$  симплициальных пар.

2. Если  $k > p$ , то  $\text{Sq}^k \alpha = 0$  для всех  $\alpha \in H^p(K, L; \mathbb{Z}_2)$ .

3. Для всех  $\alpha \in H^k(K, L; \mathbb{Z}_2)$  выполняется равенство  $\text{Sq}^k \alpha = \alpha \cup \alpha$ .

Сформулируем некоторые другие свойства квадратов Стиррода в виде отдельной теоремы, доказательству которой посвящён этот пункт; для краткости будем опускать группу коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$ .

**Т е о р е м а 13.5.** а) *Операция  $\text{Sq}^k$  коммутирует со связывающим гомоморфизмом  $\delta: H^*(L) \rightarrow H^*(K, L)$ .*

б) *Операция  $\text{Sq}^k$  коммутирует с изоморфизмом надстройки  $\Sigma^*: \tilde{H}^p(K) \rightarrow \tilde{H}^{p+1}(\Sigma K)$ .*

в) *Операция  $\text{Sq}^0$  — тождественное отображение.*

г) *Операция  $\text{Sq}^1$  — гомоморфизм Бокштейна для точной последовательности  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ .*

д)  $\text{Sq}^k(\alpha \cup \beta) = \sum_i (\text{Sq}^i \alpha) \cup (\text{Sq}^{k-i} \beta)$  (формула Картана).

Помимо перечисленных свойств квадраты Стиррода обладают также очень важным свойством — они удовлетворяют так называемым соотношениям Адема. Но доказательство соотношений Адема выходит за рамки этой книги.

#### Коммутирование с $\delta$

Связывающий гомоморфизм  $\delta: H^*(L) \rightarrow H^*(K, L)$  устроен следующим образом. Пусть  $c^q \in Z^q(L)$  и  $[c^q]$  — соответствующий класс когомологий. Гомоморфизм  $i^*: C^*(K) \rightarrow C^*(L)$  — эпиморфизм, поэтому существует коцепь  $\tilde{c}^q \in C^*(K)$ , для которой  $i^* \tilde{c}^q = c^q$ . Но  $i^*(\delta \tilde{c}^q) = \delta c^q = 0$ , поэтому существует коцепь  $d^{q+1} \in C^{q+1}(K, L)$ , для которой  $\delta \tilde{c}^q = p^* d^{q+1}$ . Гомоморфизм  $p^*: C^*(K, L) \rightarrow C^*(K)$  — мономорфизм, поэтому  $\delta d^{q+1} = 0$ , поскольку  $p^* \delta d^{q+1} = \delta^2 \tilde{c}^q = 0$ . В качестве класса когомологий  $\delta^*[c^q]$  выбирается класс  $[d^{q+1}]$ .

Требуется доказать, что коциклы  $\delta^* \text{Sq}^k c^q$  и  $\text{Sq}^k d^{q+1}$  когомологичны. По определению

$$\begin{aligned} p^*(\text{Sq}^k d^{q+1}) &= \text{Sq}^k(p^* d^{q+1}) = \text{Sq}^k(\delta \tilde{c}^q) = \\ &= \delta \tilde{c}^q \cup_{q+1-k} \delta \tilde{c}^q = \delta(\tilde{c}^q \cup_{q+1-k} \delta \tilde{c}^q + \tilde{c}^q \cup_{q-k} \tilde{c}^q). \end{aligned}$$

Кроме того,  $i^*(\tilde{c}^q \cup_{q+1-k} \delta \tilde{c}^q + \tilde{c}^q \cup_{q-k} \tilde{c}^q) = c^q \cup_{q-k} c^q$ , так как  $i^*(\delta \tilde{c}^q) = 0$  и  $i^*(\tilde{c}^q) = c^q$ . Пусть  $d' = \text{Sq}^k d^{q+1}$ ,  $c' = c^q \cup_{q-k} c^q$  и  $\tilde{c}' = \tilde{c}^q \cup_{q+1-k} \delta \tilde{c}^q + \tilde{c}^q \cup_{q-k} \tilde{c}^q$ . Тогда  $p^* d' = \delta \tilde{c}'$  и  $i^* \tilde{c}' = c'$ . Это означает, что  $\delta^*[c'] = [d']$ . Но  $c' = c^q \cup_{q-k} c^q$ , поэтому мы получаем требуемое.

### Коммутирование с надстройкой

При доказательстве свойства а) мы не использовали никаких конкретных свойств короткой точной последовательности, по которой строится связывающий гомоморфизм  $\delta^*$ . Те же самые рассуждения показывают, что операция  $\text{Sq}^k$  коммутирует со связывающим гомоморфизмом из когомологической последовательности Майера—Вьеториса. Изоморфизм надстройки представляет собой связывающий гомоморфизм из последовательности Майера—Вьеториса для  $K_0$  и  $K_1$ , где  $K_0$  и  $K_1$  — конусы над  $K$  и  $K_0 \cup K_1 = \Sigma K$ .

### Операции $\text{Sq}^0$ и $\text{Sq}^1$

Пусть  $\beta: H^p(K, L; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{p+1}(K, L; \mathbb{Z})$  — гомоморфизм Бокштейна для короткой точной последовательности  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ . Для вычисления операций  $\text{Sq}^0$  и  $\text{Sq}^1$  нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

$$\text{Л е м м а. } \beta \text{Sq}^k = \begin{cases} 0 & \text{при нечётном } k; \\ \text{Sq}^{k+1} & \text{при чётном } k. \end{cases}$$

**Доказательство.** Пусть  $c \in H^p(K, L; \mathbb{Z}_2)$ ,  $\tilde{c}$  — целочисленная коцепь, при приведении которой по модулю 2 получается коцикл, представляющий  $c$ . По определению  $\text{Sq}^k c$  — это класс когомологий коцепи  $\tilde{c} \cup_{p-k} \tilde{c}$ , приведённой по модулю 2. По условию  $\tilde{c} = 2c'$  для некоторой целочисленной коцепи  $c'$ , поэтому, положив для краткости  $q = p - k$ , получим  $\delta(\tilde{c} \cup_{p-k} \tilde{c}) = (-1)^q 2c' \cup_q \tilde{c} + (-1)^p \tilde{c} \cup_q 2c' - (-1)^q \tilde{c} \cup_{q-1} \tilde{c} - (-1)^p \tilde{c} \cup_{q-1} \tilde{c}$ . Значит, класс когомологий  $\beta(\text{Sq}^k c)$  задаётся коциклом

$$c' \cup_q \tilde{c} + \tilde{c} \cup_q c' + \varepsilon(\tilde{c} \cup_{q-1} \tilde{c}) \pmod{2},$$

где  $\varepsilon = 0$  при нечётном  $k = q - p$  и  $\varepsilon = 1$  при чётном  $k$ . Но  $c' \cup_q \tilde{c} + \tilde{c} \cup_q c' \equiv \delta(\tilde{c} \cup_{q+1} c') \pmod{2}$ , поскольку  $\delta \tilde{c} = 2c' \equiv 0 \pmod{2}$  и  $2\delta c' = \delta^2 \tilde{c} = 0$ ,



т.е.  $\delta c' = 0$ . Таким образом,  $\beta(\text{Sq}^k c) = 0$  при нечётном  $k$  и  $\beta(\text{Sq}^k c) = [\tilde{c} \cup_{q-1} \tilde{c}] = \text{Sq}^{k+1} c$  при чётном  $k$ .  $\square$

Лемма показывает, что свойство г) следует из свойства в), поскольку если  $\text{Sq}^0 = \text{id}$ , то согласно лемме  $\text{Sq}^1 = \beta \text{Sq}^0 = \beta$ . В свою очередь, свойство в) тоже доказывается с помощью этой леммы. Точнее говоря, с помощью леммы доказывается, что свойство в) выполняется для  $K = \mathbb{R}P^2$ , а уже из этого выводится, что оно выполняется для всех симплициальных пар  $(K, L)$ .

Докажем, что свойство в) выполняется для  $\mathbb{R}P^2$ . Пусть  $\alpha$  — образующая группы  $H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$ . Согласно лемме  $\beta \text{Sq}^0 \alpha = \text{Sq}^1 \alpha = \alpha \cup \alpha \neq 0$ , поэтому  $\text{Sq}^0 \alpha \neq 0$ . Значит,  $\text{Sq}^0 \alpha = \alpha$ , поскольку в  $H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$  есть только один ненулевой элемент.

Естественное вложение  $f: \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  индуцирует гомоморфизм  $f^*: H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$ , при котором  $\alpha$  переходит в образующую  $\alpha'$  группы  $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$ . Поэтому в силу свойства естественности  $\text{Sq}^0 \alpha' = \text{Sq}(f^* \alpha) = f^*(\text{Sq}^0 \alpha) = f^* \alpha = \alpha'$ . Таким образом, свойство в) выполняется и для  $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ . Операция  $\text{Sq}^0$  коммутирует с изоморфизмом надстройки, поэтому свойство в) выполняется ещё и для  $S^n$ .

Пусть  $K$  —  $n$ -мерный симплициальный комплекс. Согласно теореме 10.6 любой элемент группы  $H^n(K; \mathbb{Z})$  можно реализовать отображением  $K \rightarrow S^n$ . Это верно и для группы  $H^n(K; \mathbb{Z}_2)$ , поскольку приведение коэффициентов по модулю 2 индуцирует эпиморфизм  $H^n(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(K; \mathbb{Z}_2)$ . Обратите внимание, что это верно только для когомологий; для гомологий это неверно. Например, отображение  $H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$  заведомо не может быть эпиморфизмом, поскольку  $H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = 0$ , а  $H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) \neq 0$ . Эпиморфность отображения  $H^n(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(K; \mathbb{Z}_2)$  следует из того, что группа  $H_n(K)$  для  $n$ -мерного симплициального комплекса не имеет кручения. Эпиморфность доказывается следующим образом. Согласно формуле универсальных коэффициентов группа  $H^n(K; G)$  является прямой суммой групп  $\text{Hom}(H_n(K), G)$  и  $\text{Ext}(H_{n-1}(K), G)$ . Отображение  $\text{Hom}(H_n(K), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_n(K), \mathbb{Z}_2)$  — эпиморфизм, потому что группа  $H_n(K)$  не имеет кручения, а отображение  $\text{Ext}(H_{n-1}(K), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(K), \mathbb{Z}_2)$  эпиморфно в любом случае (здесь нужно воспользоваться вычислением группы  $\text{Ext}(A, B)$  для циклических групп  $A$  и  $B$ ). Выполнение свойства в) для  $K$  вытекает теперь из естественности операции  $\text{Sq}^0$ .

Если  $K$  — бесконечномерный симплициальный комплекс, то естественное включение  $K^n \rightarrow K$  индуцирует мономорфизм  $H^n(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(K^n; \mathbb{Z}_2)$ . Поэтому из естественности операции  $\text{Sq}^0$  вытекает выполнение свойства в) для любого  $K$ .

Обратимся теперь к относительным группам когомологий  $H^n(K, L; \mathbb{Z}_2)$ . Пусть  $CL$  — конус над  $L$ . Тогда имеют место изоморфизмы  $H^n(K, L) \cong$

$\cong H^n(K \cup CL, CL) \cong \tilde{H}^n(K \cup CL)$ . Первый изоморфизм очевиден на уровне (ко)цепей, а второй изоморфизм вытекает из точной последовательности пары, поскольку  $CL$  — стягиваемое пространство. Оба эти изоморфизма коммутируют с  $Sq^0$ , поэтому свойство в) выполняется и для любой пары симплициальных комплексов  $(K, L)$ .

### Формула Картана

Достаточно доказать, что  $Sq^k(\alpha \times \beta) = \sum_i Sq^i \alpha \times Sq^{k-i} \beta$ . Действительно,  $\alpha \cup \beta = d^*(\alpha \times \beta)$ , где  $d: |K| \rightarrow |K \times K|$  — диагональное отображение. Поэтому  $Sq^k d^*(\alpha \times \beta) = d^* Sq^k(\alpha \times \beta) = d^* \sum_i Sq^i \alpha \times Sq^{k-i} \beta = \sum_i Sq^i \alpha \cup Sq^{k-i} \beta$ .

Введём отображение  $r: W \rightarrow W \otimes W$ , полагая  $r(w_k) = \sum (-1)^{i(k-i)} w_i \otimes T^i w_{k-i}$  и продолжая это отображение на  $W$  по линейности. Проверим, что отображение  $r$  цепное. Ясно, что  $r(\partial w_k) = r(w_{k-1} + (-1)^k T w_{k-1}) = \sum (-1)^{i(k-1-i)} w_i \otimes T^i w_{k-1-i} + \sum (-1)^{i(k-1-i)+k} T w_i \otimes T^i w_{k-1-i}$  и

$$\begin{aligned} \partial r(w_k) &= \sum (-1)^{i(k-i)} \partial w_i \otimes T^i w_{k-i} + \sum (-1)^{i(k-i)+i} w_i \otimes T^i \partial w_{k-i} = \\ &= \sum (-1)^{i(k-i)} w_{i-1} \otimes T^i w_{k-i} + \sum (-1)^{i(k-i)+i} T w_{i-1} \otimes T^i w_{k-i} + \\ &\quad + \sum (-1)^{i(k-i)+i} w_i \otimes T^i w_{k-i-1} + \sum (-1)^{i(k-i)+k} w_i \otimes T^{i+1} w_{k-i-1}. \end{aligned}$$

В выражении для  $\partial r(w_k)$  первая и четвёртая суммы взаимно уничтожаются: если мы заменим  $i$  на  $i+1$ , то  $i(k-i)$  заменится на  $i(k-i)+k-1$ . Теперь уже легко видеть, что  $\partial r(w_k) = r(\partial w_k)$ : в выражении для  $\partial r(w_k)$  первая сумма непосредственно совпадает с третьей суммой в выражении для  $r(\partial w_k)$ , а совпадение вторых сумм в обоих выражениях доказывается заменой  $i$  на  $i+1$ .

С помощью отображения  $r$  построим отображение  $\varphi_{K \times L}$ , которое является композицией отображений

$$\begin{aligned} W \otimes C_*(K) \otimes C_*(L) &\xrightarrow{r \otimes 1} W \otimes W \otimes C_*(K) \otimes C_*(L) \xrightarrow{T} \\ &\xrightarrow{T} W \otimes C_*(K) \otimes W \otimes C_*(L) \xrightarrow{\varphi_K \otimes \varphi_L} C_*(K) \otimes C_*(K) \otimes C_*(L) \otimes C_*(L) \xrightarrow{T} \\ &\xrightarrow{T} C_*(K) \otimes C_*(L) \otimes C_*(K) \otimes C_*(L), \end{aligned}$$

где  $T$  в обоих случаях меняет местами второй и третий множители. Отображение  $\varphi_{K \times L}$  эквивариантно и переносится соответствующим отображением  $\mathcal{L}$ , поэтому его можно использовать для вычисления произведения  $\cup_k$  в цепном комплексе  $C_*(K \times L) \cong C_*(K) \otimes C_*(L)$ , а значит, и для вычисления операций  $Sq^k$ .

Пусть  $\alpha \in Z^p(K; \mathbb{Z}_2)$ ,  $\beta \in Z^q(L; \mathbb{Z}_2)$ ,  $a \in C_*(K; \mathbb{Z}_2)$  и  $b \in C_*(L; \mathbb{Z}_2)$ . Нас интересует действие операции  $\text{Sq}^k = \text{Sq}_{p+q-k}$  на  $(p+q)$ -мерный коцикл  $\alpha \times \beta$ . Для краткости положим  $p+q-k = n$ . Тогда, используя определение  $\varphi_{K \times L}$  и отбрасывая знаки, поскольку сейчас мы работаем с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ , получаем

$$\begin{aligned} \langle \text{Sq}^k(\alpha \otimes \beta), a \otimes b \rangle &= \langle (\alpha \otimes \beta) \cup_n (\alpha \otimes \beta), a \otimes b \rangle = \\ &= \langle \alpha \otimes \beta \otimes \alpha \otimes \beta, \varphi_{K \times L}(\omega_n \otimes a \otimes b) \rangle = \\ &= \left\langle \alpha \otimes \alpha \otimes \beta \otimes \beta, \sum \varphi_K(\omega_i \otimes a) \otimes T^i \varphi_L(\omega_{n-i} \otimes b) \right\rangle = \\ &= \sum \langle \alpha \cup_i \alpha, a \rangle \langle \beta \cup_{n-i} \beta, b \rangle = \\ &= \sum \langle \text{Sq}^{p-i} \alpha, a \rangle \langle \text{Sq}^{q-n+i} \beta, b \rangle = \\ &= \sum \langle \text{Sq}^{p-i} \alpha \times \text{Sq}^{q-n+i} \beta, a \otimes b \rangle, \end{aligned}$$

где суммирование ведётся по всем  $i$  от 0 до  $n$ . Значит,  $\text{Sq}^k(\alpha \times \beta) = \sum_{i=0}^n \text{Sq}^{p-i} \alpha \times \text{Sq}^{q-n+i} \beta = \sum_{j=p-n}^p \text{Sq}^j \alpha \times \text{Sq}^{k-j} \beta$ . Остается проверить, что суммирование ведётся в нужных пределах. В формуле Картана  $\text{Sq}^k(\alpha \times \beta) = \sum_i \text{Sq}^i \alpha \times \text{Sq}^{k-i} \beta$  слагаемые ненулевые лишь в том случае, когда  $0 \leq i \leq p$  и  $0 \leq k-i \leq q$ , т.е.  $k-q \leq i \leq k$ . Поэтому суммирование ведётся от  $i = k-q = p-n$  до  $p$ .

Формула Картана имеет следующую интерпретацию. Для каждого элемента  $\alpha \in H^*(K; \mathbb{Z}_2)$  положим  $\text{Sq} \alpha = \sum_k \text{Sq}^k \alpha$  (эта сумма содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых). Тогда отображение  $\text{Sq}: H^*(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(K; \mathbb{Z}_2)$  является гомоморфизмом колец. Действительно, если  $\dim \alpha = p$  и  $\dim \beta = q$ , то  $(p+q+k)$ -мерная компонента элемента  $\text{Sq} \alpha \cup \text{Sq} \beta = \left( \sum_i \text{Sq}^i \alpha \right) \cup \left( \sum_j \text{Sq}^j \beta \right)$  имеет вид  $\sum \text{Sq}^i \alpha \cup \text{Sq}^j \beta$ , где суммирование ведётся по тем  $i, j$ , для которых  $(i+p) + (j+q) = p+q+k$ , т.е.  $i+j = k$ . Значит, она имеет вид  $\sum_i \text{Sq}^i \alpha \cup \text{Sq}^{k-i} \beta$ . Согласно формуле Картана эта сумма равна  $\text{Sq}^k(\alpha \cup \beta)$ , т.е. она равна  $(p+q+k)$ -мерной компоненте элемента  $\text{Sq}(\alpha \cup \beta)$ .

Гомоморфизм  $\text{Sq}$  позволяет вычислить  $\text{Sq}^k(\alpha^n)$  для любого элемента  $\alpha \in H^1(K; \mathbb{Z}_2)$ .

**Теорема 13.6.** Если  $\alpha \in H^1(K; \mathbb{Z}_2)$ , то  $\text{Sq}^k(\alpha^n) = \binom{n}{k} \alpha^{n+k}$ .

**Доказательство.** Из свойств квадратов Стиррода следует, что  $\text{Sq}^k \alpha = 0$  при  $k \geq 2$ ,  $\text{Sq}^0 \alpha = \alpha$  и  $\text{Sq}^1 \alpha = \alpha^2$ . Поэтому  $\text{Sq} \alpha = \alpha + \alpha^2$ .

Учитывая, что  $Sq$  — гомоморфизм, получаем  $Sq(\alpha^n) = (Sq \alpha)^n = (\alpha + \alpha^2)^n = \alpha \sum_k \binom{n}{k} \alpha^k$ . Значит,  $Sq^k(\alpha^n) = \binom{n}{k} \alpha^{n+k}$ .  $\square$

**З а д а ч а 13.1.** Докажите, что если когомологический класс  $\alpha$  одномерен, то

$$Sq(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) = 1 + \alpha.$$

**З а д а ч а 13.2** (формула Ву). Докажите, что

$$\begin{aligned} Sq^k \omega_m = \omega_k \omega_m + \binom{m-k}{1} \omega_{k-1} \omega_{m+1} + \binom{m-k+1}{2} \omega_{k-2} \omega_{m+2} + \dots \\ \dots + \binom{m-1}{k} \omega_0 \omega_{m+k}. \end{aligned}$$

## Глава IV

# Сингулярные гомологии

### § 14. Основные определения и свойства

Симплициальные гомологии определяются только для симплициальных комплексов, причём их топологическая инвариантность далеко не очевидна. Есть способ определить гомологии для произвольного топологического пространства  $X$ , причём топологическая инвариантность так определённых гомологий очевидна. Для этого нужно поступить следующим образом. Будем рассматривать сразу все непрерывные отображения  $f: \Delta^k \rightarrow X$ , где  $\Delta^k$  — симплекс  $[0, 1, \dots, k]$ ; такие отображения будем называть *сингулярными  $k$ -мерными симплексами*. Группу  $C_k(X; G)$  определим как множество конечных сумм  $\sum a_i f_i$ , где  $a_i \in G$ ,  $f_i$  — сингулярный  $k$ -мерный симплекс.

Чтобы определить граничный гомоморфизм  $\partial$ , введём отображения  $\varepsilon_j = \varepsilon_j^k: \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ , положив  $\varepsilon_j^k[i] = [i]$  при  $i < j$  и  $\varepsilon_j^k[i] = [i + 1]$  при  $i \geq j$ ; на весь симплекс отображение продолжается по линейности. Для сингулярного симплекса  $f: \Delta^k \rightarrow X$  положим  $\partial f = \sum_{j=0}^k (-1)^j f \varepsilon_j^k \in C_{k-1}(X; G)$ . Для нульмерного симплекса  $f$  полагаем  $\partial f = 0$ .

**Т е о р е м а 14.1.** *Справедливо равенство  $\partial\partial = 0$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Прежде всего отметим, что если  $i < j$ , то  $\varepsilon_j^{k+1} \varepsilon_i^k = \varepsilon_i^{k+1} \varepsilon_{j-1}^k$ . Действительно, выражения в обеих частях равенства переводят  $[a]$  в  $[a]$  при  $a < i$ , в  $[a + 1]$  при  $i \leq a < j - 1$  и в  $[a + 2]$  при  $a \geq j - 1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \partial\partial f &= \partial \left( \sum_j (-1)^j f \varepsilon_j \right) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} f \varepsilon_j \varepsilon_i = \\ &= \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} f \varepsilon_j \varepsilon_i + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f \varepsilon_i \varepsilon_{j-1}. \end{aligned}$$

Заменяем во второй сумме индекс  $i$  на  $j$ , а индекс  $j$  на  $i + 1$ . После такой замены вторая и первая суммы взаимно уничтожаются.  $\square$

Снова введём группы  $Z_k = \text{Ker } \partial_k$  и  $B_k = \text{Im } \partial_{k+1}$ . Согласно теореме 14.1 мы имеем  $B_k \subset Z_k$ , поэтому можно рассмотреть группу

$H_k(X; G) = Z_k/B_k$ ; эту группу называют группой *сингулярных гомологий* пространства  $X$  с коэффициентами в группе  $G$ . Мы не будем вводить различных обозначений для сингулярных и симплициальных гомологий; в п. 14.4 мы покажем, что для любого симплициального комплекса его сингулярные гомологии изоморфны симплициальным.

**Теорема 14.2.** Пусть пространство  $X$  состоит из  $n$  компонент линейной связности. Тогда  $H_0(X; G) = \underbrace{G \oplus \dots \oplus G}_n$ .

**Доказательство.** Выберем в компонентах линейной связности пространства  $X$  точки  $x_1, \dots, x_n$ . Если точка  $y_i$  лежит в той же компоненте связности, что и точка  $x_i$ , то существует путь из  $x_i$  в  $y_i$ . Этот путь можно рассматривать как сингулярный симплекс  $f: \Delta^1 \rightarrow X$ ; при этом  $\partial(a f) = a[y_i] - a[x_i]$ . Таким образом, с точностью до границы сингулярная цепь  $a[y_i]$  равна  $a[x_i]$ . Предположим теперь, что  $a[x_i] = \partial c$ , где  $c = \sum a_i f_i$  и  $f_i$  — путь из  $z_i$  в  $w_i$ . Тогда  $\partial c = \sum a_i [w_i] - \sum a_i [z_i]$ . В этом выражении сумма всех коэффициентов равна 0 и сумма коэффициентов при каждом нульмерном симплексе  $[x]$ ,  $x \neq x_i$ , тоже равна 0. Поэтому сумма коэффициентов при  $[x_i]$  равна 0, т. е.  $a = 0$ .  $\square$

Пусть  $C_k = C_k(X)$  и  $C'_k = C_k(Y)$ . Непрерывное отображение  $\varphi: X \rightarrow Y$  индуцирует отображение  $\varphi_k: C_k \rightarrow C'_k$ , а именно сингулярному симплексу  $f: \Delta^k \rightarrow X$  сопоставляется сингулярный симплекс  $\varphi f: \Delta^k \rightarrow Y$ . При этом  $\varphi_{k-1} \partial_k f = \sum (-1)^j \varphi f \varepsilon_j^k = \partial'_k \varphi_k f$ . Из равенства  $\varphi_{k-1} \partial_k = \partial'_k \varphi_k$  следует, что  $\varphi_k(\text{Ker } \partial_k) \subset \text{Ker } \partial'_k$  и  $\varphi_k(\text{Im } \partial_{k+1}) \subset \text{Im } \partial'_{k+1}$ . Поэтому возникает гомоморфизм  $\varphi_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ .

Тождественное отображение  $X \rightarrow X$  индуцирует тождественное отображение  $H_k(X) \rightarrow H_k(X)$ , поэтому гомеоморфизм  $X \rightarrow Y$  индуцирует изоморфизм  $H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ . Это утверждение допускает следующее обобщение: гомотопическая эквивалентность  $X \rightarrow Y$  индуцирует изоморфизм  $H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ . Ещё более общее утверждение таково.

**Теорема 14.3.** Если отображения  $\varphi, \psi: X \rightarrow Y$  гомотопны, то отображения  $\varphi_*, \psi_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$  одинаковы.

**Доказательство.** Так же как и для симплициальных гомологий, можно определить *цепную гомотопию* как семейство гомоморфизмов  $D_k: C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(Y)$ , для которых

$$D_{k-1} \partial_k + \partial'_{k+1} D_k = \varphi_k - \psi_k. \quad (1)$$

Равенство  $\varphi_* = \psi_*$  доказывается точно так же, как и раньше.

Пусть  $H: T \times I \rightarrow Y$  — гомотопия, связывающая  $\varphi$  и  $\psi$ . По этой гомотопии построим цепную гомотопию  $D_k: C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(Y)$ . Для этого поступим следующим образом. Пусть  $f: \Delta^k \rightarrow X$  — сингулярный симплекс. Зададим отображение  $F: \Delta^k \times I \rightarrow Y$  формулой  $F(x, t) = H(f(x), t)$  и по-

ложим  $D_k f = \sum_{i=0}^k (-1)^i F \delta_i^{k+1}$ , где  $\delta_i^{k+1}$  — линейное отображение симплекса  $[0, 1, \dots, k+1]$  на симплекс  $[0_0, \dots, i_0, i^1, \dots, k^1] \subset \Delta^k \times I$ ; здесь  $0_0, \dots, i_0$  — вершины симплекса  $\Delta^k \times \{0\}$ ,  $i^1, \dots, k^1$  — вершины симплекса  $\Delta^k \times \{1\}$ .

Сингулярные цепи  $D_{k-1} \partial_k f$  и  $\partial'_{k+1} D_k f$  представляют собой линейные комбинации сингулярных симплексов, каждый из которых имеет вид  $F\alpha: \Delta^k \rightarrow Y$ , где  $\alpha$  — некоторое отображение симплекса  $[0, \dots, k]$  на симплекс в  $\delta^k \times I$ . Чтобы доказать равенство (1), достаточно выяснить, какие именно симплексы в  $\delta^k \times I$  при этом получаются (с учётом знака). Рассмотрим сначала для примера случай  $k=2$ . При отображении  $D_2$  симплекс  $[0, 1, 2]$  переходит в

$$+0_0 0^1 1^1 2^1 - 0_0 1_0 1^1 2^1 + 0_0 1_0 2_0 2^1,$$

а последующее отображение  $\partial'_3$  переводит эти симплексы в

$$\begin{array}{ccc} +0^1 1^1 2^1 & -1_0 1^1 2^1 & +1_0 2_0 2^1 \\ \underline{-0_0 1^1 2^1} & \underline{+0_0 1^1 2^1} & -0_0 2_0 2^1 \\ +0_0 0^1 2^1 & \underline{\underline{-0_0 1_0 2^1}} & \underline{\underline{+0_0 1_0 2^1}} \\ -0_0 0^1 1^1 & +0_0 1_0 1^1 & -0_0 1_0 2_0. \end{array}$$

Отметим, что одинаково подчёркнутые симплексы взаимно уничтожаются. Это происходит и для произвольного  $k$ : симплекс  $[0_0, \dots, i_0, (i+1)^1, \dots, k^1]$ ,  $i \neq 0, k$ , возникает при уничтожении вершины с номером  $i+2$  симплексов  $(-1)^i [0_0, \dots, i_0, i^1, (i+1)^1, \dots, k^1]$  и  $(-1)^{i+1} [0_0, \dots, i_0, (i+1)_0, (i+1)^1, \dots, k^1]$ ; при этом возникают симплексы противоположного знака.

При отображении  $\partial_2$  симплекс  $[0, 1, 2]$  переходит в  $[1, 2] - [0, 2] + [0, 1]$ , а последующее отображение  $D_1$  переводит эти симплексы в

$$\begin{array}{ccc} +1_0 1^1 2^1 & -0_0 0^1 2^1 & +0_0 0^1 1^1 \\ -1_0 2_0 2^1 & +0_0 2_0 2^1 & -0_0 1_0 1^1. \end{array}$$

В сумме  $\partial'_3 D_2 + D_1 \partial_2$  взаимно уничтожаются все симплексы, кроме симплексов  $+0^1 1^1 2^1$  и  $-0_0 1_1 2_1$ . Эти симплексы соответствуют отображениям  $\varphi f$  и  $\psi f$ . Для произвольного  $k$  нужно убедиться в том, что симплексы вида  $[\dots \hat{j} \dots i_0 i^1 \dots]$  (или  $[\dots i_0 i^1 \dots \hat{j} \dots]$ ) входят в  $\partial'_{k+1} D_k$  и в  $D_{k-1} \partial_k$  ровно по одному разу, причём с противоположными знаками. Это легко проверяется.  $\square$

**Пример 14.1.** Пусть  $X$  — стягиваемое пространство. Тогда  $H_0(X; G) = G$  и  $H_k(X; G) = 0$  при  $k > 0$ .

**Доказательство.** Стягиваемое пространство гомотопически эквивалентно пространству  $*$ , состоящему из одной точки. Поэтому достаточно проверить, что  $H_0(*; G) = G$  и  $H_k(*; G) = 0$  при  $k > 0$ . Для любого  $k \geq 0$  существует единственное отображение  $\Delta^k \rightarrow *$ ; обозначим его  $f_k$ . Ясно, что  $\partial_k f_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i f_{k-1}$  при  $k \geq 1$  и  $\partial_0 f_0 = 0$ . Поэтому  $\partial_{2k-1} f_{2k-1} = 0$  и  $\partial_{2k} f_{2k} = f_{2k-1}$  ( $k \geq 1$ ). Таким образом,  $Z_0 = G$  и  $B_0 = 0$ ;  $Z_{2k-1} = G$  и  $B_{2k-1} = G$ ;  $Z_{2k} = 0$  и  $B_{2k} = 0$ .  $\square$

### 14.1. Теорема о вырезании и точная последовательность Майера—Вьеториса

Относительные и приведённые группы гомологий, а также группы когомологий в сингулярном случае определяются точно так же, как и в симплициальном. Точная гомологическая последовательность пары тоже строится без каких-либо изменений. Но с точной последовательностью Майера—Вьеториса возникает трудность, потому что не любую сингулярную цепь в  $X \cup Y$  можно представить в виде суммы двух сингулярных цепей с носителями в  $X$  и в  $Y$ . Эта трудность принципиальная: для сингулярных гомологий точная последовательность Майера—Вьеториса существует лишь при некоторых ограничениях. Точная последовательность Майера—Вьеториса для сингулярных гомологий тесно связана со следующим утверждением.

**Теорема 14.4** (о вырезании). Пусть множества  $U \subset A \subset X$  таковы, что  $\bar{U} \subset \text{int } A$ . Тогда включение пар  $(X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$  индуцирует изоморфизм  $H_*(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_*(X, A)$ .

**Доказательство.** Пусть  $X_1 = A$  и  $X_2 = X \setminus U$ . Тогда  $\text{int}(X \setminus U) = X \setminus \bar{U} \supset X \setminus \text{int } A$ , поэтому  $\text{int } X_1 \cup \text{int } X_2 = X$ .

**Лемма 1.** Пусть  $X = \text{int } X_1 \cup \text{int } X_2$ . Тогда для любого сингулярного симплекса  $f: \Delta^k \rightarrow X$  можно выбрать число  $m = m(f)$  так, что образ любого симплекса  $m$ -го барицентрического подразделения симплекса  $\Delta^k$  целиком лежит в  $X_1$  или в  $X_2$ .

**Доказательство.** Множества  $f^{-1}(\text{int } X_1)$  и  $f^{-1}(\text{int } X_2)$  образуют открытое покрытие компактного множества  $\Delta^k \subset \mathbb{R}^k$ . Пусть  $\delta$  — число Лебега этого покрытия. Если  $d$  — диаметр симплекса  $\Delta^k$ , то диаметр любого симплекса его  $m$ -го барицентрического подразделения не превосходит  $\left(\frac{k}{k+1}\right)^m d$ . Остаётся выбрать  $m$  так, что  $\left(\frac{k}{k+1}\right)^m d < \delta$ .  $\square$

Каждому сингулярному симплексу  $f: \Delta^k \rightarrow X$  можно сопоставить его барицентрическое подразделение  $\text{sd } f = \sum f_\alpha$ , где  $f_\alpha$  — ограничение отображения  $f$  на симплекс  $\Delta_\alpha^k$ , принадлежащий барицентрическому подразделению симплекса  $\Delta^k$ . Формально сингулярная цепь  $\text{sd } f$  определяется



так. На с. 17 мы определили цепное отображение  $i_k: C_k(K) \rightarrow C_k(K')$ , для которого  $i_k(\Delta^k) = [b, i_{k-1}\partial\Delta^k] = \sum \pm [b, b', b'', \dots, v_i]$ , где  $b$  — барицентр симплекса  $\Delta^k$ ,  $b'$  — барицентр  $(k-1)$ -мерной грани  $\Delta' \subset \Delta^k$ ,  $b''$  — барицентр  $(k-2)$ -мерной грани  $\Delta'' \subset \Delta' \subset \Delta^k$ ,  $\dots$ ,  $v_i$  — вершина симплекса  $\Delta^k$ . Положим  $\text{sd } f = \sum \pm g_\alpha$ , где  $g_\alpha$  — композиция отображений

$$\Delta^k = [v_0, v_1, \dots, v_k] \rightarrow [b, b', b'', \dots, v_i] \xrightarrow{f} X$$

(здесь первая стрелка — гомеоморфизм симплексов, заданных как упорядоченные наборы вершин).

По линейности  $\text{sd}$  можно продолжить до гомоморфизма  $\text{sd}: C_*(X) \rightarrow C_*(X)$ . Отображение  $\text{sd}$  — цепное: равенство  $\partial \text{sd} = \text{sd} \partial$  следует из равенства  $i\partial = \partial i$ .

*Л е м м а 2. Для каждого натурального  $m$  существует семейство гомоморфизмов  $D_k: C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(X)$ , для которых*

- 1)  $\partial_{k+1}D_k c + D_{k-1}\partial_k c = \text{sd}^m c - c$ ;
- 2) носитель\*) цепи  $D_k c$  содержится в носителе цепи  $c$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Положим  $D_0 = 0$ . Гомоморфизм  $D_k$  будем строить, предполагая, что гомоморфизмы  $D_0, \dots, D_{k-1}$  уже построены. Рассмотрим сингулярный симплекс  $\text{id}_k: \Delta^k \rightarrow \Delta^k$  в  $C_k(\Delta^k)$ . Легко проверить, что цепь  $z_k = \text{sd}^m \text{id}_k - \text{id}_k - D_{k-1}\partial_k \text{id}_k$  является циклом. Действительно, по предположению для цепи  $j_{k-1} = \partial_k \text{id}_k$  выполняется равенство

$$\partial_k D_{k-1} j_{k-1} + D_{k-2} \partial_{k-1} j_{k-1} = \text{sd}^m j_{k-1} - j_{k-1},$$

причём  $D_{k-2} \partial_{k-1} j_{k-1} = D_{k-2} \partial_{k-1} \partial_k \text{id}_k = 0$ . Поэтому

$$\partial_k z_k = \partial_k \text{sd}^m \text{id}_k - \partial_k \text{id}_k - \text{sd}^m \partial_k \text{id}_k + \partial_k \text{id}_k = 0,$$

поскольку  $\partial_k \text{sd}^m = \text{sd}^m \partial_k$ .

Мы уже знаем, что  $H_k(\Delta^k) = 0$  при  $k \geq 1$ , поскольку симплекс  $\Delta^k$  — стягиваемое пространство. Следовательно, существует сингулярная цепь  $b_{k+1} \in C_{k+1}(\Delta^k)$ , для которой  $z_k = \partial b_{k+1}$ . Пусть  $b_{k+1} = \sum a_i f_i$ ,  $f_i: \Delta^{k+1} \rightarrow \Delta^k$ . Для произвольного сингулярного симплекса  $f: \Delta^k \rightarrow X$  положим  $D_k f = \sum a_i (f \circ f_i)$ , а затем продолжим отображение  $D_k$  по линейности. Требуемое равенство

$$\partial_{k+1} D_k f + D_{k-1} \partial_k f = \text{sd}^m f - f$$

следует из равенства  $\sum a_i f_i + D_{k-1} \partial_k = \text{sd}^m \text{id}_k - \text{id}_k$ , поскольку  $\partial_{k+1} D_k f = \sum a_k \partial_{k+1} (f \circ f_i)$ .  $\square$

---

\*) Под носителем цепи здесь подразумевается объединение образов всех сингулярных симплексов, входящих в цепь.

Продолжим доказательство теоремы 14.4. Согласно лемме 2 любой относительный цикл  $z_k \in C_k(X, A)$  гомологичен относительно циклу  $\text{sd}^m z_k$ , поскольку  $D_{k-1} \partial_k z_k \in C_k(A)$ . В любой цикл входит лишь конечное число сингулярных симплексов, поэтому согласно лемме 1 для каждого цикла  $z_k$  можно выбрать число  $m$  так, что носитель любого сингулярного симплекса, входящего в  $\text{sd}^m z_k$ , целиком лежит в  $X_1 = A$  или в  $X_2 = X \setminus U$ . Поэтому отображение  $H_*(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_*(X, A)$  — эпиморфизм. Остаётся проверить, что если  $z_k \in C_k(X \setminus U)$  и  $z_k - \partial b \in C_k(A)$  для некоторого  $b \in C_{k+1}(X)$ , то  $z_k - \partial b' \in C_k(A \setminus U)$  для некоторого  $b' \in C_k(X \setminus U)$ .

Пусть  $C_k^{\{X_1, X_2\}}(X)$  — группа, состоящая из сумм цепей из  $C_k(X_1)$  и  $C_k(X_2)$ . По условию  $\partial b \in C_k^{\{X_1, X_2\}}(X)$ . Выберем число  $m$  так, что  $\text{sd}^m b \in C_{k+1}^{\{X_1, X_2\}}(X)$ . Тогда

$$b + \partial D b = \text{sd}^m b - D \partial b \in C_{k+1}^{\{X_1, X_2\}}(X).$$

Пусть  $\text{sd}^m b - D \partial b = b' + b''$ , где  $b' \in C_{k+1}(X_2)$  и  $b'' \in C_{k+1}(X_1)$ . Тогда

$$z_k - \partial b' - \partial b'' = z_k - \partial(b + \partial D b) = z_k - \partial b \in C_k(X_1).$$

При этом  $z_k, \partial b' \in C_k(X_2)$  и  $\partial b'' \in C_k(X_1)$ . Следовательно,

$$z_k - \partial b' \in C_k(X_1) \cap C_k(X_2) = C_k(A) \cap C_k(X \setminus U) = C_k(A \setminus U),$$

что и требовалось.  $\square$

Обратимся теперь к точной последовательности Майера—Вьеториса. Для любых двух множеств  $X_1, X_2 \subset X$  имеет место короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow C_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(j_1, -j_2)} C_*(X_1) \oplus C_*(X_2) \xrightarrow{(i_1, i_2)} C_*^{\{X_1, X_2\}}(X_1 \cup X_2) \longrightarrow 0,$$

где  $C_*^{\{X_1, X_2\}}(X_1 \cup X_2) = C_*(X_1) + C_*(X_2)$  — группа, состоящая из сумм цепей. Эта короткая точная последовательность индуцирует точную последовательность

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_k(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{j_*} H_k(X_1) \oplus H_k(X_2) \xrightarrow{i_*} \\ \xrightarrow{i_*} H_k(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X_1 \cup X_2)) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Если включение  $C_*^{\{X_1, X_2\}}(X_1 \cup X_2) \rightarrow C_*(X_1 \cup X_2)$  индуцирует изоморфизм гомологий, то говорят, что пара  $\{X_1, X_2\}$  удовлетворяет аксиоме вырезания. В таком случае группу  $H_k(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X_1 \cup X_2))$  можно заменить группой  $H_*(X_1 \cup X_2)$ . Точную последовательность гомологий называют при этом *последовательностью Майера—Вьеториса*.

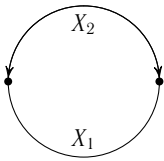


Рис. 37. Полу-  
окружности  
 $X_1$  и  $X_2$

Пример 14.2. Пусть  $X_1$  и  $X_2$  — две полуокружности, причём в  $X_1$  входят обе граничные точки, а в  $X_2$  граничные точки не входят (рис. 37). Тогда для пары  $\{X_1, X_2\}$  точная последовательность Майера—Вьеториса не имеет места.

Доказательство. По условию  $X_1 \cup X_2 = S^1$  и  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ . Поэтому участок  $H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \rightarrow H_1(X_1 \cup X_2) \rightarrow H_1(X_1 \cap X_2)$  имеет вид  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ .  $\square$

По ходу доказательства теоремы о вырезании было показано, что если  $X_1 \cup X_2 = \text{int } X_1 \cup \text{int } X_2$ , то пара  $\{X_1, X_2\}$  удовлетворяет аксиоме вырезания. Доказательство эпиморфности гомоморфизма  $H_*(C_*^{(X_1, X_2)}(X)) \rightarrow H_*(X)$ , где  $X = X_1 \cup X_2$ , там содержится явно, а мономорфность следует из того, что если  $b \in C_{k+1}(X)$  и  $\partial b \in C_k^{(X_1, X_2)}(X)$ , то существует цепь  $d = Db \in C_{k+2}(X)$ , для которой  $b + \partial d \in C_{k+1}^{(X_1, X_2)}(X)$ ; действительно,  $\partial b$  — граница цепи  $b + \partial d$ .

Пример 14.3.  $\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } k = n; \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases}$

Доказательство. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — две различные точки сферы  $S^n$ ,  $X_1 = S^n \setminus \{x_1\}$  и  $X_2 = S^n \setminus \{x_2\}$ . Пространства  $X_1$  и  $X_2$  стягиваемы, поэтому  $\tilde{H}_k(X_i) = 0$  при всех  $k$ .

Множества  $X_1$  и  $X_2$  открыты в  $S^n$ , поэтому пара  $\{X_1, X_2\}$  удовлетворяет аксиоме вырезания. Точная последовательность Майера—Вьеториса даёт изоморфизм

$$\tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^n \setminus \{x_1, x_2\}).$$

При этом  $S^n \setminus \{x_1, x_2\} \sim S^{n-1}$ . Поэтому получаем изоморфизм  $\tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$ . Остаётся заметить, что при  $n = 0$  требуемое утверждение очевидно.  $\square$

Пример 14.4.  $H_k(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } k = n; \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases}$

Доказательство. Точная последовательность пары  $(D^n, S^{n-1})$  показывает, что

$$H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}). \quad \square$$

У п р а ж н е н и е. Докажите, что  $H_k(\Sigma X) \cong \tilde{H}_{k-1}(X)$  для всех  $k \geq 1$  (изоморфизм надстройки).

Задача 14.1. Докажите, что  $H_i(X, Y) \cong H_i(X \cup CY, CY)$ .

Задача 14.2. Докажите, что  $H_i(X, Y) \cong H_i(X \cup CY)$  при  $i \geq 1$ .

Задача 14.3. Пусть  $X$  — связный CW-комплекс,  $Y$  — его подкомплекс. Докажите, что  $H_i(X, Y) \cong \tilde{H}_i(X/Y)$ .

Пусть  $(X_1, A_1)$  и  $(X_2, A_2)$  — две пары топологических пространств, причём  $A_i \subset X_i \subset X$ ,  $i = 1, 2$ . Предположим, что обе пары множеств  $\{X_1, X_2\}$  и  $\{A_1, A_2\}$  удовлетворяют аксиоме вырезания. Тогда имеет место точная последовательность

$$\begin{aligned} \longrightarrow H_k(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \xrightarrow{i_*} H_k(X_1, A_1) \oplus H_k(X_2, A_2) \xrightarrow{i_*} \\ \xrightarrow{i_*} H_k(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \longrightarrow \end{aligned}$$

которую называют *относительной последовательностью Майера—Вьеториса*. Чтобы построить эту последовательность, прежде всего заметим, что отображение относительных гомологий, индуцированное включением

$$\frac{C_*(X_1) + C_*(X_2)}{C_*(A_1) + C_*(A_2)} \longrightarrow \frac{C_*(X_1 \cup X_2)}{C_*(A_1 \cup A_2)},$$

является изоморфизмом. В самом деле, рассмотрим точную гомологическую последовательность пары  $(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$  и соответствующую точную последовательность для гомологий вида  $H_*(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X_1 \cup X_2))$ , которая возникает из очевидной короткой точной последовательности. Естественные включения цепных комплексов индуцируют отображение второй точной последовательности в первую, причём отображения абсолютных гомологий — изоморфизмы. Поэтому из 5-леммы следует, что отображения относительных гомологий тоже изоморфизмы.

Теперь остаётся построить короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \frac{C_*(X_1 \cap X_2)}{C_*(A_1 \cap A_2)} \longrightarrow \frac{C_*(X_1)}{C_*(A_1)} \oplus \frac{C_*(X_2)}{C_*(A_2)} \longrightarrow \frac{C_*(X_1) + C_*(X_2)}{C_*(A_1) + C_*(A_2)} \longrightarrow 0,$$

т. е. нужно проверить, что факторизация короткой точной последовательности по точной подпоследовательности приводит к точной последовательности. Это верно не только для коротких точных последовательностей, но и для любых точных последовательностей. Чтобы доказать это, будем рассматривать точную последовательность как цепной комплекс  $C$ , а её подпоследовательность — как цепной подкомплекс  $C'$ . Точность последовательностей означает, что  $H_*(C) = 0$  и  $H_*(C') = 0$ . Запишем точную последовательность гомологий, индуцированную короткой точной последовательностью  $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C/C' \rightarrow 0$ :

$$H_k(C) \xrightarrow{p_*} H_k(C/C') \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(C').$$

В результате получим  $H_k(C/C') = 0$ , что и требовалось.

### Сингулярные когомологии

Группа *сингулярных когомогий* определяется естественным образом. Пусть  $C_k(X)$  — группа сингулярных цепей с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ .

Тогда  $C^k(X; G) = \text{Hom}(C_k(X), G)$  — группа сингулярных коцепей с коэффициентами в  $G$ . Кограничный оператор  $\delta: C^k(X; G) \rightarrow C^{k+1}(X; G)$  определяется как двойственный к граничному оператору  $\partial: C_{k+1}(X) \rightarrow C_k(X)$ . Затем стандартным образом определяется группа коциклов  $Z^k$ , группа кограниц  $B^k$  и группа когомологий  $Z^k/B^k$ .

Для сингулярных когомологий справедлива теорема, аналогичная теореме о вырезании для сингулярных гомологий. Для её доказательства достаточно заметить, что согласно теореме об универсальных коэффициентах цепное отображение, индуцирующее изоморфизм гомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ , индуцирует также и изоморфизм когомологий.

## 14.2. Аксиомы теории (ко)гомологий

Сингулярные (ко)гомологии — это лишь одна из возможных теорий (ко)гомологий, определённых для всех топологических пространств. Ещё одним примером служат когомологии Чеха. Для симплициальных комплексов обе эти теории дают один и тот же результат, но для более общих топологических пространств результаты могут получиться разными. Помимо когомологий Чеха есть и другие теории (ко)гомологий.

Стинрод и Эйленберг [Ст2] сформулировали аксиомы, которым должна удовлетворять теория (ко)гомологий, и доказали, что любые две теории (ко)гомологий, удовлетворяющие этой системе аксиом и имеющие одну и ту же группу коэффициентов, совпадают на симплициальных комплексах.

Будем говорить, что класс  $\mathcal{A}$  пар  $(X, A)$  топологических пространств *допустимый*, если выполняются следующие условия:

1) если пара  $(X, A)$  входит в  $\mathcal{A}$ , то пары  $(X, X)$ ,  $(X, \emptyset)$ ,  $(A, A)$  и  $(A, \emptyset)$  входят в  $\mathcal{A}$ ;

2) если пара  $(X, A)$  входит в  $\mathcal{A}$ , то пара  $(X \times I, A \times I)$  тоже входит в  $\mathcal{A}$ ;

3) пара  $(*, \emptyset)$ , где  $*$  — одноточечное пространство, входит в  $\mathcal{A}$ .

Теория гомологий определена на допустимом классе пар. Она сопоставляет любой паре  $(X, A)$  из данного допустимого класса и любому целому числу  $n$  абелеву группу  $H_n(X, A)$ . Каждому отображению пар  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  и каждому целому числу  $n$  сопоставляется гомоморфизм  $f_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ . Кроме того, определены граничные гомоморфизмы  $\partial_*: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ , где  $H_{n-1}(A) = H_{n-1}(A, \emptyset)$ . Теория гомологий должна удовлетворять следующим аксиомам (*аксиомы Стинрода—Эйленберга*).

1. Если  $f$  — тождественное отображение, то  $f_*$  — тоже тождественное отображение.

2.  $(gf)_* = g_*f_*$ .

3.  $\partial_* f_* = (f|_A)_* \partial_*$ , т. е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y, B) \\ \downarrow \partial_* & & \downarrow \partial_* \\ H_{n-1}(A) & \xrightarrow{(f|_A)_*} & H_{n-1}(B). \end{array}$$

4. (Аксиома точности.) Пусть  $i: A \rightarrow X$  и  $j: X \rightarrow (X, A)$  — естественные включения. Тогда следующая последовательность точна:

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots$$

5. (Аксиома гомотопии.) Если отображения  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  гомотопны, то для всех  $n$  гомоморфизмы  $f_*$  и  $g_*$  совпадают.

6. (Аксиома вырезания.) Пусть  $U \subset X$  — открытое подмножество, замыкание которого содержится в  $\text{int } A$ . Тогда включение  $(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ , если оно является допустимым отображением, для любого  $n$  индуцирует изоморфизм  $H_n(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_n(X, A)$ .

7. (Аксиома размерности.)  $H_n(*) = 0$  при  $n \neq 0$ . Группу  $H_0(*)$  называют *группой коэффициентов*.

Теория когомологий определена на допустимом классе пар. Она сопоставляет любой паре  $(X, A)$  из данного допустимого класса и любому целому числу  $n$  абелеву группу  $H^n(X, A)$ . Каждому отображению пар  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  и каждому целому числу  $n$  сопоставляется гомоморфизм  $f^*: H^n(Y, B) \rightarrow H^n(X, A)$ . Кроме того, определены кограничные гомоморфизмы  $\delta^*: H^{n-1}(A) \rightarrow H^n(X, A)$ , где  $H^{n-1}(A) = H^{n-1}(A, \emptyset)$ . Теория когомологий должна удовлетворять следующим аксиомам (*аксиомы Стинрода—Эйленберга*).

1. Если  $f$  — тождественное отображение, то  $f^*$  — тоже тождественное отображение.

2.  $(gf)^* = f^* g^*$ .

3.  $\delta^* f^* = (f|_A)^* \delta^*$ , т. е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} H^n(X, A) & \xleftarrow{f^*} & H^n(Y, B) \\ \downarrow \delta^* & & \downarrow \delta^* \\ H^{n-1}(A) & \xleftarrow{(f|_A)^*} & H^{n-1}(B). \end{array}$$

4. (Аксиома точности.) Пусть  $i: A \rightarrow X$  и  $j: X \rightarrow (X, A)$  — естественные включения. Тогда следующая последовательность точна:

$$\dots \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(A) \xrightarrow{\delta^*} H^n(X, A) \xrightarrow{j^*} H^n(X) \xrightarrow{i^*} H^n(A) \xrightarrow{\delta^*} \dots$$

5. (Аксиома гомотопии.) Если отображения  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  гомотопны, то для всех  $n$  гомоморфизмы  $f^*$  и  $g^*$  совпадают.

6. (Аксиома вырезания.) Пусть  $U \subset X$  — открытое подмножество, замыкание которого содержится в  $\text{int } A$ . Тогда включение  $(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ , если оно является допустимым отображением, для любого  $n$  индуцирует изоморфизм  $H^n(X, A) \rightarrow H^n(X \setminus U, A \setminus U)$ .

7. (Аксиома размерности.)  $H^n(*) = 0$  при  $n \neq 0$ . Группу  $H^0(*)$  называют *группой коэффициентов*.

Как выяснилось вскоре после публикации книги Стинрода и Эйленберга, аксиома размерности играет особую роль: для некоторых естественным образом возникающих теорий выполняются все аксиомы Стинрода—Эйленберга, за исключением аксиомы размерности. Такие теории (ко)гомологий называют *экстраординарными* или *обобщёнными*. К ним относятся, например, теория кобордизмов и  $K$ -теория.

### 14.3. Теорема Жордана—Брауэра

Брауэр [Br1]—[Br5] доказал, что если множество  $B \subset \mathbb{R}^n$  гомеоморфно  $S^{n-1}$ , то  $\mathbb{R}^n \setminus B$  состоит из двух связных компонент. В частном случае  $n = 2$  эта теорема была доказана ранее Жорданом\*). Обобщая доказательство теоремы Жордана—Брауэра, Александер получил следующее утверждение.

**Т е о р е м а 14.5** (Александер [A12]). *Если  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  — гомеоморфные замкнутые множества, то  $H_k(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H_k(\mathbb{R}^n \setminus B)$  для всех  $k \geq 0$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о** (см. [Do]). Рассмотрим  $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  и будем считать, что  $A \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$  и  $B \subset \{0\} \times \mathbb{R}^n$ . Тогда  $(\mathbb{R}^{2n} \setminus A) \approx (\mathbb{R}^{2n} \setminus B)$  (часть I, теорема 4.5). Если  $A \neq \mathbb{R}^n$  и  $B \neq \mathbb{R}^n$ , то требуемое утверждение легко вытекает из следующей леммы.

**Л е м м а.** *Если  $A \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутое множество и  $A \neq \mathbb{R}^n$ , то  $\tilde{H}_{k+i}(\mathbb{R}^{n+i} \setminus A) \cong \tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus A)$  для любого  $i \geq 0$  (здесь подразумевается, что  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+i}$ ).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Достаточно рассмотреть случай  $i = 1$ , а затем применить индукцию. Положим  $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ ,

$$X_+ = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid t > 0 \text{ или } x \in \mathbb{R}^n \setminus A\},$$

$$X_- = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid t < 0 \text{ или } x \in \mathbb{R}^n \setminus A\}.$$

Множества  $X_+$  и  $X_-$  открыты в  $X$  и  $X_+ \cup X_- = X$ ,  $X_+ \cap X_- = (\mathbb{R}^n \setminus A) \times \mathbb{R}$ . Запишем точную последовательность Майера—Вьеториса для приведённых гомологий:

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \tilde{H}_{k+1}(X_+) \oplus \tilde{H}_{k+1}(X_-) &\longrightarrow \tilde{H}_{k+1}(X_+ \cup X_-) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \tilde{H}_k(X_+ \cap X_-) \longrightarrow \tilde{H}_k(X_+) \oplus \tilde{H}_k(X_-) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

\*) Доказательство Жордана было не вполне строгим. Первое полное доказательство теоремы Жордана предложил Веблен в 1905 г.

Пространства  $X_+$  и  $X_-$  стягиваемы, поэтому их приведённые гомологии нулевые, а значит,  $\tilde{H}_{k+1}(X_+ \cup X_-) \cong \tilde{H}_k(X_+ \cap X_-)$ , т. е.  $\tilde{H}_{k+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \tilde{H}_k((\mathbb{R}^n \setminus A) \times \mathbb{R}) \cong \tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus A)$ .  $\square$

Если  $A \neq \mathbb{R}^n$ , то согласно лемме  $\tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong \tilde{H}_{k+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus A)$ ; если же  $A = \mathbb{R}^n$ , то мы сможем получить изоморфизм  $\tilde{H}_k(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \tilde{H}_{k+n-1}(\mathbb{R}^{2n} \setminus A)$ . Таким образом, если  $A \neq \mathbb{R}^n$  и  $B \neq \mathbb{R}^n$ , то  $\tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong \tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus B)$ , поэтому  $H_k(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H_k(\mathbb{R}^n \setminus B)$ . Если же  $A = \mathbb{R}^n$ , то  $\tilde{H}_k(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \tilde{H}_k(\mathbb{R}^{n+1} \setminus B)$ . В частности,  $\tilde{H}_0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \tilde{H}_0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus B)$ . Множество  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$  состоит ровно из двух компонент связности, поэтому множество  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus B$  тоже состоит из двух компонент связности. Но это возможно лишь в том случае, когда  $B = \mathbb{R}^n$ .  $\square$

Из теоремы Александера легко выводится следующее утверждение, доказанное Брауэром [Br4].

**Т е о р е м а 14.6** (об инвариантности области). Пусть  $U$  и  $V$  — гомеоморфные подмножества в  $\mathbb{R}^n$ , причём множество  $U$  открыто. Тогда множество  $V$  тоже открыто.

**Доказательство.** Пусть  $v_0 \in V$  — некоторая точка. Требуется доказать, что  $V$  содержит открытое в  $\mathbb{R}^n$  множество, содержащее точку  $v_0$ . Рассмотрим гомеоморфизм  $h: U \rightarrow V$  и положим  $u_0 = h^{-1}(v_0)$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  так, что  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - u_0\| \leq \varepsilon\} \subset U$ . Согласно теореме Александера множество  $\mathbb{R}^n \setminus h(D^n)$  связно, а множество  $\mathbb{R}^n \setminus h(S^{n-1})$ , где  $S^{n-1} = \partial D^n$ , состоит из двух компонент связности. Множества  $\mathbb{R}^n \setminus h(D^n)$  и  $h(D^n) \setminus h(S^{n-1}) = h(\text{int } D^n)$  связны, а их объединение равно  $\mathbb{R}^n \setminus h(S^{n-1})$ . Поэтому именно эти множества являются компонентами связности. В частности, они являются открытыми подмножествами пространства  $\mathbb{R}^n \setminus h(S^{n-1})$ , которое, в свою очередь, является открытым подмножеством в  $\mathbb{R}^n$ . Следовательно, множество  $h(\text{int } D^n) \ni h(u_0) = v_0$  открыто в  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**С л е д с т в и е** (инвариантность края). При гомеоморфизме  $D^n \rightarrow D^n$  точка  $x \in \partial D^n$  не может перейти во внутреннюю точку.

**П р и м е р 14.5.** Пусть  $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ ,  $U = \{(0, t) \mid 2 < t < 3\}$  и  $V = \{(0, t) \mid -1 < t < 1\}$  (рис. 38). Тогда множества  $U$  и  $V$

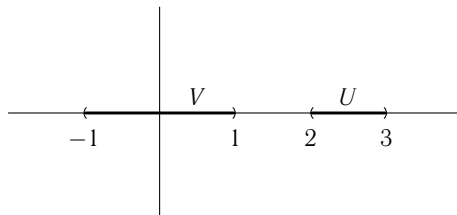


Рис. 38. Неинвариантность области



гомеоморфны и множество  $U$  открыто в  $X$ , но множество  $V$  не открыто в  $X$ .

**Задача 14.4.** Пусть  $U$  и  $V$  — гомеоморфные подмножества пространства  $\mathbb{R}^n$ , причём множество  $U$  замкнуто. Верно ли, что множество  $V$  тоже замкнуто?

#### 14.4. Изоморфизм между симплициальными и сингулярными гомологиями

Если  $K$  — симплициальный комплекс, то для него можно определить как симплициальные, так и сингулярные группы гомологий. Здесь мы докажем, что эти группы изоморфны. При построении цепного отображения, индуцирующего этот изоморфизм, удобно использовать не симплициальный цепной комплекс, а тотальный (упорядоченный) цепной комплекс  $\hat{C}_*(K)$ , группы гомологий которого изоморфны группам симплициальных гомологий (теорема 7.1 на с. 71).

Сопоставим  $k$ -мерному упорядоченному симплексу  $(v_0, \dots, v_k)$  сингулярный симплекс  $f: [0, \dots, k] \rightarrow [v_0, \dots, v_k]$ , где  $f$  — линейное отображение симплексов, переводящее точку  $i$  в точку  $v_i$ . Это сопоставление, продолженное по линейности, определяет гомоморфизм  $j_k: \hat{C}_k(K) \rightarrow C_k(K)$ , где  $C_k(K)$  — сингулярный цепной комплекс. Непосредственно из определений граничных гомоморфизмов в  $\hat{C}_*$  и в  $C_*$  видно, что  $j$  — цепное отображение. Поэтому  $j$  индуцирует гомоморфизм гомологий  $j_*: H_k(\hat{C}_*(K)) \rightarrow H_k(K)$ .

**Теорема 14.7.** *Гомоморфизм  $j_*$  является изоморфизмом.*

**Доказательство.** Сначала мы рассмотрим случай, когда симплициальный комплекс  $K$  конечен. В этом случае доказательство проведём индукцией по  $n$ , где  $n$  — количество всех симплексов всех размерностей в  $K$ . Если  $n = 1$ , то  $K$  состоит из одной точки. Для одноточечного пространства очевиден изоморфизм даже на уровне цепей.

Предположим теперь, что  $j_*$  — изоморфизм для любого симплициального комплекса, содержащего менее  $n$  симплексов. Пусть  $K$  — симплициальный комплекс, содержащий ровно  $n$  симплексов. Рассмотрим в  $K$  симплекс  $\Delta$  максимальной размерности. Симплекс  $\Delta$  не является гранью из  $K$ , поэтому  $K_1 = K \setminus \Delta$  — подкомплекс в  $K$ , содержащий менее  $n$  симплексов.

Для краткости введём обозначение  $\hat{H}_k(K) = H_k(\hat{C}_*(K))$ . Для гомологий  $\hat{H}_k$  можно рассмотреть последовательность Майера—Вьеториса для  $\Delta$  и  $K_1$ . Эта пара пространств не удовлетворяет аксиоме вырезания, поэтому для сингулярных гомологий рассмотрим последовательность Майера—Вьеториса для  $\Delta$  и  $K'_1$ , где  $K'_1 = K_1 \cup (\text{int } \Delta \setminus \{x_0\})$ ,  $x_0 \in \text{int } \Delta$ .

В результате получим следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \hat{H}_{k+1}(\partial\Delta) & \longrightarrow & \hat{H}_k(K) & \longrightarrow & \hat{H}_k(\Delta) \oplus \hat{H}_k(K_1) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \text{изо} & & \downarrow ? & & \downarrow \text{изо} \\
 & & H_{k+1}(\partial\Delta) & & H_k(K) & & H_k(\Delta) \oplus H_k(K_1) \\
 & & \downarrow \text{изо} & & \downarrow \text{изо} & & \downarrow \text{изо} \\
 \dots & \longrightarrow & H_{k+1}(\Delta \setminus \{x_0\}) & \longrightarrow & H_k(K) & \longrightarrow & H_k(\Delta) \oplus H_k(K'_1) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Здесь верхние вертикальные стрелки — отображение  $j_*$ , нижние вертикальные стрелки — изоморфизмы, индуцированные гомотопическими эквивалентностями (или тождественными отображениями). Из 5-леммы следует, что отображение  $j_*: \hat{H}_k(K) \rightarrow H_k(K)$  — изоморфизм (чтобы применить 5-лемму, нужно к написанному выше участку диаграммы дописать по одному члену справа и слева).

Рассмотрим теперь случай, когда симплициальный комплекс  $K$  бесконечен. Для любого  $\alpha \in H_k(K)$  в  $K$  можно выбрать конечный подкомплекс  $L$  так, что  $\alpha$  лежит в образе  $H_k(L)$  при гомоморфизме, индуцированном включением  $L \rightarrow K$ . Следовательно,  $j_*: \hat{H}_k(K) \rightarrow H_k(K)$  — эпиморфизм. Предположим теперь, что  $\hat{\alpha} \in \hat{H}_k(K)$  и  $j_*\hat{\alpha} = 0$ . На уровне цепей это означает, что сингулярная цепь  $c_k \in C_k(K)$ , соответствующая представителю гомологического класса  $\hat{\alpha}$ , является границей некоторой сингулярной цепи  $\alpha_{k+1} \in C_{k+1}(K)$ . Выберем в  $K$  конечный подкомплекс  $L$  так, чтобы он был носителем цепи  $\alpha_{k+1}$ . В  $H_k(L)$  цепь  $c_k$  представляет нулевой класс гомологий, поэтому  $\hat{\alpha} = 0$ , т. е.  $j_*$  — мономорфизм.  $\square$

**Теорема 14.8.** *Если  $U$  — открытое подмножество пространства  $\mathbb{R}^n$ , то  $H_k(U) = 0$  при  $k \geq n$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный сингулярный цикл  $z \in C_k(U)$ ,  $k \geq n$ . Требуется доказать, что  $z = \partial\omega$ , где  $\omega$  — сингулярная цепь в  $U$ . Пусть  $X$  — объединение всех образов сингулярных симплексов, входящих в  $z$ . Множество  $X \subset U$  компактно, поэтому расстояние  $\varepsilon$  между  $X$  и  $\mathbb{R}^n \setminus U$  положительно. Пусть  $K$  — симплекс в  $\mathbb{R}^n$ , содержащий  $U$  и триангулированный столь мелко, что диаметр любого симплекса триангуляции меньше  $\varepsilon$ . Рассмотрим в  $K$  подкомплекс  $L$ , состоящий из всех симплексов, пересекающих  $X$ . Мелкость триангуляции гарантирует, что  $|L| \subset U$ .

Запишем для пары  $(K, L)$  точную последовательность симплициальных гомологий:

$$\dots \longrightarrow H_k(K, L) \longrightarrow H_k(L) \longrightarrow H_k(K) \longrightarrow \dots$$

Здесь  $H_k(K) = 0$ , поскольку  $K \approx \Delta^n$ , и  $H_{k+1}(K, L) = 0$ , поскольку по условию  $k + 1 \geq n + 1 > \dim K$ . Следовательно,  $H_k(L) = 0$ .

Перейдём теперь к сингулярным гомологиям. Для сингулярных гомологий тоже выполняется равенство  $H_k(|L|) = 0$ . По построению  $X \subset |L|$ , поэтому  $z$  — сингулярный цикл в  $|L|$ , а значит,  $z = \partial\omega$ , где  $\omega$  — сингулярная цепь в  $|L| \subset U$ .  $\square$

*З а м е ч а н и е.* Для замкнутого множества аналог теоремы 14.8 неверен. В статье [Ва] построен пример замкнутого подмножества в  $\mathbb{R}^3$  с нетривиальными гомологиями в произвольно высоких размерностях.

Если воспользоваться свойствами нерва покрытия, изложенными в части I, то из теоремы 14.8 можно легко вывести известную теорему Хелли.

**Т е о р е м а 14.9** (Хелли [He1]). *Пусть  $U_1, \dots, U_{n+1}$  — открытые выпуклые множества в  $\mathbb{R}^n$ , любые  $n$  из которых имеют общую точку. Тогда и все эти множества имеют общую точку.*

*Доказательство.* Положим  $X = U_1 \cup \dots \cup U_{n+1}$  и рассмотрим для  $X$  покрытие  $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ . Пусть  $N$  — нерв покрытия  $\mathcal{U}$ . Согласно теореме 8.10 из части I пространство  $X$  гомотопически эквивалентно  $|N|$ . Предположим, что  $U_1 \cap \dots \cap U_{n+1} = \emptyset$ . Тогда  $N$  состоит из  $n$ -мерных граней симплекса  $\Delta^{n+1}$ . Поэтому  $|N| \sim S^n$ ; в частности,  $H_n(X) \cong H_n(|N|) \cong H_n(S^n) \neq 0$ . Это противоречит теореме 14.8.  $\square$

Теорему Хелли (и даже некоторое более общее утверждение, тоже доказанное Хелли) можно вывести из теоремы 14.8, не обращаясь к свойствам нерва покрытия. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

**Л е м м а 14.1.** *Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — ациклические открытые подмножества топологического пространства  $X$ , причём пересечение любых  $r$  из них, где  $1 \leq r \leq m-1$ , ациклично (в частности, непусто). Тогда*

а) *если  $X_1 \cap \dots \cap X_m = \emptyset$ , то группа  $\tilde{H}_q(X_1 \cup \dots \cup X_m)$  отлична от нуля в точности при  $q = m-2$ ;*

б) *если  $X_1 \cap \dots \cap X_m \neq \emptyset$ , то  $\tilde{H}_q(X_1 \cup \dots \cup X_m) \cong \tilde{H}_{q-m+1}(X_1 \cap \dots \cap X_m)$  для всех  $q$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай  $m = 2$ . Если  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ , то  $X_1 \cup X_2$  представляет собой объединение двух непересекающихся ациклических пространств. Поэтому  $\tilde{H}_0(X_1 \cup X_2) \neq 0$  и  $\tilde{H}_q(X_1 \cup X_2) = 0$  при  $q \neq 0$ . Если же  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ , то приведённая последовательность Майера—Вьеториса

$$\begin{aligned} \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) &\longrightarrow \tilde{H}_q(X_1 \cup X_2) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(X_1) \oplus \tilde{H}_{q-1}(X_2) \end{aligned}$$

показывает, что  $\tilde{H}_q(X_1 \cup X_2) \cong \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2)$ , поскольку  $\tilde{H}_{q-1}(X_i) = 0$  для всех  $q$ .

Применим теперь индукцию по  $m$ . По предположению индукции пространство  $U_1 = X_1 \cup \dots \cup X_{m-1}$  ациклично, поскольку  $X_1 \cap \dots \cap X_{m-1} \neq \emptyset$ . Приведённая последовательность Майера—Вьеториса показывает, что  $\tilde{H}_q(U_1 \cup X_m) \cong \tilde{H}_{q-1}(U_1 \cap X_m)$ . При этом  $U_1 \cap X_m = (X_1 \cap X_m) \cup \dots \cup (X_{m-1} \cap X_m)$ . Применим предположение индукции к множествам  $X_1 \cap X_m, \dots, X_{m-1} \cap X_m$ . Ясно, что пересечение  $r$  из этих множеств — это пересечение  $r + 1$  из множеств  $X_1, \dots, X_m$ . Предположим, что  $X_1 \cap \dots \cap X_m = \emptyset$  (это эквивалентно тому, что пересечение рассматриваемых множеств  $X_1 \cap X_m, \dots, X_{m-1} \cap X_m$  пусто). По предположению индукции группа  $\tilde{H}_{q-1}(U_1 \cap X_m)$  отлична от нуля тогда и только тогда, когда  $q - 1 = (m - 1) - 2$ , т. е.  $q = m - 2$ . Предположим теперь, что  $X_1 \cap \dots \cap X_m \neq \emptyset$ . Тогда  $\tilde{H}_{q-1}(U_1 \cap X_m) \cong \tilde{H}_{(q-1)-(m-1)+1}(X_1 \cap \dots \cap X_m)$ . Но  $(q - 1) - (m - 1) + 1 = q - m + 1$ .  $\square$

Теперь мы можем доказать следующее утверждение, частным случаем которого является обычная теорема Хелли.

**Теорема 14.10 (Хелли [He2]).** Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — конечный набор открытых подмножеств  $\mathbb{R}^n$ , причём пересечение любых  $r$  из этих множеств непусто при  $r \leq n + 1$  и ациклично при  $r \leq n$ . Тогда пространство  $X_1 \cap \dots \cap X_m$  ациклично (в частности, непусто).

**Доказательство** (см. [De]). Предположим, что теорема Хелли неверна для набора множеств  $X_1, \dots, X_m$ , причём число  $m$  здесь наименьшее. Из минимальности  $m$  следует, что пересечение любых  $r \leq m - 1$  множеств  $X_1, \dots, X_m$  ациклично.

Рассмотрим сначала случай, когда  $X_1 \cap \dots \cap X_m = \emptyset$ . Это может быть лишь при  $m > n + 1$ . Применяя утверждение а) леммы 14.1, получим  $\tilde{H}_{m-2}(X_1 \cup \dots \cup X_m) \neq 0$ . С другой стороны,  $m - 2 \geq n$ , поэтому согласно теореме 14.8 мы имеем  $\tilde{H}_{m-2}(X_1 \cup \dots \cup X_m) = 0$ . Получено противоречие.

Рассмотрим теперь случай, когда  $X_1 \cap \dots \cap X_m \neq \emptyset$ . По предположению пространство  $X_1 \cap \dots \cap X_m$  не ациклично. Это может быть лишь при  $m > n$ . Существует число  $p \geq 0$ , для которого  $\tilde{H}_p(X_1 \cup \dots \cup X_m) \neq 0$ . Запишем  $p$  в виде  $p = q - m + 1$ . Согласно утверждению б) леммы 14.1 мы имеем  $\tilde{H}_q(X_1 \cap \dots \cap X_m) \neq 0$ . Но  $q = p + m - 1 \geq n$ . Это противоречит теореме 14.8.  $\square$

### Клеточные гомологии

Для произвольного  $CW$ -комплекса  $X$  можно определить клеточные гомологии подобно тому, как это делалось в случае симплициальных комплексов. Только теперь вместо симплициальных гомологий нужно взять сингулярные гомологии. Воспользовавшись задачей 14.3, получаем  $H_i(X^k, X^{k-1}) \cong H_i(X^k/X^{k-1}) \cong H_i(\vee_\alpha S_\alpha^k)$  при  $i \geq 1$ . Поэтому  $H_i(X^k, X^{k-1}) = 0$

при  $i \neq k$ , а при  $i = k$  эта группа — свободная\*) абелева группа, образующие которой находятся во взаимно однозначном соответствии с  $k$ -мерными клетками комплекса  $X$ . Из этого мы получаем, в частности, что  $H_{k+1}(X^k) = 0$ . Действительно, точная последовательность пары

$$\dots \longrightarrow H_{i+1}(X^k, X^{k-1}) \longrightarrow H_i(X^{k-1}) \longrightarrow H_i(X^k) \longrightarrow H_i(X^k, X^{k-1}) \longrightarrow \dots$$

показывает, что  $H_i(X^k) \cong H_i(X^{k-1})$  при  $i \geq k+1$ . Следовательно,  $H_{k+1}(X^k) \cong H_{k+1}(X^{k-1}) \cong \dots \cong H_{k+1}(X^0) = 0$ .

Как и в симплициальном случае, положим  $C_k = H_i(X^k, X^{k-1})$  и определим гомоморфизм  $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ . Снова доказываем, что  $H_{k-1} \cong \cong \text{Ker } \partial_{k-1} / \text{Im } \partial_k$  и  $H_{k-1}(X) \cong H_{k-1}(X^k)$ . При доказательстве последнего изоморфизма нужно воспользоваться тем, что любая сингулярная цепь лежит в некотором конечномерном остове  $X^N$ .

Если воспользоваться клеточными гомологиями, то следующее утверждение становится очевидным. Пусть  $X$  —  $CW$ -комплекс, содержащий  $m_k$  клеток размерности  $k$ . Тогда ранг группы  $H_k(X)$  не превосходит  $m_k$ . Это утверждение нам понадобится при доказательстве неравенств Морса.

### 14.5. Неравенства Морса

Пусть  $M^n$  — замкнутое многообразие,  $f$  — функция Морса на нём с попарно различными критическими значениями. Для каждого  $k = 0, 1, \dots, n$  многообразию можно сопоставить число  $r_k = \text{rk } H_k(M^n)$ , а функции — число  $m_k$ , равное количеству критических точек индекса  $k$ . Эти числа связаны определёнными соотношениями и неравенствами. Прежде всего отметим, что  $\sum (-1)^k r_k = \chi(M^n) = \sum (-1)^k m_k$  (часть I, с. 267). Несложно также доказать неравенство  $r_k \leq m_k$ . Действительно, в комплексе для вычисления клеточных гомологий многообразия  $M^n$  группа цепей  $C_k$  равна  $\mathbb{Z}^{m_k}$  (часть I, теорема 19.8 на с. 271). Ясно, что при факторизации  $\mathbb{Z}^{m_k}$  получается группа, ранг которой не превосходит  $m_k$ . Более внимательное изучение этого цепного комплекса приводит к следующему более точному неравенству.

**Теорема 14.11.** Пусть  $t_k$  — минимальное число образующих группы кручения  $T_k$  в  $H_k(M^n)$ . Тогда

$$r_k + t_k + t_{k-1} \leq m_k.$$

**Доказательство.** Группы  $T_k$  и  $T_{k-1}$  получаются при факторизации свободных абелевых подгрупп  $F_k$  и  $F_{k-1}$  рангов  $t_k$  и  $t_{k-1}$ , содержа-

\*) В этой группе встречаются лишь конечные суммы клеток, поскольку образ симплекса при непрерывном отображении компакта, а любое компактное подмножество  $CW$ -комплекса пересекает лишь конечное число открытых клеток.

щихся в  $C_k$  и  $C_{k-1}$ . При этом для группы  $F_{k-1}$  есть свободная абелева группа  $F'_{k-1} \subset C_k$  ранга  $t_{k-1}$ , эпиморфно отображающаяся на  $F_{k-1}$  при отображении  $\partial_k$ , а для группы  $F_k$  — аналогичная группа  $F'_k \subset C_{k+1}$ .

Рассмотрим в  $C_k$  подгруппы  $F_k$ ,  $F'_{k-1}$  и ещё свободную подгруппу  $S_k$  ранга  $r_k$ , которая лежит в  $\text{Кег } \partial_k$  и пересекается с  $\text{Im } \partial_{k+1}$  только по нулю; эта подгруппа соответствует свободному слагаемому группы  $H_k(M^n)$ . Группа  $F_k$  содержится в  $\text{Im } \partial_{k+1}$ , поэтому сумма  $F_k + S_k$  прямая. Далее,  $\partial_k(F_k \oplus S_k) = 0$ , а  $\partial_k F'_{k-1} = F_{k-1}$ , где  $F'_{k-1}$  и  $F_{k-1}$  — свободные абелевы группы одного ранга. Поэтому сумма  $F'_{k-1} + F_k \oplus S_k$  тоже прямая. Таким образом, группа  $C_k$ , ранг которой равен  $m_k$ , содержит свободную абелеву подгруппу ранга  $t_{k-1} + t_k + r_k$ , поэтому  $t_{k-1} + t_k + r_k \leq m_k$ .  $\square$

Числа  $r_k$  и  $m_k$  связаны также следующей серией неравенств.

**Теорема 14.12.** а) Для каждого  $k = 0, 1, \dots, n$  имеет место неравенство

$$r_k - r_{k-1} + r_{k-2} - \dots \pm r_0 \leq m_k - m_{k-1} + m_{k-2} - \dots \pm m_0$$

(при  $k = n$  неравенство обращается в равенство).

б) Пусть  $M(t) = \sum m_k t^k$  и  $R(t) = \sum r_k t^k$ . Тогда многочлен  $M(t) - R(t)$  делится на  $1+t$ , причём коэффициенты многочлена  $\frac{M(t)-R(t)}{1+t}$  неотрицательны.

**Доказательство.** Легко проверить, что утверждение а) следует из утверждения б). Действительно, пусть  $\sum (m_k - r_k)t^k = \sum (1+t)d_k t^k$ , где  $d_k \geq 0$ . Тогда  $m_0 - r_0 = d_0 \geq 0$ ,  $m_1 - r_1 - (m_0 - r_0) = d_1 \geq 0$ ,  $m_2 - r_2 - (m_1 - r_1) + (m_0 - r_0) = d_2 \geq 0$  и т.д. Ясно также, что  $d_m = 0$ . Таким образом, достаточно доказать утверждение б).

Пусть  $a_1 < a_2 < \dots < a_m$  — критические значения функции  $f$ . Выберем числа  $b_1, \dots, b_{m+1}$  так, что  $-\infty < b_1 < a_1 < b_2 < \dots < a_m < b_{m+1} < \infty$ , и рассмотрим многообразия  $M_p = \{x \in M^n \mid f(x) \leq b_p\}$ ,  $p = 1, 2, \dots, m+1$ . Рассмотрим также многочлены  $R_p(t) = \sum \text{rk } H_k(M_p)t^k$  и  $R_{pq}(t) = \sum \text{rk } H_k(M_p, M_q)t^k$  для  $p > q$ . Запишем точную последовательность пары  $(M_p, M_q)$ :

$$H_{k+1}(M_p, M_q) \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(M^n) \xrightarrow{i} H_k(M_p) \xrightarrow{\pi} H_k(M_p, M_q) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(M_q).$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \text{rk } H_k(M_p, M_q) &= \text{rk Im } \pi + \text{rk Im } \partial_k, \\ \text{rk Im } \pi &= \text{rk } H_k(M_p) - \text{rk Im } i = \text{rk } H_k(M_p) - (\text{rk } H_k(M_q) + \text{rk Im } \partial_k). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\text{rk } H_k(M_p, M_q) - (\text{rk } H_k(M_p) - \text{rk } H_k(M_q)) = \text{rk Im } \partial_k + \text{rk Im } \partial_{k+1},$$

а значит,

$$R_{pq}(t) - (R_p(t) - R_q(t)) = (1+t)d_{pq}(t),$$

где  $d_{pq}$  — многочлен с неотрицательными коэффициентами. Ясно также, что

$$\sum_{p=1}^m (R_{p+1}(t) - R_p(t)) = R_{m+1}(t) = R(t),$$

поэтому остаётся доказать, что  $\sum_{p=1}^m R_{p+1,p}(t) = M(f)$ . Для этого достаточно

проверить, что  $R_{p+1,p}(t) = t^\mu$ , где  $\mu$  — индекс критической точки между уровнями  $f(x) = b_{p+1}$  и  $f(x) = b_p$ . Но  $M_{p+1} \approx M_p \cup (S^\mu \times D^{n-\mu})$ , поэтому  $H_k(M_{p+1}, M_p) \cong H_k(M_p \cup (S^\mu \times D^{n-\mu}), M_p) \cong \tilde{H}_k(S^\mu \times D^{n-\mu}) \cong \tilde{H}_k(S^\mu)$ .  $\square$

## 14.6. Умножения

### Теорема Эйленберга—Зильбера

Теорема Эйленберга—Зильбера заключается в том, что  $H_k(X \times Y) \cong \cong H_k(C_*(X) \otimes C_*(Y))$  для произвольных топологических пространств  $X$  и  $Y$ . К её доказательству, основанному на теореме об ациклических моделях, мы сейчас приступаем.

Пусть  $\mathcal{T}$  — категория топологических пространств и непрерывных отображений;  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$  — категория, объектами которой служат упорядоченные пары топологических пространств  $(X, Y)$ , а морфизмами — упорядоченные пары непрерывных отображений  $f: X \rightarrow X', g: Y \rightarrow Y'$ . Определим два функтора  $T$  и  $T'$  из категории  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$  в категорию неотрицательных цепных комплексов:

- 1) функтор  $T$  сопоставляет паре  $(X, Y)$  сингулярный цепной комплекс  $C_*(X \times Y)$ ;
- 2) функтор  $T'$  сопоставляет паре  $(X, Y)$  тензорное произведение  $C_*(X) \otimes \otimes C_*(Y)$ .

Напомним, что тензорное произведение цепных комплексов определяется так:

$$(C_*(X) \otimes C_*(Y))_k = \bigoplus_{p+q=k} C_p(X) \otimes C_q(Y),$$

$$\partial(c_p \otimes c_q) = \partial c_p \otimes c_q + (-1)^p c_p \otimes \partial c_q.$$

Функторы  $T$  и  $T'$  ациклически\*) относительно моделей  $\mathcal{M} = \{(\Delta^p, \Delta^q)\}$ , где  $p$  и  $q$  пробегает все целые неотрицательные числа. Действительно,

\*) Определение функтора, ациклического относительно моделей, приведено на с. 114.

ацикличность функтора  $T$  очевидна, поскольку пространство  $\Delta^p \times \Delta^q$  стягиваемо. Чтобы доказать ацикличность функтора  $T'$ , достаточно проверить, что если цепные комплексы  $C'_*$  и  $C''_*$  ацикличны, то цепной комплекс  $C'_* \otimes C''_*$  тоже ацикличен. Это легко выводится из алгебраической теоремы Кюннета.

Функтор  $T'$  свободен\*) относительно моделей  $\mathcal{M}$ . Действительно, базисом свободной группы  $C_p(X) \otimes C_q(Y)$  служат сингулярные цепи вида  $c_p \otimes c_q$ , находящиеся во взаимно однозначном соответствии с парами отображений  $f: \Delta^p \rightarrow X$ ,  $g: \Delta^q \rightarrow Y$ . Поэтому в качестве элемента  $e_{p,q} \in C_*(\Delta^p) \otimes C_*(\Delta^q)$  можно взять сингулярную цепь  $\Delta^p \times \Delta^q$ .

Функтор  $T$  свободен относительно моделей  $\{(\Delta^k, \Delta^k)\} \subset \mathcal{M}$ . Действительно, базисом свободной группы  $C_k(X \times Y)$  служат сингулярные цепи, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с отображениями  $F: \Delta^k \rightarrow X \times Y$ . Любое такое отображение задаётся парой отображений  $f: \Delta^k \rightarrow X$ ,  $g: \Delta^k \rightarrow Y$ . Пусть  $d_k: \Delta^k \rightarrow \Delta^k \times \Delta^k$  — диагональное отображение. Тогда  $F$  можно представить в виде композиции отображений  $\Delta^k \xrightarrow{d_k} \Delta^k \times \Delta^k \xrightarrow{(f,g)} X \times Y$ . Поэтому в качестве элемента  $e_k \in C_*(\Delta^k \times \Delta^k)$  можно взять сингулярную цепь, соответствующую отображению  $d_k$ .

Из алгебраической теоремы Кюннета следует, что имеется канонический изоморфизм  $H_0(C_*(X) \otimes C_*(Y)) \cong H_0(X) \otimes H_0(Y)$ . Ясно также, что компоненты линейной связности пространства  $X \times Y$  являются произведениями компонент линейной связности пространств  $X$  и  $Y$ . Поэтому существует естественный изоморфизм  $\varphi: H_0(X) \otimes H_0(Y) \rightarrow H_0(C_*(X) \otimes C_*(Y))$ . Теорему об ацикличных моделях можно применить как к отображению  $\varphi$ , так и к отображению  $\varphi^{-1}$ . В результате получим цепные отображения  $\tau: C_*(X \times Y) \rightarrow C_*(X) \otimes C_*(Y)$  и  $\bar{\tau}: C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(X \times Y)$ , которые в гомологиях размерности 0 индуцируют отображения  $\varphi$  и  $\varphi^{-1}$  соответственно.

Цепное отображение  $\bar{\tau} \circ \tau$  индуцирует тождественное отображение группы  $H_0(X \times Y)$ , поэтому согласно теореме об ацикличных моделях отображение  $\bar{\tau} \circ \tau$  цепно гомотопно тождественному отображению. Аналогично отображение  $\tau \circ \bar{\tau}$  тоже цепно гомотопно тождественному отображению. Следовательно, отображение  $\tau_*: H_*(X \times Y) \rightarrow H_*(C_*(X) \otimes C_*(Y))$  — изоморфизм. В итоге получаем следующее утверждение.

**Т е о р е м а 14.13** (Эйленберг—Зильбер [Е15]). *Для любых топологических пространств  $X$  и  $Y$  группы  $H_k(X \times Y)$  и  $H_k(C_*(X) \otimes C_*(Y))$  изоморфны.*

Объединив теорему Эйленберга—Зильбера с алгебраической теоремой Кюннета, получим *теорему Кюннета* для сингулярных гомологий.

\*) Определение функтора, свободного относительно моделей, приведено на с. 114.



**Теорема 14.14.** *Для любых топологических пространств  $X$  и  $Y$  имеет место изоморфизм*

$$H_k(X \times Y) \cong (H_*(X) \otimes H_*(Y))_k \oplus (\text{Tor}(H_*(X), H_*(Y)))_{k-1}.$$

### Диагональная аппроксимация Александра—Уитни

Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $d: X \rightarrow X \times X$  — диагональное отображение,  $d_*: C_*(X) \rightarrow C_*(X \times X)$  — индуцированное им цепное отображение,  $\tau: C_*(X \times X) \rightarrow C_*(X) \otimes C_*(X)$  — функториальное цепное отображение, индуцирующее изоморфизм гомологий. Рассмотрим композицию отображений

$$C_*(X) \xrightarrow{d_*} C_*(X \times X) \xrightarrow{\tau} C_*(X) \otimes C_*(X).$$

Цепное отображение  $\tau d_*: C_*(X) \rightarrow C_*(X) \otimes C_*(X)$  функториально и переводит любой нульмерный симплекс  $v$  в  $v \otimes v$ . Будем называть любое функториальное цепное отображение  $D_0: C_*(X) \rightarrow C_*(X) \otimes C_*(X)$ , переводящее  $v$  в  $v \otimes v$ , *диагональной аппроксимацией*. Из теоремы об ациклических моделях легко выводится, что любая диагональная аппроксимация цепно гомотопна  $\tau d_*$ . Действительно, функтор  $C_*(X)$  свободен относительно моделей  $\mathcal{M} = \{\Delta^k\}$ , а функтор  $C_*(X) \otimes C_*(X)$  ацикличесен относительно этих моделей.

Для сингулярных когомологий сир-произведение определяется следующим образом. Пусть  $c^p \in C^p(X; R)$  и  $c^q \in C^q(X; R)$ , где  $R$  — некоторое коммутативное кольцо с единицей. Тогда коцепь  $c^p \cup c^q$  принимает на цепи  $c^{p+q} \in C^{p+q}(X; R)$  значение  $\langle c^p \otimes c^q, D_0 c^{p+q} \rangle$ . Здесь имеется в виду, что

$$\langle c^p \otimes c^q, c_i \otimes c_j \rangle = \delta_{pi} \delta_{qj} \langle c^p, c_i \rangle \langle c^q, c_j \rangle.$$

На уровне коцепей сир-произведение зависит от выбора диагональной аппроксимации  $D_0$ , но на уровне когомологий сир-произведение определено инвариантно.

Для вычислений удобно иметь диагональную аппроксимацию, которая задаётся простой формулой. Для этих целей лучше всего подходит *диагональная аппроксимация Александра—Уитни*

$$[0, 1, \dots, n] \mapsto \sum_{i=0}^n [0, \dots, i] \otimes [i, \dots, n];$$

здесь имеется в виду, что  $[0, 1, \dots, n]$  — сингулярный симплекс  $f: [0, 1, \dots, n] \rightarrow X$ , а  $[0, \dots, i]$  и  $[i, \dots, n]$  — ограничения отображения  $f$  на соответствующие грани. Нужно лишь проверить, что это отображение цепное. Это делается точно так же, как и в симплициальном случае (см. с. 116).

Для диагональной аппроксимации Александра—Уитни на уровне коцепей сур-произведение устроено следующим образом:

$$\langle c^p \cup c^q, [0, 1, \dots, p + q] \rangle = \langle c^p, [0, \dots, p] \rangle \langle c^q, [p, \dots, p + q] \rangle.$$

Определим теперь сар-произведение. Коцепь  $c^p \in C^p(X; R)$  можно рассматривать как гомоморфизм  $c^p: C_*(X) \rightarrow R$  (при  $i \neq p$  на  $i$ -мерных цепях гомоморфизм нулевой). Рассмотрим композицию отображений

$$C_*(X) \xrightarrow{D_0} C_*(X) \otimes C_*(X) \xrightarrow{\text{id} \otimes c^p} C_*(X) \otimes R.$$

Домножим это тензорно на  $R$ , а потом ещё применим умножение  $\mu: R \otimes R \rightarrow R$  в кольце  $R$ :

$$\begin{aligned} C_*(X) \otimes R &\xrightarrow{D_0 \otimes \text{id}} C_*(X) \otimes C_*(X) \otimes R \xrightarrow{\text{id} \otimes c^p \otimes \text{id}} \\ &\xrightarrow{\text{id} \otimes c^p \otimes \text{id}} C_*(X) \otimes R \otimes R \xrightarrow{\text{id} \otimes \mu} C_*(X) \otimes R. \end{aligned}$$

Образ цепи  $c_{p+q} \in C_{p+q}(X; R) = C_{p+q}(X) \otimes R$  обозначим  $c^p \frown c_{p+q}$ . На уровне (ко)гомологий сар-произведение не зависит от выбора диагональной аппроксимации  $D_0$ . Для диагональной аппроксимации Александра—Уитни получаем обычное определение сар-произведения:

$$c^p \frown [0, 1, \dots, p + q] = \langle c^p, [q, \dots, p + q] \rangle [0, \dots, q].$$

### Относительный случай

В относительном случае функториальная цепная эквивалентность  $C_*(X \times Y)$  и  $C_*(X) \otimes C_*(Y)$  заменяется на функториальную цепную эквивалентность  $C_*(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$  и  $C_*(X, A) \otimes C_*(Y, B)$ . Но при этом пространства  $\{X \times B, A \times Y\}$  должны удовлетворять аксиоме вырезания. Эта цепная эквивалентность строится следующим образом. Если пространства  $\{X \times B, A \times Y\}$  удовлетворяют аксиоме вырезания, то естественное включение

$$C_*(X \times B) + C_*(A \times Y) \rightarrow C_*((X \times B) \cup (A \times Y))$$

индуцирует изоморфизм гомологий. Значит, естественное отображение

$$\frac{C_*(X \times Y)}{C_*(X \times B) + C_*(A \times Y)} \rightarrow \frac{C_*(X \times Y)}{C_*((X \times B) \cup (A \times Y))}$$

тоже индуцирует изоморфизм гомологий. Далее, функториальная цепная эквивалентность  $C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(X \times Y)$  переводит  $C_*(X) \otimes C_*(B)$

в  $C_*(X \times B)$ , а  $C_*(A) \otimes C_*(Y)$  — в  $C_*(A \times Y)$ . Поэтому получаем цепную эквивалентность между  $\frac{C_*(X \times Y)}{C_*(X \times B) + C_*(A \times Y)}$  и

$$\frac{C_*(X) \otimes C_*(Y)}{C_*(X) \otimes C_*(B) + C_*(A) \otimes C_*(Y)} \cong \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \oplus \frac{C_*(Y)}{C_*(B)}.$$

Композиция этих двух цепных эквивалентностей и есть требуемая цепная эквивалентность.

Используя эту цепную эквивалентность, можно получить *теорему Кюннета* для относительных гомологий:

$$\begin{aligned} H_k(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)) &\cong \\ &\cong (H_*(X, A) \otimes H_*(Y, B))_k \oplus (\text{Tor}(H_*(X, A), H_*(Y, B)))_{k-1}. \end{aligned}$$

Кроме того, можно определить внешнее гомологическое умножение

$$H_p(X, A) \otimes H_q(Y, B) \rightarrow H_{p+q}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$$

и внешнее когомологическое умножение

$$H^p(X, A) \otimes H^q(Y, B) \rightarrow H^{p+q}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)).$$

При построении сир-произведения в относительном случае, т. е. для  $H^p(X, A_1)$  и  $H^q(X, A_2)$ , возникают когомологии комплекса коцепей, обращаящихся в нуль на  $C_*(A_1) + C_*(A_2)$ , а при построении сар-произведения возникают гомологии комплекса  $\frac{C_*(X)}{C_*(A_1) + C_*(A_2)}$ . Поэтому если множества  $\{A_1, A_2\}$  в  $X$  удовлетворяют аксиоме вырезания, то определено сир-произведение

$$H^p(X, A_1) \otimes H^q(X, A_2) \rightarrow H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2)$$

и сар-произведение

$$H^p(X, A_1) \otimes H_{p+q}(X, A_1 \cup A_2) \rightarrow H_q(X, A_2).$$

### Когомологии произведения: частный случай

Теорема Кюннета для когомологий доказывается более сложно, чем для гомологий (более того, она верна лишь при некоторых условиях конечности). Доказывать теорему Кюннета в общем виде мы не будем, но в дальнейшем (при доказательстве теоремы об изоморфизме Тома) для нас будет важен один частный случай теоремы Кюннета, а именно выражение когомологий пары  $(X \times \mathbb{R}^n, X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$  через когомологии пространства  $X$  и когомологии пары  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Для начала вычислим когомологии  $H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

Когомологическая последовательность пары  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  показывает, что  $H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}^{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}^{k-1}(S^{n-1})$ . Поэтому группа  $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  изоморфна аддитивной группе кольца коэффициентов, а все остальные группы  $H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ,  $k \neq n$ , нулевые.

Для краткости введём обозначения  $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ,  $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ . Имеет место изоморфизм вырезания  $H^0(\mathbb{R}_+) \cong \cong H^0(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-)$ . Запишем точную последовательность тройки  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-)$ :

$$H^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-).$$

Покажем, что  $H^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) = H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) = 0$ , а значит,  $\delta$  — изоморфизм. Равенство  $H^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) = 0$  следует из связности пространства  $\mathbb{R}$ , а равенство  $H^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) = 0$  при  $k > 0$  следует из точности последовательности пары  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-)$ :

$$H^k(\mathbb{R}) \longrightarrow H^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) \longrightarrow H^{k+1}(\mathbb{R}_-).$$

Пусть  $e$  — образ элемента  $1 \in H^0(\mathbb{R}_+)$ , соответствующего единичному элементу кольца коэффициентов, при композиции изоморфизмов

$$H^0(\mathbb{R}_+) \cong H^0(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0).$$

Группа  $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)$  изоморфна аддитивной группе кольца коэффициентов, и элемент  $e$  является единицей этого кольца.

Внешнее когомологическое произведение классов когомологий пар  $(X, A)$  и  $(Y, B)$  лежит в когомологиях пары  $(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$ . Будем для краткости обозначать эту пару  $(X, A) \times (Y, B)$ .

Легко проверить, что  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n) \times (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_0^m) = (\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}_0^{n+m})$ . Действительно, пусть  $u \in \mathbb{R}^n$  и  $v \in \mathbb{R}^m$ . Тогда  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^m$  состоит из таких пар  $(u, v)$ , что  $v \neq 0$ , а  $\mathbb{R}_0^n \times \mathbb{R}^m$  состоит из таких пар  $(u, v)$ , что  $u \neq 0$ . Ясно, что объединение этих множеств состоит из ненулевых векторов в  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Рассмотрим элемент  $e^n = \underbrace{e \times \dots \times e}_n$ , который лежит в  $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$ .

**Теорема 14.15.** Пусть  $A \subset X$  — открытое подмножество. Тогда отображение

$$H^k(X, A) \rightarrow H^{k+n}((X, A) \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)),$$

заданное формулой  $\alpha \mapsto \alpha \times e^n$ , является изоморфизмом.

**Доказательство.** Предположим сначала, что  $n = 1$  и  $A = \emptyset$ . Для фиксированного элемента  $\alpha \in H^k(X)$  рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\mathbb{R}_+) & \xleftarrow{\cong} & H^0(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-) & \xrightarrow{\delta} & H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0) \\ \downarrow \alpha \times & & \downarrow \alpha \times & & \downarrow \alpha \times \\ H^k(X) \cong H^k(X \times \mathbb{R}_+) & \xleftarrow{\cong} & H^k(X \times \mathbb{R}_0, X \times \mathbb{R}_-) & \xrightarrow{\delta'} & H^{k+1}(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_0), \end{array}$$

где горизонтальные стрелки в левом квадрате — изоморфизмы вырезания, а  $\delta'$  — гомоморфизм из когомологической последовательности тройки  $(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_0, X \times \mathbb{R}_-)$ . Левый квадрат диаграммы коммутативен, а правый квадрат коммутативен с точностью до знака, поскольку  $\delta'(\alpha \times x) = (-1)^k \alpha \times \delta x$ . Гомоморфизм  $\delta'$  является изоморфизмом, поскольку  $H^i(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_-) = 0$  при  $i > 0$  (оба пространства  $X \times \mathbb{R}$  и  $X \times \mathbb{R}_-$  являются деформационными ретрактами одного и того же пространства  $X \times \{-1\}$ ). В итоге получаем, что элемент  $\alpha \times e \in H^{k+1}(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_0)$  является образом элемента  $\alpha \in H^k(X)$  при композиции изоморфизмов.

Предположим теперь, что  $n = 1$ , но  $A \neq \emptyset$ . Пусть  $z \in Z^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)$  — коцикл, представляющий когомологический класс  $e$ . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^k(X, A) & \longrightarrow & C^k(X) & \longrightarrow & C^k(A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \times z & & \downarrow \times z & & \downarrow \times z \\ 0 & \longrightarrow & C^{k+1}((X, A) \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)) & \longrightarrow & C^{k+1}(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_0) & \longrightarrow & C^{k+1}(A \times \mathbb{R}, A \times \mathbb{R}_0) \longrightarrow 0 \end{array}$$

с точными строками. Вертикальные отображения коцепные, поскольку  $\delta(c \times z) = (\delta c) \times z$ . Поэтому мы получаем коммутативную диаграмму для групп когомологий

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^k(X, A) & \longrightarrow & H^k(X) & \longrightarrow & H^k(A) & \longrightarrow \\ & \downarrow \times e & & \downarrow \times e & & \downarrow \times e & \\ \longrightarrow & H^{k+1}((X, A) \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)) & \longrightarrow & H^{k+1}(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_0) & \longrightarrow & H^{k+1}(A \times \mathbb{R}, A \times \mathbb{R}_0) & \longrightarrow \end{array}$$

Мы уже доказали, что для абсолютных когомологий вертикальные отображения — изоморфизмы. Поэтому из 5-леммы следует, что для относительных когомологий вертикальные отображения тоже изоморфизмы.

Требуемое утверждение для произвольного  $n$  следует из разобранного случая  $n = 1$ , поскольку в силу ассоциативности внешнего умножения  $a \times e^n = (a \times e^{n-1}) \times e$ .  $\square$

## 14.7. Инвариант Хопфа

Интерес к гомотопическим группам сфер возник с тех пор, как Хопф [Но4] привёл пример отображения  $S^3 \rightarrow S^2$ , не гомотопного постоянному. Хопф доказал нетривиальность построенного им отображения, сопоставив каждому отображению  $f: S^3 \rightarrow S^2$  его гомотопический инвариант, ныне называемый инвариантом Хопфа. Затем в [Но6] Хопф определил такой инвариант для отображения  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$  для любого  $n$ . Первоначальные

определения Хопфа использовали коэффициент зацепления. Стиррод [St3] дал определение инварианта Хопфа с помощью умножения в когомологиях.

Пусть  $S^n$  — ориентированная  $n$ -мерная сфера, где  $n \geq 2$ ;  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$  — непрерывное отображение. Будем рассматривать ориентированную сферу  $S^{2n-1}$  как границу ориентированного шара  $D^{2n}$ . Построим пространство  $X_f = S^n \cup_f D^{2n}$ . Гомотопический тип этого пространства зависит только от гомотопического класса отображения  $f$  (часть 1, с. 271). Всюду в этом пункте мы будем рассматривать когомологии с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ . Покажем, что  $H^k(X_f) = \mathbb{Z}$  при  $k = 0, n$  и  $2n$ ; все остальные группы когомологий нулевые. Рассмотрим для этого когомологическую последовательность пары  $(X_f, S^n)$ :

$$\dots \longrightarrow H^k(X_f, S^n) \longrightarrow H^k(X_f) \longrightarrow H^k(S^n) \longrightarrow \dots$$

Теорема о вырезании показывает, что  $H^k(X_f, S^n) \cong H^k(S^{2n})$  при  $k > 0$ . Поэтому при  $k \neq 0, n, 2n$  группа  $H^k(X_f)$  стоит в окружении нулевых групп; при  $k = n$  получаем изоморфизм  $H^n(X_f) \xrightarrow{\cong} H^n(S^n)$ , а при  $k = 2n$  получаем изоморфизм  $H^{2n}(S^{2n}) \xrightarrow{\cong} H^{2n}(X_f)$ .

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — образующие групп  $H^n(X_f)$  и  $H^{2n}(X_f)$ , соответствующие ориентациям сферы  $S^n$  и шара  $D^{2n}$ . Тогда  $\alpha \cup \alpha = H(f)\beta$ , где  $H(f)$  — целое число. Это число называют *инвариантом Хопфа* отображения  $f$ .

Непосредственно из определения видно, что при изменении ориентации сферы  $S^n$  инвариант Хопфа не изменяется, а при изменении ориентации шара  $D^{2n}$  инвариант Хопфа изменяет знак.

**У п р а ж н е н и е.** Даны отображения  $g: S^n \rightarrow S^n$  и  $h: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ . Докажите, что  $H(gf) = (\deg g)^2 H(f)$  и  $H(fh) = (\deg h) H(f)$ .

Если  $n$  нечётно, то  $\alpha \cup \alpha = -\alpha \cup \alpha$ , причём этот элемент лежит в группе  $\mathbb{Z}$ . Поэтому  $\alpha \cup \alpha = 0$ , а значит,  $H(f) = 0$  для любого отображения  $f$ .

Если  $f: S^3 \rightarrow S^2$  — расслоение Хопфа, то  $X_f = \mathbb{C}P^2$ . В этом случае  $\alpha \cup \alpha = \beta$  и  $H(f) = 1$ .

**У п р а ж н е н и е.** Используя кватернионы и числа Кэли, постройте отображения  $f: S^7 \rightarrow S^4$  и  $f: S^{15} \rightarrow S^8$  с инвариантом Хопфа, равным 1.

**З а м е ч а н и е.** Адамс [A] доказал, что отображение  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$  с инвариантом Хопфа, равным 1, существует только для  $n = 2, 4, 8$ .

Инвариант Хопфа можно определить многими разными способами. Приведём ещё одно когомологическое определение инварианта Хопфа (по сути, такое же, но на другом языке). Пусть  $[a]$  и  $[b]$  — образующие групп  $H^n(S^n)$  и  $H^{2n-1}(S^{2n-1})$ , соответствующие ориентациям сфер  $S^n$  и  $S^{2n-1}$ ;  $a$  и  $b$  — представляющие их коциклы. Когомологический класс коцикла  $a \cup a$  лежит в  $H^{2n}(S^n) = 0$ , поэтому существует коцепь  $c \in C^{2n-1}(S^n)$ , для которой  $\delta c = a \cup a$ . Когомологический класс коцикла  $f^\#(a)$  лежит в  $H^n(S^{2n-1}) = 0$ , поэтому существует коцепь  $e \in C^n(S^{2n-1})$ , для кото-

рой  $\delta e = f^\#(a)$ . Легко проверить, что коцепь  $f^\#(c) - e \cup f^\#(a)$  является коциклом. Действительно,  $\delta(f^\#(c) - e \cup f^\#(a)) = f^\#(a \cup a) - \delta(e \cup \delta e) = = f^\#(a) \cup f^\#(a) - \delta e \cup \delta e = 0$ . Поэтому можно рассмотреть когомологический класс коцикла  $f^\#(c) - e \cup f^\#(a)$ . Этот класс лежит в группе  $H^{2n-1}(S^{2n-1})$ , поэтому он пропорционален классу  $[b]$ . Коэффициент пропорциональности — это и есть инвариант Хопфа  $H(f)$ .

Для доказательства эквивалентности этих двух определений инварианта Хопфа мы рассмотрим вспомогательное пространство  $S_f = S^n \cup_f \cup_f (S^{2n-1} \times I)$ , где приклеивание производится по одному основанию цилиндра  $S^{2n-1} \times I$ , и пару  $(S_f, S^{2n-1})$ , в которую входит другое основание цилиндра. Теорема о вырезании показывает, что  $H^k(S_f, S^{2n-1}) \cong \cong H^k(X_f, *) \cong H^k(X_f)$  при  $k \geq 1$ .

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$H^n(S^n) \xrightarrow{\cong} H^n(S_f) \xleftarrow{\cong} H^n(S_f, S^{2n-1}) \xrightarrow{\text{sq}} H^{2n}(S_f, S^{2n-1}) \xleftarrow{\cong} H^{2n-1}(S^{2n-1}).$$

Здесь  $\text{sq}(x) = x \cup x$ , а остальные отображения — естественные изоморфизмы (первый индуцирован проекцией  $p: S_f \rightarrow S^n$ , являющейся гомотопической эквивалентностью, а два других берутся из когомологической последовательности пары). В этой диаграмме довольно легко усмотреть первое определение инварианта Хопфа: класс  $[a]$  посредством двух изоморфизмов отождествляется с классом  $\alpha$ , затем к  $\alpha$  применяется отображение  $\text{sq}(\alpha) = \alpha \cup \alpha$ , и мы получаем класс  $H(f)\beta$ , где  $\beta$  — образ класса  $[b]$  при естественном изоморфизме. Покажем, что если в этой диаграмме перейти на уровень коциклов, то из неё можно получить второе определение инварианта Хопфа.

На уровне коциклов изоморфизм  $p^*$  переводит коцикл  $a$  в  $a_f = p^\#(a)$ . При этом  $f^\#(a)$  — сужение коцикла  $a_f$  на множество сингулярных симплексов  $S^{2n-1}$ , т. е.  $f^\#(a) = i(a_f)$ , где  $i: C^*(S^{2n-1}) \rightarrow C^*(S_f)$  — естественное включение (ограничение функции на подмножество). Аналогично для коцепи  $c \in C^*(S^{2n})$ , для которой  $\delta c = a \cup a$ , рассмотрим  $c_f = p^\#(c)$  и  $f^\#(c) = i(c_f)$ . По условию  $i(a_f) = f^\#(a) = \delta e$  для коцепи  $e \in C^*(S^{2n-1})$ . Пусть  $e'$  — продолжение коцепи  $e$  на  $S_f$ , т. е.  $e = i(e')$ . Разность  $a_f - \delta e'$  представляет собой коцикл в  $C^n(S_f)$ , исчезающий на  $C^n(S^{2n-1})$ . Его можно рассматривать как коцикл в  $C^n(S_f, S^{2n-1})$ ; этот коцикл представляет в  $H^n(S_f, S^{2n-1})$  класс, соответствующий классу  $[a]$ . К нему нужно применить отображение  $\text{sq}$ . В качестве представителя полученного в результате класса можно взять коцикл  $(a_f - \delta e') \cup a_f$ , поскольку на  $C^n(S^{2n-1})$  это произведение исчезает и  $\delta e'$  — кограница.

Ясно, что  $f^\#(c) - e \cup f^\#(a) = i(c_f) - ie' \cup i(a_f) = i(c_f - e' \cup a_f)$ . Поэтому класс коцикла  $f^\#(c) - e \cup f^\#(a)$  отождествляется с классом коцикла  $\delta(c_f - e' \cup a_f) = a_f \cup a_f - (\delta e') \cup a_f = (a_f - \delta e') \cup a_f$ , что и требовалось.

### 14.8. Симплициальный объём (норма Громова)

Пусть  $M^n$  — замкнутое ориентируемое многообразие. Каждой сингулярной цепи  $\sum \alpha_i f_i \in C_k(M^n; \mathbb{R})$  можно сопоставить её норму  $\|\sum \alpha_i f_i\| = \sum |\alpha_i|$ . Эта норма переносится на гомологии  $H_k(M^n; \mathbb{R})$  следующим образом: гомологическому классу  $\zeta \in H_k(M^n; \mathbb{R})$  сопоставляется число

$$\|\zeta\| = \inf\{\|z\| \mid \text{цикл } z \text{ представляет класс } \zeta\}.$$

*Симплициальный объём* или *норма Громова* многообразия  $M^n$  — это  $\|[M^n]\|$ , где  $[M^n] \in H_n(M^n; \mathbb{R})$  — фундаментальный класс многообразия  $M^n$ . Симплициальный объём обозначают  $\|M^n\|$ ; его свойства подробно обсуждаются в [Гг4].

*Пример 14.6.* *Справедливо равенство  $\|S^1\| = 0$ .*

*Доказательство.* Пусть  $f_n: [0, 1] \rightarrow S^1$  — отображение, заданное формулой  $f_n(t) = e^{2\pi i n t}$ . Тогда  $f_n$  — цикл, представляющий гомологический класс  $n[S^1]$ . Поэтому класс  $[S^1]$  представлен циклом  $\frac{1}{n}f_n$ , норма которого равна  $\frac{1}{n}$ . □

Конструкцию из примера 14.6 можно применить для любого замкнутого ориентируемого многообразия  $M^n$ , для которого существует отображение  $M^n \rightarrow M^n$  сколь угодно большой степени. Такие отображение легко строятся, например, для сферы  $S^n$  и для тора  $T^n$  (достаточно построить отображение, степень которого больше 1). Поэтому  $\|S^n\| = 0$  и  $\|T^n\| = 0$ .

*Пример 14.7.* *Если  $M_g^2$  — сфера с  $g$  ручками, где  $g \geq 2$ , то  $\|M_g^2\| = 2|\chi(M_g^2)| = 2(2g - 2)$ .*

*Доказательство.* Многообразие  $M_g^2$  можно склеить из  $4g$ -угольника. Этот  $4g$ -угольник можно разрезать на  $4g - 2$  треугольника. Поэтому

$$\|M_g^2\| \leq 2|\chi(M_g^2)| + 2. \tag{1}$$

Применим неравенство (1) к многообразию  $N^2$ , которое  $n$ -листно накрывает  $M_g^2$ . В результате получим  $n\|M_g^2\| \leq \|N^2\| \leq 2|\chi(N^2)| + 2 = 2|\chi(N^2)| + 2 = 2|n\chi(M_g^2)| + 2$ . При  $n \rightarrow \infty$  получаем  $\|M_g^2\| \leq 2|\chi(M_g^2)|$ .

Докажем теперь неравенство  $\|M_g^2\| \geq 2|\chi(M_g^2)|$ . Пусть  $f: \Delta^2 \rightarrow M_g^2$  — сингулярный двумерный симплекс. Рассмотрим универсальное накрытие  $p: H^2 \rightarrow M_g^2$ , где  $H^2$  — плоскость Лобачевского; будем считать, что  $M_g^2$  — риманово многообразие, на котором метрика согласована с метрикой плоскости Лобачевского. Для отображения  $f$  существует поднятие  $\tilde{f}: \Delta^2 \rightarrow H^2$ , для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & H^2 \\ & \nearrow \tilde{f} & \uparrow p \\ \Delta^2 & \xrightarrow{f} & M_g^2 \end{array}$$



коммутативна. Заменим сингулярный симплекс  $\tilde{f}$  на сингулярный симплекс  $\tilde{f}'$ , образом которого служит треугольник в плоскости Лобачевского с теми же вершинами. Если цикл  $\sum \alpha_i f_i$  представляет фундаментальный класс  $[M_g^2]$ , то цикл  $\sum \alpha_i p(\tilde{f}'_i)$  тоже представляет фундаментальный класс. При этом  $2\pi|\chi(M_g^2)| = \text{vol}(M_g^2) \leq \sum |\alpha_i| \text{vol}(p(\tilde{f}'_i(\Delta^2)))$ , где  $\text{vol}$  — площадь фигуры на плоскости Лобачевского. Неравенство здесь связано с тем, что некоторые перекрывающиеся части симплексов могут взаимно уничтожаться; если бы таких сокращений не было, то мы получили бы равенство. Наконец, площадь любого треугольника на плоскости Лобачевского не превосходит  $\pi$ , поэтому  $\text{vol}(p(\tilde{f}'_i(\Delta^2))) \leq \pi$ . Следовательно,  $2|\chi(M_g^2)| \leq \sum |\alpha_i| \leq \|M_g^2\|$ .  $\square$

Пример 14.7 допускает следующее обобщение. Пусть  $M^n$  — замкнутое ориентируемое *гиперболическое* многообразие, т.е. риманово многообразие, универсальным накрытием над которым служит пространство Лобачевского  $H^n$ . Тогда  $\|M^n\| = \text{vol}(M^n)/\text{vol}(\Delta^n)$ , где  $\Delta^n$  — симплекс максимального объёма в  $H^n$ . Это утверждение доказано Тёрстоном [Th3]; см. также [Mu1].

### 14.9. Когомологии с некоммутативными коэффициентами и теорема ван Кампена

Для неабелевой группы  $G$  в [O1] определены когомологии  $H^0$  и  $H^1$  с коэффициентами в этой группе. Делается это следующим образом. Коцепь  $c^n \in C^n(X; G)$  (произвольной размерности) определяется как функция, которая каждому сингулярному симплексу  $\Delta^n \rightarrow X$  сопоставляет элемент группы  $G$  (относительная коцепь  $c^n \in C^n(X, Y; G)$  должна обращаться в нуль на симплексах  $\Delta^n \rightarrow Y$ ). Групповую операцию по-прежнему будем записывать аддитивно, несмотря на то что она теперь некоммутативна. Назовём одномерную коцепь  $z^1 \in C^1(X, Y; G)$  *коциклом*, если для любого сингулярного симплекса  $f: \Delta^2 \rightarrow X$  выполняется равенство

$$z^1(f\varepsilon_2^0) - z^1(f\varepsilon_1^2) + z^1(f\varepsilon_2^2) = 0,$$

где  $\varepsilon_j^k: \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$  — отображение, определённое на с. 212. Коцепь  $z^0 \in C^0(X, Y; G)$  назовём *коциклом*, если  $z^0(f\varepsilon_1^0) = z^0(f\varepsilon_1^1)$  для любого сингулярного симплекса  $f: \Delta^1 \rightarrow X$ .

Два одномерных коцикла  $z^1$  и  $\bar{z}^1$  назовём *когомологичными*, если существует нульмерная коцепь  $c^0$ , для которой выполняется равенство

$$\bar{z}^1(f) = -c^0(f\varepsilon_1^1) + z^1(f) + c^0(f\varepsilon_1^0)$$

для всех одномерных сингулярных симплексов  $f: \Delta^1 \rightarrow X$ . (Обратите внимание, что переносить  $z^1(f)$  в левую часть нельзя, потому что групповая операция некоммутативна.)

Легко проверить, что когомологичность — отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности — это и есть  $H^1(X, Y; G)$ . Множество  $H^1(X, Y; G)$  не является группой, но содержит отмеченный (нулевой) элемент — класс эквивалентности тривиального коцикла, который на каждом одномерном сингулярном симплексе принимает значение 0. Положим  $H^0(X, Y; G) = Z^0(X, Y; G)$ ; это множество является группой.

Пусть  $X_1$  и  $X_2$  — подмножества в  $X = X_1 \cup X_2$ . Для  $q = 0$  или 1 определим  $H^q(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X, Y); G)$ , рассматривая только те сингулярные симплексы, которые целиком лежат в  $X_1$  или в  $X_2$ . Каждой коцепи можно сопоставить её сужение (ограничение) — коцепь, принимающую значения на части симплексов. Покажем, что если  $X = \text{int } X_1 \cup \text{int } X_2$ , то при  $q = 0$  и 1 такое сопоставление индуцирует взаимно однозначное отображение

$$i^*: H^q(X, Y; G) \rightarrow H^q(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X, Y); G), \quad (1)$$

переводящее нулевой элемент в нулевой элемент.

При  $q = 0$  это утверждение очевидно. Действительно, в одном случае коциклы принимают равные значения в концах любой кривой, а в другом — в концах любой кривой, целиком лежащей в  $X_1$  или в  $X_2$ . Но любую кривую можно разбить на части, которые целиком лежат в  $\text{int } X_1$  или в  $\text{int } X_2$ .

Чтобы доказать требуемое утверждение при  $q = 1$ , построим отображение

$$k: Z^1(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X, Y); G) \rightarrow Z^1(X, Y; G).$$

Пусть  $z^1$  — произвольный коцикл, значения которого определены только на симплексах в  $X_1$  и в  $X_2$ ,  $f: \Delta^1 \rightarrow X$  — произвольный сингулярный симплекс. Чтобы определить значение  $k(z^1)$  на  $f$ , разделим отрезок  $\Delta^1$  на  $M = 2^m$  равных отрезков  $I_1, \dots, I_M$  (отрезки занумерованы по порядку). Если  $m$  достаточно велико, то любой отрезок  $I_\alpha$  целиком лежит в  $X_1$  или в  $X_2$ . В таком случае положим  $k(z^1)(f) = z^1(f|_{I_1}) + \dots + z^1(f|_{I_M})$ . Корректность этого определения следует из того, что  $z^1$  — коцикл. Действительно, если отрезок  $I$ , целиком лежащий в  $X_1$  или в  $X_2$ , разбит на отрезки  $I'$  и  $I''$ , то  $z^1(f|_{I'}) - z^1(f|_I) + z^1(f|_{I''}) = 0$ .

Проверим, что  $k(z^1)$  — коцикл. Рассмотрим произвольный сингулярный симплекс  $f: \Delta^2 \rightarrow X$ . Выберем  $m$  так, что образ ограничения  $f$  на любой симплекс  $m$ -го барицентрического подразделения целиком лежит в  $X_1$  или в  $X_2$ . Тогда для каждого симплекса  $m$ -го барицентрическо-

го подразделения выполнено условие коцикличности. Покажем, что из этого следует, что условие коцикличности выполняется и для симплексов  $(m - 1)$ -го барицентрического подразделения. Сложим условия коцикличности для симплексов 1, 2, ..., 6 (рис. 39). В результате получим

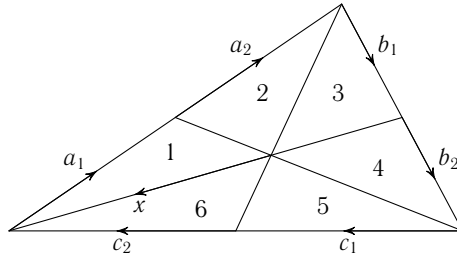


Рис. 39. Сложение условий коцикличности

$x + a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 - x = 0$  (здесь  $a_i$  — значение коцикла на симплексе  $a_i$  и т. п.). В любой группе элемент, с которым сопряжён нейтральный элемент, сам является нейтральным. Поэтому  $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 0$ . Кроме того, по построению значение коцикла  $k(z^1)$  на отрезке  $I$ , разбитом на два равных отрезка  $I'$  и  $I''$ , равно сумме значений  $k(z^1)$  на  $I'$  и на  $I''$ .

Ясно, что  $k$  переводит когомологичные коциклы в когомологичные. Поэтому получаем отображение

$$k^* : H^1(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X, Y); G) \rightarrow H^1(X, Y; G).$$

Непосредственно из определений видно, что  $k^*i^* = \text{id}$  и  $i^*k^* = \text{id}$ .

Утверждение о том, что отображение (1) взаимно однозначно, является аналогом аксиомы вырезания для когомологий с некоммутативными коэффициентами. Получим теперь аналог последовательности Майера—Вьеториса. Пусть  $X_1$  и  $X_2$  — подмножества в  $X = X_1 \cup X_2$ ,  $x_0 \in X_1 \cap X_2$  — некоторая точка. Мы будем предполагать, что естественное отображение

$$i^* : H^q(X, Y; G) \rightarrow H^q(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X, Y); G)$$

взаимно однозначно. Это свойство выполняется, например, если  $X = \text{int } X_1 \cup \text{int } X_2$ .

Непрерывное отображение  $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ , как и для обычных когомологий, индуцирует отображение  $f^* : H^q(X', Y'; G) \rightarrow H^q(X, Y; G)$ , где  $q = 0$  или 1, переводящее отмеченный элемент в отмеченный элемент.

Аналогично возникают отображения

$$\begin{array}{ccc} H^1(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X, X_2); G) & \xrightarrow{l_1^*} & H^1(X_1, X_1 \cap X_2; G) \\ & & \downarrow l_2^* \\ & & H^1(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X, x_0); G) \end{array}$$

При этом отображение  $l_1^*$  взаимно однозначно, поскольку коцепи, принимающие значения на симплексах в  $X_1$  и в  $X_2$  и обращающиеся в нуль на всех симплексах в  $X_2$ , — это, по сути, то же самое, что коцепи, принимающие значения на симплексах в  $X_1$  и обращающиеся в нуль на всех симплексах в  $X_1 \cap X_2$ .

Для тройки пространств  $Z \subset Y \subset X$  можно определить отображение  $\delta: H^0(Y, Z; G) \rightarrow H^1(X, Y; G)$  следующим образом. Для данного коомологического класса  $\alpha^0 \in H^0(Y, Z; G)$  определим коцепь  $c^0 \in C^0(X, Y; G)$ , полагая  $c^0(x) = \alpha^0(x)$  для  $x \in Y$  и  $c^0(x) = 0$  для  $x \notin Y$ . Затем определим коцикл  $z^1 \in Z^1(X, Y; G)$ , полагая  $z^1(f) = -c^0(f\varepsilon_1^1) + c^0(f\varepsilon_0^1)$  для любого сингулярного симплекса  $f: \Delta^1 \rightarrow X$ .

Рассмотрим диаграмму отображений

$$\begin{array}{ccccc} H^0(X_1 \cap X_2, x_0; G) & \xrightarrow{\Delta} & H^1(X_1 \cup X_2, x_0; G) & \xrightarrow{i_1^*} & H^1(X_1, x_0; G) \\ & & i_1^* \downarrow & & \downarrow j_1^* \\ & & H^1(X_2, x_0; G) & \xrightarrow{i_2^*} & H^1(X_1 \cap X_2, x_0; G), \end{array} \quad (2)$$

где отображения  $i_\alpha^*$  и  $j_\alpha^*$  индуцированы включениями, а отображение  $\Delta$  определяется как следующая композиция отображений:

$$\begin{array}{ccc} H^0(X_1 \cap X_2, x_0; G) & & H^1(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X, x_0); G) \xrightarrow{\cong} H^1(X, x_0; G) \\ \downarrow \delta & & \uparrow l_2^* \\ H^1(X_1, X_1 \cap X_2; G) & \xrightarrow[\cong]{(l_1^*)^{-1}} & H^1(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X, X_2); G). \end{array}$$

Для отображения в множество с отмеченным элементом можно определить ядро как прообраз отмеченного элемента.

**Теорема 14.16.** а) *Справедливо равенство  $\text{Ker } i_1^* \cap \text{Ker } i_2^* = \text{Im } \Delta$ .*

б) *Пусть  $a \in H^1(X_1, x_0; G)$  и  $b \in H^1(X_2, x_0; G)$ . Тогда равенство  $j_1^*(a) = j_2^*(b)$  эквивалентно тому, что существует элемент  $c \in H^1(X_1 \cup X_2, x_0; G)$ , для которого  $i_1^*(c) = a$  и  $i_2^*(c) = b$ . Более того, если  $H^0(X_1 \cap X_2, x_0; G) = 0$ , то такой элемент  $c$  определён однозначно.*

**Доказательство.** Рассмотрим вместо  $\Delta$  отображение  $\Delta' = (l_2^*(l_1^*)^{-1})\delta$  (из композиции отображений, составляющих  $\Delta$ , мы убираем последний изоморфизм). Требуемое утверждение достаточно доказать для

диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(X_1 \cap X_2, x_0) & \xrightarrow{\Delta'} & H^1(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X, x_0)) \xrightarrow{(i_1')^*} H^1(X_1, x_0) \\
 & & \downarrow (i_2')^* \qquad \qquad \downarrow j_1^* \\
 & & H^1(X_2, x_0) \xrightarrow{j_2^*} H^1(X_1 \cap X_2, x_0)
 \end{array} \quad (3)$$

(для краткости в обозначениях мы убрали группу коэффициентов  $G$ ).

Оба множества  $\text{Im } \Delta'$  и  $\text{Ker}(i_1')^* \cap \text{Ker}(i_2')^*$  состоят из классов эквивалентности коциклов, обращающихся в нуль на одномерных симплексах, целиком лежащих в  $X_1 \cap X_2$ . То, что равенство  $j_1^*(a) = j_2^*(b)$  эквивалентно существованию элемента  $c' \in H^1(C_*^{\{X_1, X_2\}}(X, x_0))$ , для которого  $(i_1')^*(c') = a$  и  $(i_2')^*(c') = b$ , проверяется непосредственно. Равенство  $H^0(X_1 \cap X_2, x_0) = 0$  означает, что пространство  $X_1 \cap X_2$  линейно связно (если  $G \neq 0$ ). Единственность элемента  $c'$  следует из линейной связности пространства  $X_1 \cap X_2$ .  $\square$

Теорема 14.16 позволяет получить наиболее общую версию теоремы ван Кампена о фундаментальной группе объединения двух множеств. Для этого нам понадобится определение амальгамы групп, сформулированное двойственным образом. А именно, группа  $G$  является амальгамой двух групп  $G_1$  и  $G_2$  по отношению к группе  $G_0$  и гомоморфизмам  $\varphi_1: G_0 \rightarrow G_1$  и  $\varphi_2: G_0 \rightarrow G_2$ , если коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 0 \longrightarrow \text{Hom}(G, G') & \xrightarrow{\psi_1^*} & \text{Hom}(G_1, G') \\
 \psi_2^* \downarrow & & \downarrow \varphi_1^* \\
 \text{Hom}(G_2, G') & \xrightarrow{\varphi_2^*} & \text{Hom}(G_0, G')
 \end{array}$$

точна для любой группы  $G'$ . Это определение эквивалентно определению амальгамы, приведённому в части I.

**Теорема 14.17** (Олум [Ол]). Пусть пространства  $U_1, U_2$  и  $U_1 \cap U_2$  линейно связны и  $x_0 \in U_1 \cap U_2$ . Группа  $\pi_1(U_1 \cup U_2, x_0)$  является амальгамой групп  $\pi_1(U_1, x_0)$  и  $\pi_1(U_2, x_0)$  по отношению к группе  $\pi_1(U_1 \cup U_2, x_0)$  и гомоморфизмам, индуцированным включениями  $U_1 \cap U_2 \rightarrow U_1$  и  $U_1 \cap U_2 \rightarrow U_2$ , тогда и только тогда, когда естественное отображение

$$i^*: H^1(U_1 \cup U_2, x_0; G') \rightarrow H^1(C_*^{\{U_1, U_2\}}(U_1 \cup U_2, x_0); G')$$

взаимно однозначно для любой группы  $G'$ .

**Доказательство.** Предположим сначала, что отображение  $i^*$  взаимно однозначно для любой группы  $G'$ . Тогда имеет место коммутативная диаграмма (2) (с заменой  $G$  на  $G'$ ). Кроме того, из условия линейной связности пространства  $U_1 \cap U_2$  получаем, что  $H^0(U_1 \cup U_2, x_0; G') = 0$ .

Пусть  $X$  — линейно связное пространство и  $x_0 \in X$ . Возьмём элемент  $\omega \in \pi_1(X, x_0)$  и рассмотрим последовательность одномерных симплексов  $\Delta_1^1, \dots, \Delta_k^1$ , которые составляют петлю, лежащую в гомотопическом классе  $\omega$ . Для  $z^1 \in Z^1(X, x_0; G')$  положим  $z^1(\omega) = z^1(\Delta_1^1) + \dots + z^1(\Delta_k^1)$ . Легко проверить, что  $z^1(\omega)$  действительно зависит только от гомотопического класса петли и, более того,  $z^1(\omega)$  зависит только от когомологического класса цикла  $z^1$ , т. е. мы получаем отображение  $H^1(X, x_0; G') \rightarrow \text{Ном}(\pi_1(X, x_0), G')$ . Это отображение взаимно однозначно. Применяя теорему 14.16 и заменив  $H^1$  на  $\text{Ном}$ , получаем, что  $\pi_1(U_1 \cup U_2, x_0)$  — амальгама.

Предположим теперь, что  $\pi_1(U_1 \cup U_2, x_0)$  — амальгама. Заменив  $\text{Ном}$  на  $H^1$ , получим точную коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow H^1(U_1 \cup U_2, x_0; G') & \xrightarrow{i_1^*} & H^1(U_1, x_0; G') \\ & & \downarrow i_1^* \\ & i_2^* \downarrow & \\ & H^1(U_2, x_0; G) & \xrightarrow{j_2^*} & H^1(U_1 \cap U_2, x_0) \end{array}$$

для любой группы  $G'$ . Сравнивая её с (3), где  $X_i$  заменено на  $U_i$ , получаем, что отображение  $i^*$  взаимно однозначно. □

## § 15. Изоморфизмы Пуанкаре и Лefшеца для топологических многообразий

Для топологических многообразий изоморфизм Пуанкаре тоже имеет место, но его доказательство требует привлечения совсем других методов, потому что не любое топологическое многообразие триангулируемо. Приводимые ниже доказательства изоморфизмов Пуанкаре и Лefшеца следуют в основном [Sa1] и [Ви].

### 15.1. Фундаментальный класс

Прежде чем заняться построением фундаментального класса для топологических многообразий, мы докажем теорему об обращении в нуль  $k$ -мерных гомологий топологического многообразия  $M^n$  при  $k > n$  и теорему об обращении в нуль  $n$ -мерных гомологий некомпактного топологического многообразия  $M^n$  без края. Последняя теорема нужна для построения фундаментального класса.

**Теорема 15.1.** *Если  $M^n$  — топологическое многообразие, то  $H_k(M^n) = 0$  при  $k > n$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный сингулярный цикл  $z_k \in Z_k(M^n)$ . Объединение образов сингулярных симплексов, входящих в  $z_k$ , — компактное множество, поэтому оно содержится в объединении конечного набора открытых множеств  $U_1, \dots, U_m$ , каждое из которых гомеоморфно открытому множеству в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $V_j = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_j$ . Покажем, что  $H_k(V_j) = 0$ . При  $j = 1$  это следует из теоремы 14.8. При  $j > 1$  рассмотрим точную последовательность Майера—Вьеториса для  $V_{j-1} \cup U_j = V_j$ :

$$\dots \longrightarrow H_k(V_{j-1}) \oplus H_k(U_j) \longrightarrow H_k(V_j) \longrightarrow H_{k-1}(V_{j-1} \cap U_j) \longrightarrow \dots$$

Множества  $U_j$  и  $V_{j-1} \cap U_j$  гомеоморфны открытым множествам в  $\mathbb{R}^n$ , поэтому  $H_k(U_j) = 0$  и  $H_{k-1}(V_{j-1} \cap U_j) = 0$ . Кроме того,  $H_k(V_{j-1}) = 0$  по предположению индукции. Поэтому  $H_k(V_j) = 0$ . Это означает, что  $z^k$  — граница сингулярной цепи в  $V_j \subset M^n$ .  $\square$

Для связных некомпактных многообразий теорему 15.1 можно усилить:  $H_k(M^n) = 0$  при  $k \geq n$ . Чтобы доказать это, нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 15.1.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) — открытое множество,  $\alpha \in H_n(\mathbb{R}^n, U)$ . Предположим, что для всех точек  $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$  выполняется равенство  $(i_x)_*(\alpha) = 0$ , где  $i_x: (\mathbb{R}^n, U) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$  — естественное включение. Тогда  $\alpha = 0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим точную последовательность пары  $(\mathbb{R}^n, U)$ :

$$\dots \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n, U) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(U) \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \dots$$

Здесь  $\partial_*$  — изоморфизм, поэтому достаточно доказать, что  $\partial_*\alpha = 0$ . Пусть  $z \in Z_{n-1}(U)$  — цикл, представляющий гомологический класс  $\partial_*\alpha$ . Носитель цепи  $z$  компактен, поэтому можно выбрать открытое множество  $V$  так, что  $\bar{V} \subset U$ , множество  $\bar{V}$  компактно и носитель цепи  $z$  содержится в  $V$ . Следовательно, в  $H_{n-1}(V)$  есть элемент  $\beta$ , для которого  $i_*\beta = \partial_*\alpha$ , где  $i: V \rightarrow U$  — естественное включение.

Пользуясь компактностью множества  $\bar{V}$ , выберем в  $\mathbb{R}^n$  открытый куб  $Q$  так, чтобы он содержал  $V$ , и положим  $K = Q \setminus (Q \cap V)$ . Тогда  $\bar{K} \cap \bar{V} = \emptyset$ , поэтому для каждой точки  $x \in K$  можно выбрать замкнутый куб  $P$  так, что  $x \in P$  и  $P \cap V = \emptyset$ . Компактное множество  $\bar{K}$  можно покрыть конечным числом таких кубов  $P_1, \dots, P_m$ .

По условию  $(i_x)_*\alpha = 0$ , поэтому коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H_{n-1}(V) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(U) & \xleftarrow{\partial_*} & H_n(\mathbb{R}^n, U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow (i_x)_* \\ H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) & \xleftarrow{\cong} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \end{array}$$

показывает, что образ элемента  $\beta$  при гомоморфизме включения  $H_{n-1}(V) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$  — нулевой элемент.

Покажем теперь, что образ элемента  $\beta$  при гомоморфизме включения  $H_{n-1}(V) \rightarrow H_{n-1}\left(Q \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i\right)$  — тоже нулевой элемент. Рассмотрим множества  $Q_k = Q \setminus \bigcup_{i=1}^k P_i$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) и применим индукцию по  $k$ .

При  $k = 0$  утверждение очевидно, поскольку  $Q_0 = Q$  и  $H_{n-1}(Q) = 0$ . Чтобы сделать шаг индукции, рассмотрим точную последовательность Майера—Вьеториса для  $Q$  и  $\mathbb{R}^n \setminus P_{k+1}$  (это можно сделать, поскольку оба множества открыты):

$$H_n(Q \cup (\mathbb{R}^n \setminus P_{k+1})) \longrightarrow H_{n-1}(Q_{k+1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(Q) \oplus H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus P_{k+1}).$$

Множество  $Q \cup (\mathbb{R}^n \setminus P_{k+1})$  открытое, поэтому его  $n$ -мерная группа гомологий нулевая. Значит,  $j_*$  — мономорфизм. Остаётся заметить, что образы элемента  $\beta$  при гомоморфизмах, индуцированных включениями  $V \rightarrow Q_k$  и  $V \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus P_{k+1}$ , — нулевые элементы. Для первого гомоморфизма это верно согласно предположению индукции, а для второго — потому что  $H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus P_{k+1}) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ .

Множество  $Q_m$  содержится в  $U$ , поэтому гомоморфизм  $H_{n-1}(V) \rightarrow H_{n-1}(U)$  представляется в виде композиции гомоморфизмов  $H_{n-1}(V) \rightarrow H_{n-1}(Q_m) \rightarrow H_{n-1}(U)$ . Образ элемента  $\beta$  при первом гомоморфизме — нулевой элемент. Поэтому  $i_*\beta = 0$ , т. е.  $\partial_*\alpha = 0$ .  $\square$

Точная последовательность пары  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  показывает, что  $H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H_k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H_{k-1}(S^{n-1})$  при всех  $k > 1$ . Поэтому  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$  и  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$  при  $n \geq 2$ .

Если  $U$  — открытая карта, гомеоморфная  $\mathbb{R}^n$  и содержащая точку  $x \in \mathbb{R}^n$ , то  $H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) \cong H_n(U, U \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$  (или  $\mathbb{Z}_2$  в случае коэффициентов в  $\mathbb{Z}_2$ ). Чтобы доказать это, достаточно применить теорему о вырезании к множествам  $M^n \setminus U \subset M^n \setminus \{x\} \subset M^n$ . (Условие  $M^n \setminus U \subset M^n \setminus \{x\}$  выполняется, поскольку  $M^n \setminus U = M^n \setminus U$  и  $x \in U$ .)

Группы  $H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$  играют важную роль в построении фундаментального класса.

**Теорема 15.2.** *Если  $M^n$  — связное некомпактное многообразие без края, то  $H_n(M^n) = 0$ .*

**Доказательство.** Покажем, что для любой точки  $x \in M^n$  гомоморфизм  $p_*: H_n(M^n) \rightarrow H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$  нулевой. Пусть  $[z_n]$  — класс гомологий, представленный циклом  $z_n \in Z_n(M^n)$ ,  $C$  — компактный носитель цикла  $z_n$ . Предположим сначала, что  $x \in M^n \setminus C$ . Тогда цикл  $z_n$  является образом некоторого цикла  $\tilde{z}_n$  при гомоморфизме  $i_\#: Z_n(M^n \setminus \{x\}) \rightarrow Z_n(M^n)$ .



Поэтому  $p_*[z_n] = p_*i_*[\tilde{z}_n] = 0$ , поскольку  $p_*i_* = 0$ . Предположим теперь, что  $x \in C$ . По условию многообразие  $M^n$  некомпактно. В частности,  $M^n \neq C$ . Поэтому можно выбрать точку  $y \in M^n \setminus C$ . Рассмотрим гомеоморфизм  $h: M^n \rightarrow M^n$ , который изотопен тождественному и переводит  $x$  в  $y$  (такой гомеоморфизм существует для любого связного топологического многообразия без края; это доказывается точно так же, как и для гладких многообразий: часть I, лемма об однородности многообразий). Гомеоморфизм  $h$  индуцирует гомеоморфизм  $M^n \setminus \{x\} \rightarrow M^n \setminus \{y\}$ , поэтому имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_n(M^n) & \xrightarrow{(p_x)_*} & H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) \\ h_* = \text{id} \downarrow & & \downarrow h_* \\ H_n(M^n) & \xrightarrow{(p_y)_*} & H_n(M^n, M^n \setminus \{y\}). \end{array}$$

Равенство  $(p_x)_* = 0$  следует из равенства  $(p_y)_* = 0$ .

Как и при доказательстве теоремы 15.1, мы будем рассматривать каждый сингулярный цикл  $z_n \in Z_n(M^n)$  отдельно, а в таком случае вместо  $M^n$  можно рассматривать конечное объединение открытых координатных окрестностей  $U_1, \dots, U_m$ , гомеоморфных  $\mathbb{R}^n$ . Положим  $V_k = \bigcup_{i=1}^k U_i$  и покажем, что цикл  $z_n$  является границей некоторого цикла в  $V_m$ , т. е.  $H_n(V_m) = 0$ .

Применим индукцию по  $k$ . При  $k = 1$  утверждение очевидно, поскольку  $U_1$  стягиваемо. Чтобы сделать шаг индукции, рассмотрим последовательность Майера—Вьеториса для двух открытых множеств  $V_k$  и  $U_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} H_n(V_k) \oplus H_n(U_{k+1}) &\longrightarrow H_n(V_{k+1}) \longrightarrow H_{n-1}(V_k \cap U_{k+1}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_{n-1}(V_k) \oplus H_{n-1}(U_{k+1}). \end{aligned}$$

По предположению индукции  $H_n(V_k) = 0$ . Кроме того, из стягиваемости множества  $U_{k+1}$  следует, что  $H_n(U_{k+1}) = 0$  и  $H_{n-1}(U_{k+1}) = 0$ . Поэтому равенство  $H_n(V_{k+1}) = 0$  эквивалентно мономорфности гомоморфизма  $i_*: H_{n-1}(V_k \cap U_{k+1}) \rightarrow H_{n-1}(V_k)$ .

Предположим, что  $\beta \in H_{n-1}(V_k \cap U_{k+1})$  и  $i_*\beta = 0$ . Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_n(V_{k+1}, V_k \cap U_{k+1}) & \xleftarrow{i'_*} & H_n(U_{k+1}, V_k \cap U_{k+1}) & & \\ \uparrow i''_* & & \downarrow \partial'_* & & \\ H_n(V_k, V_k \cap U_{k+1}) & \xrightarrow{\partial''_*} & H_{n-1}(V_k \cap U_{k+1}) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(V_k) \\ & & \downarrow & & \\ & & H_{n-1}(U_{k+1}) & = & 0. \end{array}$$

В этой диаграмме вторая строка и второй столбец — участки точных последовательностей пар. Из равенства  $i_*\beta = 0$  следует, что  $\beta = \partial''_*\beta''$  для некоторого  $\beta'' \in H_n(V_k, V_k \cap U_{k+1})$ . Кроме того,  $\beta = \partial'_*\beta'$  для некоторого  $\beta' \in H_n(U_{k+1}, V_k \cap U_{k+1})$ , поскольку  $\partial'_*$  — эпиморфизм. Рассмотрим элемент  $\bar{\beta} = i'_*\beta' - i''_*\beta''$ . Запишем участок точной последовательности пары:

$$H_n(V_{k+1}) \xrightarrow{p_*} H_n(V_{k+1}, V_k \cap U_{k+1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(V_k \cap U_{k+1}).$$

Ясно, что  $\partial_*i'_* = \partial'_*$  и  $\partial_*i''_* = \partial''_*$ . Поэтому  $\partial_*\bar{\beta} = \partial_*i'_*\beta' - \partial_*i''_*\beta'' = \partial'_*\beta' - \partial''_*\beta'' = \beta - \beta = 0$ , а значит,  $\partial_*\bar{\beta} = p_*\alpha$  для некоторого  $\alpha \in H_n(V_{k+1})$ .

Точно так же, как это мы делали в начале доказательства, используя некомпактность многообразия  $M^n$ , можно показать, что для любой точки  $x \in M^n$  гомоморфизм  $(p_x)_* : H_n(V_{k+1}) \rightarrow H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$  нулевой. В частности,  $p_*\alpha = 0$ .

Пусть  $x \in U_{k+1} \setminus (V_k \cap U_{k+1})$ . Тогда  $V_k \cap U_{k+1} \subset M^n \setminus \{x\}$ , поэтому гомоморфизм  $(p_x)_*$  можно представить в виде композиции гомоморфизмов

$$H_n(V_{k+1}) \xrightarrow{p_*} H_n(V_{k+1}, V_k \cap U_{k+1}) \xrightarrow{l_*} H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}).$$

Следовательно,  $0 = (p_x)_*\alpha = l_*p_*\alpha = l_*\bar{\beta} = l_*i'_*\beta' - l_*i''_*\beta''$ . Точка  $x$  не лежит в  $V_k$ , поэтому  $l_*i''_*$  можно заменить на композицию гомоморфизмов

$$H_n(V_k, V_k \cap U_{k+1}) \rightarrow H_n(V_k \setminus \{x\}, V_k \cap U_{k+1}) \rightarrow H_n(M^n \setminus \{x\}, M^n \setminus \{x\}) = 0.$$

Значит,  $l_*i''_* = 0$ . Из этого следует, что  $l_*i'_*\beta' = 0$ . После отождествления  $H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$  с  $H_n(U_{k+1}, U_{k+1} \setminus \{x\})$  гомоморфизм  $l_*i'_*$  превращается в гомоморфизм

$$(i_x)_* : H_n(U_{k+1}, V_k \cap U_{k+1}) \rightarrow H_n(U_{k+1}, U_{k+1} \setminus \{x\}).$$

Поэтому, воспользовавшись леммой 15.1, получим  $\beta' = 0$ , а значит,  $\beta = 0$ .  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $M^n$  — связное топологическое многообразие. Тогда  $r_* : H_n(M^n) \rightarrow H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$  — мономорфизм.

**Доказательство.** Пусть  $\alpha \in H_n(M^n)$  и  $r_*\alpha = 0$ . Тогда в группе  $H_n(M^n \setminus \{x\})$  есть элемент  $\beta$ , для которого  $i_*\beta = \alpha$ . Но многообразие  $M^n \setminus \{x\}$  некомпактно, поэтому  $H_n(M^n \setminus \{x\}) = 0$ .  $\square$

**Следствие 2.** Пусть  $M^n$  — связное топологическое многообразие. Тогда либо  $H_n(M^n) = 0$ , либо  $H_n(M^n) \cong \mathbb{Z}$  и для любой точки  $x \in M^n$  гомоморфизм  $r_* : H_n(M^n) \rightarrow H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$  является мономорфизмом.

**Доказательство.** Гомоморфизм  $r_* : H_n(M^n) \rightarrow H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$  согласно следствию 1 является мономорфизмом. Поэтому либо  $H_n(M^n) = 0$ , либо  $H_n(M^n) \cong \mathbb{Z}$  и образом гомоморфизма  $r_*$  служит группа  $t\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ . Нужно лишь проверить, что  $t = \pm 1$ .

Предположим, что  $m > 1$ . Доказательство теоремы 15.2 (и следствия 1) проходят не только для группы коэффициентов  $\mathbb{Z}$ , но и для любой абелевой группы коэффициентов  $G$ . Положим  $G = \mathbb{Z}_m$  и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_n(M^n) \otimes \mathbb{Z}_m & \xrightarrow{p_* \otimes \text{id}} & H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) \otimes \mathbb{Z}_m \\ \varphi_1 \downarrow \text{моно} & & \varphi_2 \downarrow \text{моно} \\ H_n(M^n; \mathbb{Z}_m) & \xrightarrow[\text{моно}]{p_*} & H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}_m). \end{array}$$

Здесь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — мономорфизмы из формулы универсальных коэффициентов. Гомоморфизм  $p_* \otimes \text{id}$  тоже должен быть мономорфизмом. С другой стороны, если  $\alpha$  — образующая группы  $H_n(M^n)$ , то  $(p_* \otimes \text{id})(\alpha \otimes 1) = p_* \alpha \otimes 1 = m \otimes 1 = 0$ .  $\square$

Для каждой точки  $x \in M^n$  рассмотрим группы  $T_x = H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$  и  $T_x(\mathbb{Z}_2) = H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ . Сейчас мы введём топологию на множествах  $\mathcal{T} = \bigcup_{x \in M^n} T_x$  и  $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_2) = \bigcup_{x \in M^n} T_x(\mathbb{Z}_2)$  так, чтобы естественные проекции  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_2)$  на  $M^n$  являлись накрытиями. Отметим, что это эквивалентно заданию на  $M^n$  локальных систем коэффициентов с группами  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Z}_2$ . Для коэффициентов в  $\mathbb{Z}_2$  локальная система тривиальна, потому что есть ровно один изоморфизм  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . Пространство  $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_2)$  представляет собой два экземпляра многообразия  $M^n$ ; один из них соответствует нулевому элементу группы  $\mathbb{Z}_2$ , а другой — ненулевому. Для коэффициентов в  $\mathbb{Z}$  мы хотим построить локальную систему коэффициентов, которая обобщает систему  $\text{Og } M^n$  для гладких многообразий.

Будем называть множество  $V$  *допустимым*, если  $V$  — внутренность замкнутого шара, лежащего в некоторой карте на  $M^n$ . При построении топологии на множестве  $\mathcal{T}$  мы воспользуемся тем, что если множество  $V$  допустимое и  $x \in V$ , то вложение  $M^n \setminus V \rightarrow M^n \setminus \{x\}$  является гомотопической эквивалентностью. Из этого следует, что индуцированный этим вложением гомоморфизм

$$i_{V,x}: H_n(M^n, M^n \setminus V) \rightarrow H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) = T_x$$

является изоморфизмом (для сингулярных гомологий это доказывается точно так же, как и для симплициальных: см. теорему 3.3 на с. 25). Для каждого элемента  $\alpha \in H_n(M^n, M^n \setminus V)$  множества  $\{i_{V,x}\alpha \mid x \in V\}$  будем считать открытыми. Эти открытые множества образуют базу топологии пространства  $\mathcal{T}$ . Отметим, что допустимые множества  $V$  образуют базу топологии пространства  $M^n$ .

*Ориентацией* топологического многообразия  $M^n$  называют непрерывное сечение  $s$  накрытия  $\mathcal{T} \rightarrow M^n$ , для которого каждый элемент  $s(x) \in T_x$

является образующей группы  $T_x \cong \mathbb{Z}$ . Ясно, что у связного топологического многообразия без края есть либо ровно две ориентации, либо ни одной. Топологическое многообразие, у которого есть ориентация, называют *ориентируемым*, а топологическое многообразие с заданной ориентацией называют *ориентированным*.

Можно также определить ориентацию топологического многообразия  $M^n$  относительно группы коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$  как непрерывное сечение  $s$  накрытия  $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_2) \rightarrow M^n$ , для которого каждый элемент  $s(x) \in T_x(\mathbb{Z}_2)$  является образующей группы  $T_x(\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ . Ясно, что такое сечение всегда существует и единственно, поскольку у группы  $\mathbb{Z}_2$  ровно одна образующая.

Гомологический класс  $\alpha \in H_n(M^n)$  называют *фундаментальным*, если для всех  $x \in M^n$  отображение  $p_*: H_n(M^n) \rightarrow H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) = T_x$  переводит  $\alpha$  в образующую группы  $T_x$ . Как мы сейчас убедимся, фундаментальный класс тесно связан с ориентацией: каждой ориентации замкнутого топологического многообразия соответствует фундаментальный класс. В частности, для замкнутого связного ориентируемого многообразия  $H_n(M^n) \cong \mathbb{Z}$ . Прежде чем переходить к ориентируемым многообразиям, разберёмся с неориентируемыми.

**Теорема 15.3.** *Если  $M^n$  — неориентируемое связное топологическое многообразие без края, то  $H_n(M^n) = 0$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\alpha \in H_n(M^n)$ . Для каждой точки  $x \in M^n$  рассмотрим элемент  $\alpha_x \in T_x$ , который является образом элемента  $\alpha$  при гомоморфизме  $p_*: H_n(M^n) \rightarrow H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) = T_x$ . Из неориентируемости многообразия  $M^n$  следует, что существует путь  $\gamma$ , при обходе вдоль которого  $\alpha_x$  заменяется на  $-\alpha_x$ . Поэтому  $\alpha_x = 0$ . Следствие 1 теоремы 15.2 показывает, что  $\alpha = 0$ .  $\square$

Воспользуемся введённым обозначением  $\alpha_x$  при формулировке и доказательстве следующего утверждения.

**Теорема 15.4.** *Пусть  $M^n$  — связное замкнутое ориентируемое многообразие с ориентацией  $s: M^n \rightarrow \mathcal{T}$ . Тогда существует единственный фундаментальный класс  $\alpha$ , для которого  $\alpha_x = s(x)$  для всех  $x \in M^n$ .*

**Доказательство.** Наиболее важная и трудная часть теоремы — существование фундаментального класса. С этого мы и начнём, а единственность докажем в конце.

Напомним, что если  $V$  — допустимое\*) множество, то отображение  $i_{V,x}: H_n(M^n, M^n \setminus V) \rightarrow T_x$  — изоморфизм. Это позволяет построить требуемый класс гомологий  $\alpha_V$  в  $H_n(M^n, M^n \setminus V)$ . Мы хотим склеить такие

\*) Определение допустимого множества приведено на с. 250.

классы с помощью относительной последовательности Майера—Вьеториса и получить гомологический класс в  $H_n(M^n, \emptyset) = H_n(M^n)$ . При работе с последовательностями Майера—Вьеториса удобнее иметь дело с открытыми множествами, для которых аксиома вырезания выполняется автоматически. Поэтому вместо допустимого множества  $V$  возьмём его замыкание  $\bar{V}$ ; отображение  $i_{\bar{V}, x}$  — тоже изоморфизм, следовательно, мы можем построить класс  $\alpha_{\bar{V}} \in H_n(M^n, M^n \setminus \bar{V})$ .

Многообразие  $M^n$  компактно, поэтому его можно покрыть конечным набором замыканий допустимых множеств  $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_m$ . Предположим, что мы уже построили элемент

$$\alpha_{1, \dots, k} \in H_n(M^n, M^n \setminus (\bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_k)),$$

для которого  $i_x \alpha_{1, \dots, k} = s(x)$  при всех  $x \in \bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_k$ ; здесь  $i_x$  — гомоморфизм гомологий, индуцированный отображением пар

$$(M^n, M^n \setminus (\bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_k)) \rightarrow (M^n, M^n \setminus \{x\}).$$

Рассмотрим относительную последовательность Майера—Вьеториса

$$\begin{aligned} H_n(M^n, M^n \setminus (\bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_{k+1})) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow H_n(M^n, M^n \setminus (\bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_k)) \oplus H_n(M^n, M^n \setminus \bar{V}_{k+1}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_n(M^n, M^n \setminus ((\bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_k) \cap \bar{V}_{k+1})). \end{aligned}$$

Возьмём в прямой сумме элемент  $(\alpha_{1, \dots, k}, -\alpha_{k+1})$ . Мы хотим доказать, что он является образом некоторого элемента

$$\alpha_{1, \dots, k+1} \in H_n(M^n, M^n \setminus (\bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_{k+1})).$$

Это эквивалентно тому, что образ элемента  $(\alpha_{1, \dots, k}, -\alpha_{k+1})$  в

$$H_n(M^n, M^n \setminus ((\bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_k) \cap \bar{V}_{k+1}))$$

равен нулю. Обозначим этот образ через  $\beta$ . По условию для всех  $x \in C = (\bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_k) \cap \bar{V}_{k+1}$  гомоморфизм  $H_n(M^n, M^n \setminus C) \rightarrow T_x$  переводит  $\beta$  в нуль.

*Л е м м а.* Пусть  $U \subset M^n$  — открытое множество, а элемент  $\beta \in H_n(M^n, U)$  таков, что для всех  $x \in U$  гомоморфизм  $H_n(M^n, U) \rightarrow T_x$  переводит  $\beta$  в нуль. Тогда  $\beta = 0$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Мы применим ту же самую технику, которую уже многократно использовали: утверждение сначала доказывается для простых областей, а затем распространяется с помощью последовательности Майера—Вьеториса.

Предположим сначала, что множество  $M^n \setminus U$  содержится в координатной окрестности  $W \approx \mathbb{R}^n$ . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_n(W, W \cap U) & \xrightarrow{i_*} & H_n(W, W \setminus \{x\}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_n(M^n, U) & \xrightarrow{i_*} & H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}). \end{array}$$

Здесь вертикальные стрелки — изоморфизмы вырезания. Равенство  $p_*\beta = 0$  эквивалентно равенству  $i_*\tilde{\beta} = 0$ , где  $\tilde{\beta}$  — прообраз  $\beta$  при изоморфизме вырезания. Применяв лемму 15.1, получим  $\tilde{\beta} = 0$ , а значит,  $\beta = 0$ .

Перейдём теперь к общему случаю. Пусть  $V_i$  — открытая координатная окрестность многообразия  $M^n$ , гомеоморфная  $\mathbb{R}^n$ . Компактное множество  $M^n \setminus U$  можно покрыть конечным числом открытых множеств  $V_i$ . Положим  $U_i = (M^n \setminus U) \cap V_i$ . Тогда  $M^n \setminus U = \bigcup (M^n \setminus U_i)$ , т. е.  $U = \bigcap U_i$ . Поэтому достаточно проверить, что если утверждение леммы верно для открытых множеств  $U'$  и  $U''$ , то оно верно и для множества  $U' \cap U''$ . Рассмотрим относительную последовательность Майера—Вьеториса

$$H_{n+1}(M^n, U' \cup U'') \longrightarrow H_n(M^n, U' \cap U'') \longrightarrow H_n(M^n, U') \oplus H_n(M^n, U'').$$

Легко проверить, что  $H_{n+1}(M^n, U' \cup U'') = 0$ . Действительно, рассмотрим точную последовательность пары

$$H_{n+1}(M^n) \longrightarrow H_{n+1}(M^n, U' \cup U'') \longrightarrow H_n(U' \cup U'').$$

Здесь  $H_{n+1}(M^n) = 0$  и  $H_n(U' \cup U'') = 0$ , если  $U' \cup U'' \neq M^n$  (если же  $U' \cup U'' = M^n$ , то равенство  $H_{n+1}(M^n, U' \cup U'') = 0$  очевидно). Таким образом, получаем мономорфизм

$$H_n(M^n, U' \cap U'') \rightarrow H_n(M^n, U') \oplus H_n(M^n, U'').$$

Пусть при этом мономорфизме элемент  $\beta$  переходит в  $(\beta', \beta'')$ . Пусть, далее,  $\beta_x, \beta'_x$  и  $\beta''_x$  — образы элементов  $\beta, \beta'$  и  $\beta''$  при отображении в  $T_x$ . Тогда  $\beta'_x = \beta_x$  и  $\beta''_x = -\beta_x$ . Поэтому если  $\beta_x = 0$ , то  $\beta'_x = 0$  и  $\beta''_x = 0$ . По предположению равенство  $\beta_x = 0$  выполняется для всех  $x \in M^n \setminus (U' \cap U'')$ . Значит, равенство  $\beta'_x = 0$  выполняется для всех  $x \in M^n \setminus U'$ , а равенство  $\beta''_x = 0$  выполняется для всех  $x \in M^n \setminus U''$ . Из этого следует, что  $\beta' = 0$  и  $\beta'' = 0$ . Условие мономорфности означает, что тогда и  $\beta = 0$ .  $\square$

Элемент  $\alpha_{1, \dots, k+1}$ , образом которого является элемент  $(\alpha_{1, \dots, k}, -\alpha_{k+1})$ , обладает требуемым свойством, т. е.  $i_x \alpha_{1, \dots, k+1} = s(x)$  для всех  $x \in \bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_{k+1}$ .

Единственность фундаментального класса доказывается весьма просто. Если  $\alpha$  и  $\alpha'$  — два фундаментальных класса, соответствующих ориентации  $s$ , то для всех  $x \in M^n$  гомоморфизм  $H_n(M^n) \rightarrow H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$

переводит класс  $\alpha - \alpha'$  в  $s(x) - s(x) = 0$ . Но этот гомоморфизм является мономорфизмом (следствие 1 теоремы 15.2).  $\square$

Относительно группы коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$  многообразие всегда ориентируемо, причём ориентация единственна. Для группы коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$  можно повторить те же самые рассуждения, что и при доказательстве теоремы 15.4, и для каждого замкнутого связного топологического многообразия построить фундаментальный класс в гомологиях с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ .

## 15.2. Изоморфизм Тома

Изоморфизм Тома связывает  $k$ -мерные когомологии замкнутого многообразия  $M^n$  и  $(n+k)$ -мерные когомологии пары  $(M^n \times M^n, M^n \times M^n \setminus d(M^n))$ , где  $d: M^n \rightarrow M^n \times M^n$  — диагональное отображение. Построение этого изоморфизма основано на приводимых ниже леммах 15.2 и 15.3. Начнём с того, что введём некоторые обозначения.

Пусть  $M^n$  — замкнутое ориентированное топологическое многообразие с ориентацией  $s: M^n \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $p_1, p_2: M^n \times M^n \rightarrow M^n$  — проекции на первый и второй множитель. Для каждой точки  $x \in M^n$  рассмотрим отображение  $l_x: M^n \rightarrow M^n \times M^n$ , заданное формулой  $l_x(y) = (x, y)$ . Это отображение индуцирует отображение пар

$$(M^n, M^n \setminus \{x\}) \rightarrow (M^n \times M^n, M^n \times M^n \setminus d(M^n)),$$

которое мы тоже будем обозначать  $l_x$ .

*Л е м м а 15.2. Пусть  $V \subset M^n$  — открытая окрестность, которая в локальных координатах содержится в шаре, а она, в свою очередь, содержится в шаре  $D^n$  большего радиуса с тем же центром  $x_0 \in V$ . Тогда существует гомеоморфизм  $\theta: p_1^{-1}(V) = V \times M^n \rightarrow p_1^{-1}(V)$ , обладающий следующими свойствами:*

1)  $\theta(x, y) = (x, y')$  для всех  $x \in V$ ,  $y \in M^n$  (здесь  $y'$  — некоторая точка многообразия  $M^n$ );

2)  $\theta(x, x) = (x, x_0)$  для всех  $x \in V$ ;

3)  $(p_2 \theta l_x)_*(s(x)) = s(x_0)$  для всех  $x \in V$  (здесь имеются в виду отображения пар, поскольку  $s(x)$  — класс гомологий пары).

При формулировке свойства 3) было использовано свойство 2):  $(p_2 \theta l_x)(x) = p_2 \theta(x, x) = p_2(x, x_0) = x_0$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Построим гомеоморфизм  $V \times D^n$  на себя следующим образом: каждый отрезок с концами  $(x, x)$  и  $(x, y)$ , где  $x \in V$  и  $y \in \partial D^n$ , линейно отобразим на отрезок с концами  $(x, x_0)$  и  $(x, y)$ . На рис. 40 показано, как устроено ограничение этого отображения на  $\{x\} \times D^n$  при  $n = 2$ . На  $V \times \partial D^n$  гомеоморфизм тождествен, поэтому его можно продолжить на  $V \times M^n$  как тождественное отображение вне  $V \times D^n$ .

Отображение  $p_2 \theta l_x$  — это как раз то отображение, которое изображено на рис. 40. Ясно, что это отображение сохраняет ориентацию.  $\square$

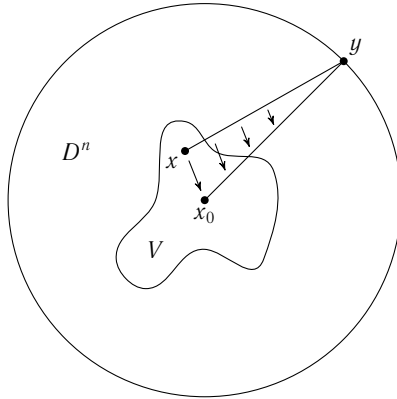


Рис. 40. Построение гомеоморфизма

Для каждого открытого множества  $V \subset M^n$  можно рассмотреть пару

$$(p^{-1}(V), p^{-1}(V) \setminus d(M^n)) = (V \times M^n, V \times M^n \setminus d(M^n)),$$

которую мы будем обозначать  $V^\times$ . Для дальнейшего важное значение имеет пара  $M^{n \times} = (M^n \times M^n, M^n \times M^n \setminus d(M^n))$ . Отметим, что отображение  $l_x$  можно рассматривать как отображение пар  $(M^n, M^n \setminus \{x\}) \rightarrow M^{n \times}$ .

*Лемма 15.3.* а) При  $i < n$  справедливо равенство  $H_i(M^{n \times}) = 0$ .

б) Имеет место изоморфизм  $H_0(M^n) \cong H_n(M^{n \times})$ ; этот изоморфизм индуцирован отображением, которое переводит нульмерную цепь, соответствующую точке  $x \in M^n$ , в относительный  $n$ -мерный цикл, представляющий класс  $(l_x)_*(s(x))$ .

*Доказательство.* Воспользуемся леммой 15.2. Пусть множество  $V$  удовлетворяет условию этой леммы и  $\theta$  — соответствующий ему гомеоморфизм. Тогда  $\theta$  отображает  $d(V)$  в  $V \times \{x_0\}$ , поэтому  $\theta$  индуцирует гомеоморфизм пар

$$V^\times = (V \times M^n, V \times M^n \setminus d(M^n)) \rightarrow V \times (M^n, M^n \setminus \{x_0\}).$$

Значит,  $H_*(V^\times) \cong H_*(V \times M^n, V \times (M^n \setminus \{x_0\}))$ . Применив теорему Кюннета для относительных гомологий, получим, что группа  $H_k(V^\times)$  изоморфна прямой сумме групп

$$\bigoplus_{p+q=k} H_p(V) \otimes H_q(M^n, M^n \setminus \{x_0\}) = H_0(V) \otimes H_k(M^n, M^n \setminus \{x_0\})$$



и

$$\bigoplus_{p+q=k-1} \text{Tor}(H_p(V), H_q(M^n, M^n \setminus \{x_0\})) = \text{Tor}(H_0(V), H_{k-1}(M^n, M^n \setminus \{x_0\})).$$

Но  $H_i(M^n, M^n \setminus \{x_0\}) = 0$  при  $i < n$ . Поэтому  $H_k(V^\times) = 0$  при  $i < n$  и  $H_k(V^\times) \cong H_0(V) \otimes H_k(M^n, M^n \setminus \{x_0\})$ .

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & H_0(V) \otimes H_n(M^n, M^n \setminus \{x_0\}) \\ & & & & \uparrow \cong \\ H_n(V, V \setminus \{x\}) & \xrightarrow{(l_x)_*} & H_n(V^\times) & \xrightarrow{\theta_*} & H_n(V \times M^n, V \times (M^n \setminus \{x_0\})) \\ & & & & \downarrow (p_2)_* \\ & & & & H_n(M^n, M^n \setminus \{x_0\}). \end{array}$$

Мы знаем, что  $(p_2 \theta l_x)_*(s(x)) = s(x_0)$ . Поэтому отображение  $H_0(V) \rightarrow H_0(V) \otimes H_n(M^n, M^n \setminus \{x_0\})$ , индуцированное отображением  $[x] \rightarrow [x] \otimes s(x_0)$ , является изоморфизмом. Если мы вернёмся в  $H_n(V^\times)$ , то вместо этого отображения получим отображение  $[x] \rightarrow (l_x)_*(s(x))$ .

Таким образом, для множества  $V$  утверждение леммы верно. Обратите внимание, что мы не пользуемся связностью множества  $V$ ; изоморфизм  $H_n(V^\times) \cong H_0(V)$  имеет место и для несвязного открытого множества  $V$ . Поэтому остаётся проверить, что если утверждение леммы верно для открытых множеств  $U_1, U_2$  и  $U_1 \cap U_2$ , то оно верно и для множества  $U_1 \cup U_2$ . Рассмотрим два участка последовательностей Майера—Вьеториса и отображим один из них в другой посредством гомоморфизма, описанного в условии леммы:

$$\begin{array}{ccccc} H_0(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & H_0(U_1) \oplus H_0(U_2) & \longrightarrow & H_0(U_1 \cup U_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n((U_1 \cap U_2)^\times) & \longrightarrow & H_{n-1}(U_1^\times) \oplus H_{n-1}(U_2^\times) & \longrightarrow & H_{n-1}((U_1 \cup U_2)^\times). \end{array}$$

Сохраняя коммутативность, к этой диаграмме можно дописать справа диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & \longrightarrow & H_n((U_1 \cap U_2)^\times) & \longrightarrow & H_n(U_1^\times) \oplus H_n(U_2^\times), \end{array}$$

в которой группы гомологий, стоящие внизу, нулевые. Применив 5-лемму, получим требуемое.  $\square$

Воспользовавшись леммой 15.3 и формулой универсальных коэффициентов, получаем  $H^i(M^{n \times}) = 0$  при  $i < n$  и  $H^n(M^{n \times}) \cong \text{Hom}(H_n(M^{n \times}), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_0(M^n), \mathbb{Z})$ ; оба изоморфизма канонические. Класс  $U \in H^n(M^{n \times})$ , соответствующий гомоморфизму  $H_0(M^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ , индуцированному аугментацией, называют *классом Тома* топологического многообразия  $M^n$ . Класс Тома однозначно характеризуется тем, что  $\langle U, (I_x)_*(s(x)) \rangle = 1$  для всех  $x \in M^n$ , т. е.  $\langle I_x^* U, s(x) \rangle = 1$ . Это, в частности, означает, что  $I_x^* U$  — образующая группы  $H^n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ .

Пусть  $X = M^n \times M^n$  и  $A = M^n \times M^n \setminus d(M^n)$ . Тогда  $U \in H^n(X, A)$ . Для когомологического класса  $\alpha^k \in H^k(M^n)$  класс  $p_1^*(\alpha^k)$  лежит в  $H^k(X)$ , поэтому можно рассмотреть относительное сар-произведение  $H^k(X) \otimes H^n(X, A) \rightarrow H^{n+k}(X, A)$ . Положим  $\Phi^*(\alpha^k) = p_1^*(\alpha^k) \cup U \in H^{n+k}(M^{n \times})$ .

**Теорема 15.5** (изоморфизм Тома). *Отображение  $\Phi^*: H^k(M^n) \rightarrow H^{n+k}(M^{n \times})$  — изоморфизм для всех  $k$ .*

**Доказательство.** Для каждого открытого множества  $V \subset M^n$  пусть  $U_V \in H^n(V^\times)$  — ограничение когомологического класса  $U$  на  $V$ . Рассмотрим сар-произведение  $H^n(V^\times) \otimes H_k(V^\times) \rightarrow H_{k-n}(V \times M^n)$ . Для  $\beta_k \in H_k(V^\times)$  положим  $\varphi_*(\beta_k) = (p_1)_*(U_V \cap \beta_k) \in H_{k-n}(V)$ .

Пусть  $V$  — открытое множество, удовлетворяющее условию леммы 15.2. Тогда гомеоморфизм  $\theta$  из этой леммы индуцирует изоморфизм  $\theta^*: H^n(V \times M^n, V \times (M^n \setminus \{x\})) \rightarrow H^n(V^\times)$ . Теорема 14.15 на с. 235 позволяет отождествить элемент  $\theta^{*-1}(U_V)$  с элементом  $1 \otimes \gamma^n \in H^0(V) \otimes H^n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ , где  $\gamma^n$  — образующая группы  $H^n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ , для которой  $\langle \gamma^n, s(x) \rangle = 1$  (в обозначениях теоремы 14.15 имеем  $\gamma^n = e^n$ : мы отождествляем группы  $H^n(M^n, M^n \setminus \{x\})$  и  $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  посредством изоморфизма вырезания).

Гомоморфизм  $\theta$  обладает тем свойством, что  $p_1 = p_1 \theta$  (на множестве  $V$ ). Поэтому из естественности сар-произведения следует, что

$$(p_1)_*(U_V \cap \beta_k) = (p_1)_* \theta_*(\theta^*(\theta^{*-1}(U_V)) \cap \beta_k) = (p_1)_*(\theta^{*-1}(U_V) \cap \theta_*(\beta_k)).$$

Элемент  $\theta_*(\beta_k)$  лежит в  $H_k(V \times M^n, V \times (M^n \setminus \{x\}))$ . Теорема Кюннета позволяет отождествить его с элементом  $b_{k-n} \otimes s(x)$ , где  $b_{k-n} \in H_{k-n}(V)$ .

Гомоморфизм  $(p_1)_*$  переводит сар-произведение элементов  $1 \otimes \gamma^n \in H^0(V) \otimes H^n(M^n, M^n \setminus \{x\})$  и  $b_{k-n} \otimes s(x) \in H_{k-n}(V) \otimes H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$  в  $b_{k-n}$ . Это означает, что  $\varphi_*(\beta_k) = b_{k-n}$ . Отображение  $\beta_k \mapsto b_{k-n}$  задаётся композицией изоморфизмов

$$\begin{aligned} H_k(V^\times) &\xrightarrow{\theta} H_k(V \times M^n, V \times (M^n \setminus \{x\})) \cong \\ &\cong H_{k-n}(V) \otimes H^n(M^n, M^n \setminus \{x\}) \cong H_{k-n}(V). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\varphi_*: H_k(V^\times) \rightarrow H_{k-n}(V)$  — изоморфизм.

Используя стандартные рассуждения с последовательностью Майера—Вьеториса, получаем изоморфизм  $\varphi_*: H_k(M^{n \times}) \rightarrow H_{k-n}(M^n)$  для всех  $k \geq n$ .

Перейдём на уровень цепей и построим для  $\varphi_*$  двойственное отображение коцепей. Затем от отображения коцепей перейдём к отображению когомологий  $\varphi^*: H^k(M^n) \rightarrow H_{n+k}(M^{n \times})$ . Покажем, что  $\varphi^* = \Phi^*$ , т. е.  $\varphi^*(\alpha^k) = p_1^*(\alpha^k) \cup U$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \langle \varphi^*(\alpha^k), \beta_{k+n} \rangle &= \langle \alpha^k, \varphi_*(\beta_{k+n}) \rangle = \langle \alpha^k, (p_1)_*(U \cap \beta_{k+n}) \rangle = \\ &= \langle p_1^*(\alpha^k), (U \cap \beta_{k+n}) \rangle = \langle p_1^*(\alpha^k) \cup U, \beta_{k+n} \rangle; \end{aligned}$$

мы воспользовались тем, что  $\langle \alpha^q, \beta^p \cap \gamma_{p+q} \rangle = \langle \alpha^q \cup \beta^p, \gamma_{p+q} \rangle$  (теорема 8.2 на с. 82).

Остаётся проверить, что  $\varphi^*$  — изоморфизм. Изоморфизм  $\varphi_*$  индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{k-1}(M^n), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^k(M^n) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_k(M^n), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_{*1} & & \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi_{*2} \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{k+n-1}(M^{n \times}), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{k+n}(M^{n \times}) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_{k+n}(M^{n \times}), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Здесь  $\varphi_{*1}$  и  $\varphi_{*2}$  — изоморфизмы, поскольку  $\varphi_*$  — изоморфизм. Согласно 5-лемме  $\varphi^*$  тоже изоморфизм.  $\square$

### 15.3. Изоморфизм Пуанкаре

При доказательстве теоремы об изоморфизме Пуанкаре для топологических многообразий нам понадобятся следующие два свойства замкнутых топологических многообразий.

**Теорема 15.6.** а) Любое замкнутое топологическое многообразие  $M^n$  можно вложить в  $\mathbb{R}^k$  для некоторого  $k$ .

б) Пусть  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  — вложение замкнутого топологического многообразия  $M^n$ . Тогда существует открытое множество  $U \supset \supset f(M^n)$ , ретрактом которого является  $f(M^n)$ .

**Доказательство.** а) Пусть  $U_1, \dots, U_m$  — открытые множества, гомеоморфные  $\mathbb{R}^n$  и покрывающие  $M^n$ . Фиксируем гомеоморфизмы  $h_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n \approx S^n \setminus \{y_0\}$  и рассмотрим отображения  $f_i: M^n \rightarrow S^n$ , заданные формулой

$$f_i(x) = \begin{cases} h_i(x) & \text{для } x \in U_i; \\ y_0 & \text{для } x \notin U_i. \end{cases}$$

Отображение  $f_i$  непрерывно, поскольку  $\lim_{x \rightarrow \partial U_i} f(x) = y_0$ . Набор отображений  $f_1, \dots, f_m$  можно рассматривать как одно отображение  $f: M^n \rightarrow \prod_{i=1}^m S_i^n \subset \mathbb{R}^{m(n+1)}$ . Ясно, что если  $x \neq x'$ , то  $f(x) \neq f(x')$ . Поэтому из компактности многообразия  $M^n$  и хаусдорфовости пространства  $\mathbb{R}^{m(n+1)}$  следует, что  $f$  — гомеоморфизм  $M^n$  на  $f(M^n) \subset \mathbb{R}^{m(n+1)}$ .

б) Для краткости будем обозначать образ многообразия  $M^n$  в  $\mathbb{R}^k$  тоже через  $M^n$ . Выберем в  $\mathbb{R}^k$  достаточно большой симплекс  $\Delta^k$  так, чтобы многообразие  $M^n$  лежало строго внутри  $\Delta^k$ . Построим (бесконечную) триангуляцию пространства  $\Delta^k \setminus M^n$  следующим образом. Сначала возьмём барицентрическое подразделение симплекса  $\Delta^k$ . Среди полученных симплексов выберем те, которые пересекают  $M^n$ . Для этих симплексов тоже возьмём их барицентрические подразделения, а остальные симплексы оставляем без изменений. Следующий шаг делается точно так же, и т. д.

Из компактности многообразия  $M^n$  следует, что расстояние от любой точки  $x \in \Delta^k \setminus M^n$  до  $M^n$  положительно, поэтому у точки  $x$  есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом симплексов, построенных таким образом. Это означает, что наша конструкция действительно определяет некую триангуляцию  $K$  пространства  $\Delta^k \setminus M^n$ .

Построим теперь в  $\Delta^k$  семейство подмножеств  $N_0 \subset N_1 \subset \dots$  и непрерывных отображений  $r_i: N_i \rightarrow M^n$  так, что  $M^n \subset N_i$  и ограничение  $r_i$  на  $M^n$  — тождественное отображение. В качестве  $N_0$  возьмём объединение  $M^n$  и всех вершин симплицеального комплекса  $K$ . Каждую точку  $x \in N_0$  отображение  $r_0$  переводит в ближайшую\*) к  $x$  точку  $M^n$ . В частности,  $r_0(x) = x$  для всех точек  $x \in M^n$ .

Множества  $N_i$  и отображения  $r_i$  будем строить индукцией по  $i$ . При этом при переходе от  $N_i$  к  $N_{i+1}$  будут добавляться некоторые из  $(i+1)$ -мерных симплексов комплекса  $K$ , а именно те симплексы  $\Delta_\alpha^{i+1} \subset K$ , границы которых содержатся в  $N_i$ , причём отображение  $\partial \Delta_\alpha^{i+1} \xrightarrow{r_i} M^n$  можно продолжить до непрерывного отображения  $\Delta_\alpha^{i+1} \rightarrow M^n$ . Отображение  $r_{i+1}$  на  $\Delta_\alpha^{i+1}$  мы зададим следующим образом. Рассмотрим все непрерывные отображения  $\varphi: \Delta_\alpha^{i+1} \rightarrow M^n$ , продолжающие отображение  $r_i$ . Пусть  $\delta(\varphi)$  — диаметр множества  $\varphi(\Delta_\alpha^{i+1})$ . Ясно, что  $\delta(\varphi)$  не меньше диаметра множества  $r_i(\partial \Delta_\alpha^{i+1})$ . Пусть  $a$  — точная нижняя грань множества всех чисел  $\delta(\varphi)$ . Если  $a = 0$ , то  $r_i$  отображает  $\partial \Delta_\alpha^{i+1}$  в одну точку  $x_\alpha \in M^n$ . В таком случае положим  $r_{i+1}(\Delta_\alpha^{i+1}) = x_\alpha$ . Если  $a > 0$ , то в качестве отображения  $r_{i+1}$  на  $\Delta_\alpha^{i+1}$  выберем то из отображений  $\varphi$ , для которого  $a \leq \delta(\varphi) < 2a$ .

\*) Множество  $M^n \subset \mathbb{R}^k$  компактно, поэтому для любой точки  $x \in \mathbb{R}^k$  есть хотя бы одна точка  $y \in M^n$ , для которой  $\|x - y\| = d(x, M^n)$ . Ближайшая к  $x$  точка  $M^n$  — это любая из таких точек  $y$ .

Пусть  $N = \bigcup_{i=0}^{\infty} N_i$ ,  $r: N \rightarrow M^n$  — отображение, которое совпадает с  $r_i$  на  $N_i$ . Непосредственно из конструкции  $r$  видно, то это отображение непрерывно во всех точках множества  $N \setminus M^n$ . Поэтому остаётся проверить, что для каждой точки  $x \in M^n$  отображение  $r$  непрерывно в точке  $x$  и, кроме того,  $N$  содержит открытую окрестность точки  $x$ .

**Л е м м а 15.4.** *Для любого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать  $\delta > 0$  так, что если  $x \in \Delta^k \setminus M^n$  и  $d(x, M^n) < \delta$ , то любой  $k$ -мерный симплекс из  $K$ , содержащий  $x$ , имеет диаметр меньше  $\varepsilon$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выберем натуральное число  $m$  так, что диаметр любого симплекса  $m$ -го барицентрического подразделения симплекса  $\Delta^k$  меньше  $\varepsilon$ . Пусть  $K_m$  — подкомплекс в  $K$ , состоящий из тех симплексов  $m$ -го барицентрического подразделения  $\Delta^k$ , которые не пересекают  $M^n$ . Если  $K_m = \emptyset$ , то в качестве  $\delta$  можно взять любое положительное число, например  $\varepsilon$ . Если  $K_m \neq \emptyset$ , то положим  $\delta = d(|K_m|, M^n)$ . Это число положительно, поскольку множества  $|K_m|$  и  $M^n$  компактные, причём они не пересекаются.

Предположим, что  $d(x, M^n) < \delta$ . Тогда  $x \notin |K_m|$ , поэтому  $k$ -мерный симплекс  $m$ -го барицентрического подразделения  $\Delta^k$ , содержащий  $x$ , должен пересекать  $M^n$ . Согласно нашей конструкции такой симплекс барицентрически подразделяется. Поэтому  $k$ -мерный симплекс из  $K$ , содержащий  $x$ , получается не ранее чем на  $(m + 1)$ -м шаге. Диаметр такого симплекса меньше  $\varepsilon$ .  $\square$

Для каждой точки  $x \in M^n \subset \mathbb{R}^k$  и для каждого  $\varepsilon > 0$  построим систему открытых окрестностей  $V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_{k+1}$  в  $\mathbb{R}^k$  так, что  $V_{k+1} \subset N$  и  $r(V_{k+1}) \subset D_{x,\varepsilon}^k$ , где  $D_{x,\varepsilon}^k = \{y \in \mathbb{R}^k \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$ . В качестве  $V_0$  выберем открытое подмножество в  $D_{x,\varepsilon}^k$ , содержащее точку  $x$  и такое, что множество  $V_0 \cap M^n$  является допустимым подмножеством, гомеоморфным  $\mathbb{R}^n$ . Будем также считать, что  $V_0 \subset \Delta^k$ . При  $i \geq 1$  окрестность  $V_i$  строится по окрестности  $V_{i-1}$  следующим образом. Сначала выберем число  $\varepsilon(i) > 0$  так, что  $D_{x,\varepsilon(i)}^k \subset V_{i-1}$ . Затем, пользуясь леммой 15.4, выберем число  $\delta(i)$  так, что если  $y \in \Delta^k \setminus M^n$  и  $\|x - y\| < \delta(i)$ , то любой  $k$ -мерный симплекс из  $K$ , содержащий  $y$ , имеет диаметр меньше  $\varepsilon(i)$ . Можно считать, что  $\delta(i) < \varepsilon(i)$ . Открытое в  $\mathbb{R}^k$  множество  $V_i$  выберем так, чтобы оно содержалось в  $D_{x,\delta(i)}^k$  (и содержало точку  $x$ ); кроме того, множество  $V_i \cap M^n$  должно быть допустимым множеством, гомеоморфным  $\mathbb{R}^n$ . Будем также считать, что  $V_i \subset \Delta^k$ .

Пусть  $y \in V_{k+1} \setminus M^n$ ,  $\Delta^k(y)$  —  $k$ -мерный симплекс из  $K$ , содержащий  $y$ . По построению все вершины симплекса  $\Delta^k(y)$  лежат в  $D_{x,2\delta(k+1)}^k \subset V_k$ . Если  $v$  — вершина симплекса  $\Delta^k(y)$ , то  $\|v - r(v)\| \leq \|v - x\|$ , поэтому образы всех вершин симплекса  $\Delta^k(y)$  при отображении  $r$  лежат в  $D_{x,4\delta(k+1)}^k \subset V_k$ .

Множество  $V_k \cap M^n$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^n$ , поэтому отображение  $r$ , заданное на вершинах симплекса  $\Delta^k(y)$ , можно продолжить на его рёбра  $\Delta_\alpha^1$ . Значит,  $\Delta_\alpha^1 \subset N$ . У отображения  $r$ , заданного на вершинах симплекса  $\Delta^k(y)$ , есть продолжение на ребро  $\Delta_\alpha^1$ , для которого диаметр образа этого ребра меньше  $2\delta(k+1)$ , поэтому диаметр множества  $r(\Delta_\alpha^1)$  меньше  $4\delta(k+1) < \delta(k)$ . Концы ребра  $\Delta_\alpha^1$  лежат в  $V_k$ , поэтому  $r(\Delta_\alpha^1) \subset V_{k-1} \cap M^n$ .

Такие же рассуждения можно применить для двумерного остова, и т. д. В итоге получим, что  $\Delta^k(y) \subset N$  и  $r(\Delta^k(y)) \subset V_0 = D_{x,\varepsilon}^k$ . В частности,  $r(y) \in D_{x,\varepsilon}^k$ , поэтому отображение  $r$  непрерывно в точке  $y$ . Кроме того,  $V_{k+1} \subset N$ .  $\square$

*Л е м м а 15.5. Для любого замкнутого топологического многообразия  $M^n$  существует открытая в  $M^n \times M^n$  окрестность  $W$  множества  $d(M^n)$ , для которой отображения  $p_1|_W$  и  $p_2|_W$  гомотопны.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Воспользовавшись теоремой 15.6, вложим  $M^n$  в  $\mathbb{R}^k$  и выберем окрестность  $U$ , которая ретрагируется на  $M^n$ . Из компактности многообразия  $M^n$  следует, что можно выбрать  $\varepsilon > 0$  так, что если расстояние в  $\mathbb{R}^k$  между точками  $x, y \in M^n$  меньше  $\varepsilon$ , то отрезок с концами  $x$  и  $y$  лежит в  $U$ .

Отображения  $p_1$  и  $p_2$  на множестве  $d(M^n)$  совпадают. Поэтому компактность многообразия  $M^n$  позволяет выбрать в  $M^n \times M^n$  окрестность  $W$  множества  $d(M^n)$  так, что для любой точки  $\omega \in W$  расстояние между точками  $p_1(\omega)$  и  $p_2(\omega)$  меньше  $\varepsilon$ . Отрезок с концами  $p_1(\omega)$  и  $p_2(\omega)$  лежит в  $U$ , поэтому отображения  $p_1|_W$  и  $p_2|_W$  гомотопны в  $U$ . Ретракция  $r: U \rightarrow M^n$  позволяет по этой гомотопии построить гомотопию в  $M^n$ .  $\square$

Рассмотрим отображение  $T: M^n \times M^n \rightarrow M^n \times M^n$ , заданное формулой  $T(x, y) = (y, x)$ . Это отображение индуцирует отображение пар  $T: M^{n \times} \rightarrow M^{n \times}$ .

*Л е м м а 15.6. Если  $\alpha \in H^*(M^{n \times})$ , то  $T^*\alpha = (-1)^n \alpha$ .*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть  $V$  — допустимое открытое подмножество многообразия  $M^n$ , гомеоморфное  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^*(M^{n \times}) & \xrightarrow{T^*} & H^*(M^{n \times}) \\ \downarrow i^* & & \downarrow i^* \\ H^n(V \times V, V \times V \setminus d(V)) & \xrightarrow{T^*} & H^n(V \times V, V \times V \setminus d(V)) \end{array}$$

Здесь  $i^*$  — гомоморфизм, индуцированный включением пар  $(V \times V, V \times V \setminus d(V)) \rightarrow M^{n \times}$ . Легко проверить, что  $H^n(V \times V, V \times V \setminus d(V)) \cong \mathbb{Z}$ . Действительно, точная последовательность пары показывает, что  $H^n(V \times V, V \times V \setminus d(V)) \cong H^{n-1}(V \times V \setminus d(V))$ . Кроме того,  $V \times V \setminus d(V) \approx \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \sim \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$ . Значит,  $H^n(V \times V, V \times V \setminus d(V)) \cong$

$\cong H^{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ . Образующей этой группы служит элемент  $\beta = i^*(U)$ , где гомоморфизм  $i^*$  индуцирован включением  $V \subset M^n$ .

Прежде чем доказывать требуемое равенство  $T^*\beta = (-1)^n\beta$ , покажем, что пара  $(V \times V, V \times V \setminus d(V))$  гомотопически эквивалентна паре  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})) \sim (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Эта гомотопическая эквивалентность строится следующим образом. отождествим  $V$  с  $\mathbb{R}^n$  и в каждом слое  $\{y_0\} \times \mathbb{R}^n$  точку  $(y_0, y_0)$ , принадлежащую  $d(V)$ , сдвинем в точку  $(y_0, 0)$  так, чтобы слой перешёл в себя. Эту гомотопию («сдвиг») можно построить так, чтобы точка  $(y_0, 0)$  перешла в  $(y_0, -y_0)$ .

Чтобы доказать равенство  $T^*\beta = (-1)^n\beta$ , достаточно проследить, как  $T$  действует на один слой, например на слой  $y_0 = 0$ . Под действием  $T$  точка  $(0, x_0)$  переходит в точку  $(x_0, 0)$ . После гомотопии получаем точку  $(x_0, -x_0)$ . Спроецировав эту точку на исходный слой, получим точку  $(0, -x_0)$ . Значит, гомоморфизм  $T^*: H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  индуцирован отображением  $x_0 \mapsto -x_0$ . Степень этого отображения равна  $(-1)^n$ .

Пусть  $W$  — открытая окрестность множества  $d(M^n)$ , удовлетворяющая условию леммы 15.5. Заменяя при необходимости  $W$  на  $TW \cap W$ , можно считать, что окрестность  $W$  инвариантна относительно  $T$ . Положим  $U = M^n \times M^n \setminus W$ . Тогда  $\bar{U} \subset M^n \times M^n \setminus d(M^n)$ , поэтому можно применить теорему о вырезании и получить изоморфизм  $H^*(W, W \setminus d(M^n)) \cong \cong H^*(M^{n \times})$ . Это позволяет представить изоморфизм Тома  $\Phi^*$  в виде композиции отображений

$$H^*(M^n) \xrightarrow{(p_1|_W)^*} H^*(W) \xrightarrow{\circ U'} H^*(W, W \setminus d(M^n)) \cong H^*(M^{n \times}),$$

где  $U'$  — ограничение класса Тома на  $W$ . Пусть  $\alpha \in H^*(M^{n \times})$ . Воспользовавшись тем, что  $p_1T = p_2$ , получим

$$T^*((p_1|_W)^*(\alpha) \circ U') = (p_2|_W)^*(\alpha) \circ T^*(U') = (-1)^n(p_2|_W)^*(\alpha) \circ U'.$$

Но  $(p_1|_W) \sim (p_2|_W)$ , поэтому  $T^*\Phi^*(\alpha) = (-1)^n\Phi^*(\alpha)$ , а значит,  $T^*\alpha = (-1)^n\alpha$ , поскольку  $\Phi^*$  — изоморфизм.  $\square$

Теперь у нас почти всё готово для доказательства изоморфизма Пуанкаре. Убедимся лишь в том, что группы гомологий замкнутого топологического многообразия конечно порождённые.

**Т е о р е м а 15.7.** *Если  $M^n$  — замкнутое топологическое многообразие, то группа  $H_*(M^n)$  конечно порождённая.*

**Доказательство.** Будем считать, что многообразие  $M^n$  вложено в  $\mathbb{R}^k$ . Рассмотрим в  $\mathbb{R}^k$  открытое множество  $U \supset M^n$ , ретрактом которого является  $M^n$ . Пусть  $\Delta^k$  — симплекс в  $\mathbb{R}^k$ , содержащий  $U$ . Расстояние  $d$  между компактными множествами  $M^n$  и  $\Delta^k \setminus U$  положительно, поэтому можно выбрать  $m$  так, что диаметр любого симплекса  $m$ -го барицентрического подразделения симплекса  $\Delta^k$  меньше  $d$ .

Рассмотрим симплициальный комплекс  $K$ , состоящий из тех симплексов  $m$ -го барицентрического подразделения симплекса  $\Delta^k$ , которые пересекают  $M^n$ . Ясно, что  $M^n \subset |K| \subset U$ . Пусть  $r: |K| \rightarrow M^n$  — ограничение ретракции  $U \rightarrow M^n$ . Композиция отображений  $M^n \xrightarrow{i} |K| \xrightarrow{r} M^n$  является тождественным отображением, поэтому  $r_*: H_*(|K|) \rightarrow H_*(M^n)$  — эпиморфизм. Но группа  $H_*(|K|)$  конечно порождённая, поэтому группа  $H_*(M^n)$  тоже конечно порождённая.  $\square$

**Теорема 15.8** (изоморфизм Пуанкаре). Пусть  $M^n$  — замкнутое ориентируемое топологическое многообразие с ориентацией  $s$ ,  $[M^n] \in H_n(M^n)$  — фундаментальный класс, соответствующий ориентации  $s$ . Тогда отображение  $D: H^k(M^n) \rightarrow H_{n-k}(M^n)$ , заданное формулой  $D(a^k) = a^k \cap [M^n]$ , является изоморфизмом при всех  $k$ .

**Доказательство.** Пусть  $\alpha' \in C_n(M^n)$  — цикл, представляющий фундаментальный класс  $[M^n]$ . Рассмотрим отображение  $D_{\#}: C^k(M^n) \rightarrow C_{n-k}(M^n)$ , заданное формулой  $D_{\#}a' = a' \cap \alpha'$ . Из равенства  $\partial\alpha' = 0$  следует, что  $\partial D_{\#} = (-1)^{n-k} D_{\#} \partial$ , поскольку  $\partial(D_{\#}a') = \partial(a' \cap \alpha') = (-1)^{n-k} \partial a' \cap \alpha' + a' \cap \partial\alpha' = (-1)^{n-k} \partial a' \cap \alpha' = (-1)^{n-k} D_{\#}(\partial a')$ . Значит, отображение  $D_{\#}$  переводит коцикл в цикл, поэтому оно индуцирует гомоморфизм (ко)гомологий, который совпадает с гомоморфизмом  $D$ .

Теорему об изоморфизме Пуанкаре мы сначала докажем для коэффициентов в  $\mathbb{Z}_p$ , а уже из этого выведем её для коэффициентов в  $\mathbb{Z}$ . Поэтому будем рассматривать (ко)гомологии с коэффициентами в  $R$ , где  $R$  — коммутативное кольцо с единицей.

Для гомологических классов  $\alpha, \beta \in H_*(M^n; R)$  обозначим через  $\alpha \times \beta$  образ элемента  $\alpha \otimes \beta$  в  $H_*(M^n \times M^n; R)$  при мономорфизме из теоремы Кюннета. Для когомологических классов  $a, b \in H^*(M^n; R)$  обозначим через  $a \times b$  элемент  $p_1^*(a) \cup p_2^*(b) \in H^*(M^n \times M^n; R)$ . Как и ранее,  $U \in H^n(M^{n \times})$  — класс Тома. Далее,  $\tilde{U} = i^*(U)$  — элемент группы  $H^n(M^n \times M^n)$ , соответствующий  $U$  при гомоморфизме  $i^*: H^n(M^{n \times}) \rightarrow H^n(M^n \times M^n)$ . При гомоморфизме колец  $\mathbb{Z} \rightarrow R$ , переводящем 1 в единицу кольца  $R$ , элемент  $\tilde{U}$  переходит в элемент кольца  $H^n(M^n \times M^n; R)$ , который мы тоже будем обозначать  $\tilde{U}$ . Наконец,  $[x]$  — образующая группы  $H_0(M^n)$ , заданная произвольной точкой  $x \in M^n$ .

Элемент  $[x] \times [M^n]$  представлен в  $H_n(M^n \times M^n)$  циклом  $(i_x)_*([M^n])$ , поэтому гомоморфизм  $i_*: H_n(M^n \times M^n) \rightarrow H_n(M^{n \times})$  переводит элемент  $[x] \times [M^n]$  в  $(i_x)_*(s(x))$ . Значит,

$$\langle \tilde{U}, [x] \times [M^n] \rangle = \langle i_*(U), [x] \times [M^n] \rangle = \langle U, (i_x)_*(s(x)) \rangle = 1.$$

Классы  $[x] \times [M^n]$  и  $[M^n] \times [x]$  получаются друг из друга посредством преобразования  $T_*$ , поэтому  $[M^n] \times [x] = (-1)^n [x] \times [M^n]$ . Таким образом,

$$\langle \tilde{U}, [M^n] \times [x] \rangle = (-1)^n \langle \tilde{U}, [x] \times [M^n] \rangle = 1. \quad (1)$$



Докажем ещё одну формулу: если  $a^p \in H^p(M^n; R)$  и  $b^q \in H^q(M^n; R)$ , то

$$\tilde{U} \cup (a^p \times b^q) = (-1)^{pq} \tilde{U} \cup (b^q \times a^p); \quad (2)$$

здесь подразумевается, что  $\tilde{U} \in H^n(M^n \times M^n; R)$ . Действительно, согласно лемме 15.6 мы имеем

$$\begin{aligned} (-1)^n U \cup (a^p \times b^q) &= T^*(U \cup (a^p \times b^q)) = \\ &= T^*(U) \cup T^*(a^p \times b^q) = (-1)^{n+pq} U \cup (b^q \times a^p). \end{aligned}$$

Из этого равенства для  $U$  следует равенство (2) для  $\tilde{U}$ .

Основная цель наших вычислений состоит в том, чтобы выразить

$$\langle \tilde{U}, D(a^k) \times \beta_k \rangle = \langle \tilde{U}, (a^k \cap [M^n]) \times \beta_k \rangle$$

через  $\langle a^k, \beta_k \rangle$ . Для этого помимо формул (1) и (2) нужны выражения для  $(a^k \times 1) \cap ([M^n] \times \beta_k)$  и  $(1 \times a^k) \cap ([M^n] \times \beta_k)$ . По определению  $a^k \times 1 = p_1^*(a^k) \cup p_2^*(1) = p_1^*(a^k) \cup 1$  и  $1 \times a^k = 1 \cup p_2^*(a^k)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} (a^k \times 1) \cap ([M^n] \times \beta_k) &= p_1^*(a^k) \cap ([M^n] \times \beta_k) \quad \text{и} \\ (1 \times a^k) \cap ([M^n] \times \beta_k) &= p_2^*(a^k) \cap ([M^n] \times \beta_k). \end{aligned}$$

Пусть  $[m_0, \dots, m_n]$  и  $[b_0, \dots, b_k]$  — симплексы, входящие в представитель гомологических классов  $[M^n]$  и  $\beta_k$ . Тогда  $[m_0, \dots, m_n] \times [b_0, \dots, b_k]$  представляет собой сумму симплексов  $[v_0, \dots, v_{n+k}]$ , где  $v_i = (m_{M(i)}, b_{B(i)})$ , а для  $v_{i+1}$  возможны два случая: 1)  $v_{i+1} = (m_{M(i)+1}, b_{B(i)})$ ; 2)  $v_{i+1} = (m_{M(i)}, b_{B(i)+1})$ . По определению

$$\begin{aligned} p_1^*(a^k) \cap [v_0, \dots, v_{n+k}] &= \langle p_1^*(a^k), [v_n, \dots, v_{n+k}] \rangle [v_0, \dots, v_n] = \\ &= \langle a^k, p_1[v_n, \dots, v_{n+k}] \rangle [v_0, \dots, v_n] = \\ &= \langle a^k, [m_{M(n)}, \dots, m_{M(n+k)}] \rangle [v_0, \dots, v_n], \\ p_2^*(a^k) \cap [v_0, \dots, v_{n+k}] &= \langle a^k, [b_{B(n)}, \dots, b_{B(n+k)}] \rangle [v_0, \dots, v_n]. \end{aligned}$$

Чтобы получились ненулевые выражения, симплексы  $[m_{M(n)}, \dots, m_{M(n+k)}]$  и  $[b_{B(n)}, \dots, b_{B(n+k)}]$  должны быть невырожденными. Во случае 2) симплекс  $[v_0, \dots, v_{n+k}]$  этим условием определяется однозначно, поэтому  $p_2^*(a^k) \cap ([M^n] \times \beta_k) = \langle a^k, \beta_k \rangle [M^n] \times [b_0]$ ; вместо  $[b_0]$  можно взять  $[x]$ , потому что все точки связного многообразия  $M^n$  задают один и тот же нульмерный класс гомологий. В случае 1) однозначно определён только симплекс  $[v_n, \dots, v_{n+k}]$ . Для симплекса  $[v_0, \dots, v_{n+k}]$  должно выполняться только условие  $v_0 = (m_0, b_0)$  и  $v_n = (m_{n-k}, b_k)$ . Сумма всех таких симплексов равна  $[m_0, \dots, m_{n-k}] \times [b_0, \dots, b_k]$ . Поэтому  $p_1^*(a^k) \cap ([M^n] \times \beta_k) = (a^k \cap ([M^n]) \times \beta_k)$ .

Теперь мы получаем, что

$$\begin{aligned} \langle \tilde{U}, (a^k \cap [M^n]) \times \beta_k \rangle &= \langle \tilde{U}, (a^k \times 1) \cap ([M^n] \times \beta_k) \rangle = \\ &= \langle \tilde{U} \cup (a^k \times 1), [M^n] \times \beta_k \rangle \stackrel{(2)}{=} \langle \tilde{U} \cup (1 \times a^k), [M^n] \times \beta_k \rangle = \\ &= \langle \tilde{U}, (1 \times a^k) \cap ([M^n] \times \beta_k) \rangle = \langle \tilde{U}, \langle a^k, \beta_k \rangle [M^n] \times [x] \rangle \stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} (-1)^n \langle a^k, \beta_k \rangle, \end{aligned}$$

т. е.

$$\langle \tilde{U}, D(a^k) \times \beta_k \rangle = (-1)^n \langle a^k, \beta_k \rangle. \quad (3)$$

Соотношение (3) позволяет сделать вывод, что если  $a^k \neq 0$ , то  $D(a^k) \neq 0$ . Значит, отображения  $H^k(M^n; R) \xrightarrow{D} H_{n-k}(M^n; R)$  и  $H^{n-k}(M^n; R) \xrightarrow{D} H_k(M^n; R)$  — мономорфизмы. Если кольцо  $R$  является полем, то  $H^k(M^n; R)$  — линейное пространство над полем  $R$ , двойственное пространству  $H_k(M^n; R)$ . Согласно теореме 15.7 эти пространства конечномерные, поэтому они изоморфны одному и тому же линейному пространству  $V_k$ . Мы получили два мономорфизма  $V_k \rightarrow V_{n-k}$  и  $V_{n-k} \rightarrow V_k$  конечномерных линейных пространств. Следовательно, эти мономорфизмы являются изоморфизмами. Таким образом, теорема об изоморфизме Пуанкаре доказана для коэффициентов в  $\mathbb{Z}_p$ ,  $p$  — простое число.

Чтобы доказать теорему об изоморфизме Пуанкаре для коэффициентов в  $\mathbb{Z}$ , построим цепной комплекс с группами цепей  $C_{n-k} = C^{k+1}(M^n) \oplus \oplus C_{n-k}(M^n)$ , т. е.  $C_k = C^{n-k+1}(M^n) \oplus C_k(M^n)$ . Граничный гомоморфизм  $\partial: C_k \rightarrow C_{k-1}$  зададим формулой

$$\bar{\partial}(a^{n-k+1}, \beta_k) = ((-1)^k \delta a^{n-k+1}, \partial \beta_k + D_{\#}(a^{n-k+1})).$$

Легко проверить, что  $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$ . Действительно,

$$\bar{\partial}\bar{\partial}(a^{n-k+1}, \beta_k) = (-\delta \delta a^{n-k+1}, \partial(\partial \beta_k + D_{\#}(a^{n-k+1})) + (-1)^k D_{\#}(\delta a^{n-k+1})) = 0,$$

поскольку  $\partial D_{\#}(a^{n-k+1}) = (-1)^{k+1} D_{\#} \delta(a^{n-k+1})$ .

Имеет место короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow C_k(M^n) \longrightarrow C^{n-k+1}(M^n) \oplus C_k(M^n) \longrightarrow C^{n-k+1}(M^n) \longrightarrow 0.$$

Из таких коротких точных последовательностей групп складывается точная последовательность цепных комплексов. Здесь, правда, отображение  $C_* \rightarrow C^*(M^n)$  является цепным только с точностью до знака, но и этого достаточно для построения точной последовательности гомологий цепных комплексов. Покажем, что в этой точной последовательности связывающий гомоморфизм  $H^{n-k+1}(M^n) \rightarrow H_{k-1}(M^n)$  совпадает с гомоморфизмом  $D$ . Действительно, пусть  $a \in C^{n-k+1}(M^n)$  и  $\delta a = 0$ . Выберем в  $C_k$  элемент  $(a, 0)$ ,

который отображается в  $a$ . Затем рассмотрим  $\bar{\partial}(a, 0) = (0, D_{\#}(a))$  и возьмём в  $C_k(M^n)$  прообраз этого элемента. Он равен  $D_{\#}(a)$ . Отображение  $a \mapsto D_{\#}(a)$  и есть связывающий гомоморфизм (на уровне цепей).

Ту же самую конструкцию можно применить для группы коэффициентов  $\mathbb{Z}_p$  и получить точную последовательность

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{D} H_k(M^n; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_k(C_*; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{n-k+1}(M^n; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{D} \dots, \end{aligned}$$

в которой гомоморфизмы  $D$  — изоморфизмы. Из этого следует, что  $H_*(C_*; \mathbb{Z}_p) = 0$ . Но все группы  $H_*(C_*)$  конечно порождённые, поэтому из формулы универсальных коэффициентов следует, что  $H_*(C_*) = 0$ . Значит,  $D$  — изоморфизм и для коэффициентов в  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

Любое связное замкнутое топологическое многообразие ориентируемо относительно группы коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$ , поэтому те же самые рассуждения (только в упрощённом виде) показывают, что отображение  $D: H^k(M^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{n-k}(M^n; \mathbb{Z}_2)$ , заданное формулой  $D(a^k) = a^k \cap [M^n]_2$ , является изоморфизмом.

## 15.4. Изоморфизм Лefшеца

Для топологических многообразий теорема об изоморфизме Лefшеца выводится из теоремы об изоморфизме Пуанкаре по той же самой схеме, что и для гладких многообразий. Но теперь нам нужна теорема о воротнике для топологических многообразий, которая доказывается более сложно, чем в гладком случае. Кроме того, нужно построить фундаментальный класс ориентированного топологического многообразия с краем и доказать его свойства.

Теорема о воротнике для топологических многообразий была доказана Брауном [Вг7]; наше изложение следует [Со1].

**Теорема 15.9** (о воротнике). *Пусть  $M^n$  — компактное топологическое многообразие с краем  $V = \partial M^n$ . Тогда в  $M^n$  существует открытое множество  $U$ , которое содержит  $V$  и гомеоморфно  $V \times [0, 1)$ . Более того, гомеоморфизм  $h: U \rightarrow V \times [0, 1)$  можно выбрать так, что  $h(x) = (x, 0)$  для всех точек  $x \in V$ .*

**Доказательство.** Для каждой точки  $x \in V$  можно выбрать в  $V$  открытое множество  $U_x$  так, что существует вложение  $h_x: \bar{U}_x \times [0, 1] \rightarrow M^n$ , для которого  $h_x(y, 0) = y$  для всех  $y \in \bar{U}_x$ . Множество  $V$  компактно, поэтому из покрытия  $\{U_x\}$  можно выбрать конечное подпокрытие  $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$ . Для краткости эти множества будем обозначать  $U_1, \dots, U_m$ , а соответствующие вложения —  $h_1, \dots, h_m$ .

Топологическое пространство  $B$  хаусдорфово и компактно, поэтому оно нормально. Значит, в покрытие  $\{U_i\}$  можно вписать открытое покрытие  $\{V_i\}$  так, что  $\bar{V}_i \subset U_i$ .

Основная идея доказательства теоремы о воротнике состоит в том, чтобы рассмотреть топологическое пространство  $M^+$ , которое получается приклеиванием  $B \times [-1, 0]$  к  $M^n$  по отображению  $\varphi: B \times \{0\} \rightarrow M^n$ , переводящему точку  $(x, 0)$  в точку  $x \in B \subset M^n$ . Затем с помощью «локальных воротников»  $h_i: \bar{U}_i \times [0, 1] \rightarrow M^n$  индукцией по  $m$  нужно построить гомеоморфизм  $M^n$  на  $M^+$ .

Зададим вложения  $H_i: \bar{U}_i \times [-1, 1] \rightarrow M^+$  формулой

$$H_i(x, t) = \begin{cases} h_i(x, t) & \text{для } t \in [0, 1]; \\ (x, t) & \text{для } t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

На  $\bar{U}_i \times \{0\}$  оба отображения согласованы, поэтому получаем корректно определённые вложения. Мы воспользуемся ими для индуктивного построения функций  $f_i: B \rightarrow [-1, 0]$  и вложений  $g_i: M^n \rightarrow M^+$  для  $i=0, 1, \dots, m$ , которые обладают следующими свойствами:

- а)  $f_i(x) = -1$  для  $x \in \bigcup_{j=1}^i \bar{V}_j$  (в частности,  $f_m(x) = -1$  для всех  $x \in B$ );
- б)  $g_i(x) = (x, f_i(x))$  для  $x \in B$ ;
- в)  $g_i(M^n) = M^n \cup \{(x, t) \mid t \geq f_i(x)\}$ .

Если удастся построить такие отображения, то  $g_m$  — гомеоморфизм  $M^n$  на  $M^+$ , поэтому мы получаем требуемый воротник.

Положим  $g_0 = \text{id}_{M^n}$  и  $f_0 \equiv 0$ . Будем считать, что  $f_{i-1}$  и  $g_{i-1}$  уже построены, и займёмся построением  $f_i$  и  $g_i$ . Рассмотрим множество  $H_i^{-1}(g_{i-1}(M^n)) \subset \bar{U}_i \times [-1, 1]$ . Множество  $g_{i-1}(M^n)$  содержит  $M^n$ , поэтому  $H_i^{-1}(g_{i-1}(M^n)) \supset \bar{U}_i \times [0, 1]$ ; схематично это изображено на рис. 41. Мы хотим построить вложение  $\varphi_i: H_i^{-1}(g_{i-1}(M^n)) \rightarrow \bar{U}_i \times [-1, 1]$ , раздувая слои над точками  $x \in B$  до тех пор, пока слой над каждой точкой  $x \in \bar{V}_i$  не совпадёт со всем отрезком  $[-1, 1]$ ; по-другому это можно записать так:  $\varphi_i(H_i^{-1}(g_{i-1}(\bar{V}_i))) = \bar{U}_i \times [-1, 0]$ . При этом мы хотим, чтобы отображение  $\varphi_i$  было тождественно на  $(\bar{U}_i \setminus U_i) \times [-1, 1]$  и на  $\bar{U}_i \times \{0\}$ . Чтобы построить такое вложение, мы воспользуемся леммой Урысона (часть I, теорема 7.6). Замкнутые множества  $\bar{U}_i \setminus U_i$  и  $\bar{V}_i$ , лежащие в нормальном пространстве  $B$ , не пересекаются. Поэтому суще-

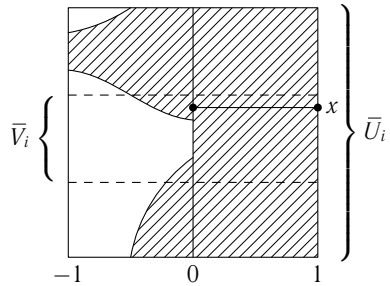


Рис. 41. Множество  $H_i^{-1}(g_{i-1}(M^n))$

ствует функция  $\lambda_i: \bar{U}_i \rightarrow [0, 1]$ , которая принимает значение 0 на  $\bar{U}_i \setminus U_i$  и значение 1 на  $\bar{V}_i$ . Пусть  $L_x$  — аффинное отображение отрезка  $[f_{i-1}(x), 1]$  на отрезок  $[(1 - \lambda_i(x))f_{i-1}(x) + \lambda_i(x)(-1), 1]$ ; при  $x \in \bar{V}_i$  получаем отрезок  $[-1, 1]$ , а при  $x \in \bar{U}_i \setminus U_i$  получаем отрезок  $[f_{i-1}(x), 1]$ , т. е. в этом случае отображение тождественное. Для  $(x, t) \in H_i^{-1}(g_{i-1}(M^n))$  положим  $\varphi_i(x, t) = (x, L_x(t))$ ; отображение  $\varphi_i$  непрерывное. Зададим, далее, отображение  $\Phi_i: g_i(M^n) \rightarrow M^+$  формулой

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} H_i \varphi_i H_i^{-1}(x) & \text{для } x \in g_{i-1}(M^n) \cap H_i(\bar{U}_i \times [-1, 1]); \\ x & \text{для всех других } x \in g_i(M^n). \end{cases}$$

Наконец, положим  $g_i = \Phi_i g_{i-1}$ . Корректность определения отображения  $\Phi_i$  (а тем самым и  $g_i$ ) следует из того, что отображение  $\varphi_i$  тождественно на  $(\bar{U}_i \setminus U_i) \times [-1, 1]$  и на  $\bar{U}_i \times \{0\}$ . Отображение  $\Phi_i$  (а тем самым и  $g_i$ ) является вложением, потому что  $\varphi_i$  — вложение, поскольку каждое отображение  $L_x$  взаимно однозначно. Кроме того,

$$g_{i-1}(M^n) \cap H_i(\bar{U}_i \times [-1, 1]) = H_i(\bar{U}_i \times [0, 1]) \cup \{(x, t) \mid t \geq f_{i-1}(x), x \in \bar{U}_i\}$$

в силу свойства в) для  $g_{i-1}$ . Функция  $f_i(x)$  определяется теперь свойством б). Свойства а) и в) выполняются по построению.  $\square$

Пусть  $M^n$  — компактное топологическое многообразие с краем  $\partial M^n$ . Рассмотрим замкнутое топологическое многообразие  $\tilde{M}^n$ , которое получается из двух экземпляров многообразия  $M^n$  отождествлением соответствующих точек их краёв.

Для всех точек  $x \in M^n \setminus \partial M^n$  можно определить группы  $T_x$  (см. с. 250) и построить накрытие  $\mathcal{T} \rightarrow M^n \setminus \partial M^n$ . Многообразие  $M^n$  называют *ориентируемым*, если у этого накрытия существует такое сечение  $s$ , что  $s(x)$  — образующая группы  $T_x$  для всех  $x \in M^n \setminus \partial M^n$ . Сечение  $s$  называют при этом *ориентацией*. Легко проверить, что многообразие  $M^n$  ориентируемо тогда и только тогда, когда многообразие  $\tilde{M}^n$  ориентируемо. Кроме того, если многообразие  $M^n$  ориентируемо, то многообразие  $\partial M^n$  тоже ориентируемо, т. е. каждая компонента связности многообразия  $\partial M^n$  ориентируема.

Пусть  $\alpha_x$  — образующая группы  $T_x = H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ . Гомологический класс  $\alpha \in H_n(M^n, \partial M^n)$  называют *фундаментальным*, если для всех  $x \in M^n \setminus \partial M^n$  отображение  $p_*: H_n(M^n, \partial M^n) \rightarrow H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) = T_x$  переводит  $\alpha$  в  $\alpha_x$ .

**Теорема 15.10.** Пусть  $M^n$  — компактное связное ориентируемое топологическое многообразие с краем  $\partial M^n$ ,  $s$  — ориентация многообразия  $M^n$ . Тогда существует единственный фундаменталь-

ный класс  $\alpha \in H_n(M^n, \partial M^n)$ , для которого  $\alpha_x = s(x)$  при всех  $x \in M^n \setminus \partial M^n$ . При этом связывающий гомоморфизм  $\partial_*: H_n(M^n, \partial M^n) \rightarrow H_{n-1}(\partial M^n)$  переводит  $\alpha$  в фундаментальный класс замкнутого многообразия  $\partial M^n$ , т. е.  $\partial_*(\alpha)$  задаёт на каждой компоненте связности многообразия  $\partial M^n$  фундаментальный класс.

**Доказательство.** Ориентация  $s$  задаёт ориентацию  $\tilde{s}$  многообразия  $\tilde{M}^n$ . Многообразие  $\tilde{M}^n$  замкнутое и ориентируемое, поэтому существует фундаментальный класс  $\tilde{\alpha} \in H_n(\tilde{M}^n)$ , для которого  $(p_x)_*(\tilde{\alpha}) = \tilde{s}(x)$  для всех  $x \in \tilde{M}^n$ . Класс  $\alpha$  мы будем строить по классу  $\tilde{\alpha}$ . Для этого нам потребуется изоморфизм

$$H_n(\tilde{M}^n, \tilde{M}^n \setminus (M^n \setminus \partial M^n)) \cong H_n(M^n, \partial M^n).$$

Этот изоморфизм можно было бы получить, вырезав  $(M^n)' \setminus \partial M^n$ , где  $(M^n)'$  — второй экземпляр многообразия  $M^n$ . Но так поступать нельзя, потому что условие  $(M^n)' \setminus \partial M^n \subset \text{int}(M^n)'$  не выполняется. Для построения требуемого изоморфизма нужно воспользоваться теоремой о воротнике: мы будем вырезать  $(M^n)' \setminus \partial M^n$  не из  $(M^n)'$ , а из объединения  $(M^n)'$  и воротника  $M^n$ . При этом нужно ещё воспользоваться очевидными гомотопическими эквивалентностями.

Класс  $\alpha$  мы определим как образ класса  $\tilde{\alpha}$  при композиции гомоморфизмов

$$H_n(\tilde{M}^n) \longrightarrow H_n(\tilde{M}^n, \tilde{M}^n \setminus (M^n \setminus \partial M^n)) \xrightarrow{\cong} H_n(M^n, \partial M^n).$$

Выполнение равенства  $\alpha_x = s(x)$  при этом очевидно.

Пусть  $x \in \partial M^n$ . Возьмём в некоторой карте многообразия  $\partial M^n$  замкнутый шар  $D^{n-1}$  с центром  $x$  и рассмотрим в открытом множестве  $U = \partial M^n \times [0, 1]$  из теоремы о воротнике подмножество  $E = \{(x, t) \mid x \in D^{n-1}, t \in [0, 1/2]\}$ . Положим  $M^n_E = M^n \setminus \text{int} E$ . Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M^n, \partial M^n) & \xrightarrow{i_*} & H_n(M^n, M^n_E) & \xleftarrow[\cong]{k_*} & H_n(E, \partial E) \\ \downarrow \partial_* & & \downarrow \partial_* & & \cong \downarrow \partial_* \\ H_{n-1}(\partial M^n) & \xrightarrow{i'_*} & H_{n-1}(M^n_E) & \xleftarrow{k'_*} & H_{n-1}(\partial E) \\ \downarrow (p_x)_* & & \downarrow & & \cong \downarrow \\ H_{n-1}(\partial M^n, \partial M^n \setminus \{x\}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(M^n_E, M^n_E \setminus \{x\}) & \xleftarrow{\cong} & H_{n-1}(\partial E, \partial E \setminus \{x\}). \end{array}$$

Горизонтальные изоморфизмы в этой диаграмме возникают из теоремы о вырезании (иногда вырезание нужно производить не непосредственно, а чуть более аккуратно, используя очевидные гомотопические эквивалентности).

Пусть  $y \in \text{int } E$ . Представим гомоморфизм  $(p_y)_*: H_n(M^n, \partial M^n) \rightarrow H_n(M^n, M^n \setminus \{y\})$  в виде композиции

$$H_n(M^n, \partial M^n) \xrightarrow{i_*} H_n(M^n, M_E^n) \longrightarrow H_n(M^n, M^n \setminus \{y\}).$$

Элемент  $(p_y)_*(\alpha) = s(y)$  является образующей группы  $H_n(M^n, M^n \setminus \{y\}) \cong \mathbb{Z}$ , поэтому элемент  $i_*(\alpha)$  является образующей группы  $H_n(M^n, M_E^n) \cong \mathbb{Z}$ . Значит, в группе  $H_n(E, \partial E) \cong \mathbb{Z}$  можно выбрать образующую  $\alpha'$  так, что  $k_*(\alpha') = i_*(\alpha)$ .

Коммутативность диаграммы показывает, что  $k'_*\partial_*(\alpha') = i'_*\partial_*(\alpha)$ . Поэтому образы элементов  $\partial_*(\alpha)$  и  $\partial_*(\alpha')$  в группе  $H_{n-1}(M_E^n, M_E^n \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$  совпадают. При этом образ элемента  $\partial_*(\alpha')$  является образующей, поэтому образ элемента  $\partial_*(\alpha)$  тоже является образующей. Следовательно, элемент  $(p_x)_*\partial_*(\alpha)$  является образующей группы  $H_{n-1}(\partial M^n, \partial M^n \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ . Это означает, что  $\partial_*(\alpha)$  — фундаментальный класс многообразия  $\partial M^n$ .

Теперь уже легко доказать оставшуюся часть теоремы — единственность фундаментального класса  $\alpha$ . Предположим, что  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — два фундаментальных класса в  $H_n(M^n, \partial M^n)$ , соответствующих одной и той же ориентации. Тогда  $\partial_*(\alpha_1)$  и  $\partial_*(\alpha_2)$  — два фундаментальных класса в  $H_{n-1}(\partial M^n)$ , соответствующих одной и той же ориентации. Поэтому  $\alpha_1 - \alpha_2 \in \text{Ker } \partial_*$ .

Из теоремы о воротнике следует, что пространства  $M^n$  и  $M^n \setminus \partial M^n$  гомотопически эквивалентны одному и тому же пространству  $M^n \setminus U$ , где  $U = \partial M^n \times [0, 1)$ . Поэтому  $H_n(M^n) \cong H_n(M^n \setminus \partial M^n) = 0$ . Следовательно, в точной последовательности

$$H_n(M^n) \longrightarrow H_n(M^n, \partial M^n) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\partial M^n)$$

слева стоит ноль, а значит,  $\text{Ker } \partial_* = 0$ . □

Теперь можно воспользоваться такими же рассуждениями, как для гладких многообразий (в триангулируемом случае), и доказать следующее утверждение.

**Теорема 15.11 (изоморфизм Лefшеца).** Пусть  $M^n$  — компактное ориентируемое топологическое многообразие с краем  $\partial M^n$ ,  $[M^n] \in H_n(M^n, \partial M^n)$  — фундаментальный класс. Тогда гомоморфизмы  $D: H_k(M^n, \partial M^n) \rightarrow H_{n-k}(M^n)$  и  $D: H_k(M^n) \rightarrow H_{n-k}(M^n, \partial M^n)$ , заданные сар-произведением на  $[M^n]$ , являются изоморфизмами.

Для гомологий и когомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  теорема об изоморфизме Лefшеца верна и в случае неориентируемых многообразий.

**Задача 15.1 [Sa1].** Пусть  $M^n$  — компактное ориентируемое топологическое многообразие с краем  $\partial M^n$ . Предположим, что край  $\partial M^n$  разбит на непересекающиеся множества  $V_1$  и  $V_2$ , каждое из которых состоит из нескольких связных компонент многообразия  $\partial M^n$ . Докажите, что го-

моморфизм  $H^k(M^n, V_1) \rightarrow H_{n-k}(M^n, V_2)$ , заданный сар-произведением на  $[M^n]$ , является изоморфизмом.

### 15.5. Обобщение теоремы Хелли

Используя некоторые результаты из п. 15.1, а именно теоремы 15.1 и 15.2, можно перенести обобщённую теорему Хелли (теорема 14.10 на с. 227) на произвольные многообразия.

**Т е о р е м а 15.12** (Дебруннер [De]). *Пусть  $M^n$  —  $n$ -мерное топологическое многообразие,  $X_1, \dots, X_m$  — набор открытых подмножеств  $M^n$ , причём пересечение любых  $r \leq n + 1$  множеств непусто и имеет нулевые приведённые гомологии для всех размерностей не выше  $n - r$ .*

а) *Если  $M^n$  не является гомологической  $n$ -мерной сферой, то пространство  $X_1 \cap \dots \cap X_m$  ациклично (в частности, непусто).*

б) *Если  $M^n$  — гомологическая  $n$ -мерная сфера, то нужно дополнительно предположить, что никакие  $n + 2$  из множеств  $X_1, \dots, X_m$  не покрывают  $M^n$ ; тогда пространство  $X_1 \cap \dots \cap X_m$  тоже ациклично.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим, что теорема неверна для набора множеств  $X_1, \dots, X_m$ , причём число  $m$  здесь минимально. Из минимальности  $m$  следует, что пересечение любых  $r \leq m - 1$  из множеств  $X_1, \dots, X_m$  ациклично. Значит, к набору  $X_1, \dots, X_m$  можно применить лемму 14.1 (см. с. 226).

Предположим сначала, что  $X_1 \cap \dots \cap X_m = \emptyset$ . По условию теоремы это возможно лишь при  $m \geq n + 2$ . Пусть  $Y = X_1 \cup \dots \cup X_m$ . Согласно утверждению а) леммы 14.1 группа  $\tilde{H}_q(Y) = 0$  отлична от нуля в точности при  $q = m - 2$ . С другой стороны, согласно теореме 15.1 мы имеем  $\tilde{H}_q(Y) = 0$  при  $q > n$ , поэтому  $m - 2 \leq n$ . Сопоставляя это с неравенством  $m \geq n + 2$ , получаем  $n = m - 2$ . При этом  $\tilde{H}_n(Y) \neq 0$ , а это возможно лишь в том случае, когда  $Y = M^n$ . Действительно, если  $Y \neq M^n$ , то  $Y$  — некомпактное  $n$ -мерное многообразие без края, поэтому согласно теореме 14.10 мы имеем  $H_n(Y) = 0$ . Итак, группа  $\tilde{H}_q(M^n)$  отлична от нуля в точности при  $q = n$ . Это означает, что  $M^n$  — гомологическая сфера. Но по условию если  $M^n$  — гомологическая сфера, то  $Y \neq M^n$ . Получено противоречие.

Предположим теперь, что  $X_1 \cap \dots \cap X_m \neq \emptyset$ . Мы также предположим, что пространство  $X_1 \cap \dots \cap X_m$  не ациклично. Поэтому можно выбрать наименьшее число  $p \geq 0$ , для которого  $\tilde{H}_p(X_1 \cap \dots \cap X_m) \neq 0$ . Положим  $q = p + m - 1$ . Согласно утверждению б) леммы 14.1 мы имеем  $\tilde{H}_q(X_1 \cup \dots \cup X_m) \neq 0$ . Применив к  $n$ -мерному многообразию  $X_1 \cup \dots \cup X_m$  теорему 14.10, получим  $q \leq n$ . Кроме того,  $q - m + 1 = p \geq 0$ , поэтому



$m \leq q + 1 \leq n + 1$ . В таком случае по условию теоремы пространство  $X_1 \cup \dots \cup X_m$  имеет нулевые приведённые гомологии для всех размерностей не выше  $n - m$ . Поэтому  $p > n - m$ , т. е.  $q - m + 1 > n - m$ . Сопоставляя это с неравенством  $q + 1 \leq n + 1$ , получаем  $q = n$ . Из минимальности  $p$  (и, соответственно,  $q$ ) следует, что  $X_1 \cup \dots \cup X_m$  —  $n$ -мерная гомологическая сфера. Но тогда  $M^n = X_1 \cup \dots \cup X_m$ , а это противоречит условию. Снова получено противоречие.  $\square$

**Задача 15.2.** Приведите пример  $n + 2$  открытых подмножеств  $S^n$ , пересечение любых  $r \leq n + 1$  из которых является (непустым) стягиваемым множеством, а объединение всех этих множеств совпадает с  $S^n$  (в частности, оно не ациклично).

## § 16. Характеристические классы: продолжение

Многие свойства характеристических классов удобно доказывать, используя сингулярные гомологии и когомологии. Основная часть этих свойств связана с изоморфизмом Тома. Но начнём мы с доказательства теоремы 11.31, сформулированной на с. 186. При доказательстве мы будем использовать обозначения, введённые при формулировке этой теоремы и чуть раньше.

**Доказательство теоремы 11.31.** Достаточно проверить для  $x_i(\xi)$  все свойства, которым должны удовлетворять характеристические классы. То, что  $x_0(\xi) = 1$  и  $x_i(\xi) = 0$  при  $i > \dim \xi$ , непосредственно включено в определение. Проверим, что если  $g: B_1 \rightarrow B$  — произвольное отображение, то  $x_i(g^*(\xi)) = g^*(x_i(\xi))$ .

Слои расслоений  $g^*(\xi)$  и  $\xi$  над точками  $b_1$  и  $g(b_1)$  канонически отождествляются, поэтому слои расслоений  $Pg^*(\xi)$  и  $P\xi$  над этими точками тоже канонически отождествляются. Значит, определено отображение расслоений  $\tilde{g}: E(Pg^*\xi) \rightarrow E(P\xi)$ . Для этого отображения диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E(Pg^*\xi) & \xrightarrow{\tilde{g}} & E(P\xi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

коммутативна. Значит, расслоение  $\tilde{g}(\lambda_\xi)$  изоморфно расслоению  $\lambda_{g^*\xi}$ . Поэтому в кольце  $H^*(E(Pg^*\xi))$  имеет место равенство  $\tilde{g}(a_\xi) = a_{g^*\xi}$ . По определению  $a_{g^*\xi}^n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} x_i(g^*\xi) a_{g^*\xi}^{n-i}$  и

$$\tilde{g}^*(a_\xi^n) = \tilde{g}^* \left( \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} x_i(\xi) a_\xi^{n-i} \right) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} g^*(x_i(\xi)) \tilde{g}^*(a_\xi^{n-i});$$

при записи последнего равенства мы воспользовались тем, что  $\tilde{g}^*(\beta a_\xi^i) = g^*(\beta) \tilde{g}^*(a_\xi^i)$  для любого элемента  $\beta \in H^*(B)$ . Учитывая однозначность разложений, получаем  $x_i(g^*\xi) = g^*(x_i(\xi))$ , что и требовалось.

Перейдём к доказательству последнего (наиболее сложного) утверждения о том, что имеет место формула Уитни  $x_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} x_i(\xi)x_j(\eta)$ .

(Формулу Уитни можно записать и другим эквивалентным способом, но сейчас нам удобнее доказывать её для расслоений над одной базой.) В линейном пространстве  $V_1 \oplus V_2$  есть подпространства  $V_1 \oplus \{0\}$  и  $\{0\} \oplus V_2$ , изоморфные  $V_1$  и  $V_2$ . Поэтому в топологическом пространстве  $E(P(\xi \oplus \eta))$  канонически определены подпространства  $E(P\xi)$  и  $E(P\eta)$ . При этом подпространства  $E(P\eta)$  и  $E(P\xi)$  являются деформационными ретрактами пространств  $U = E(P(\xi \oplus \eta)) \setminus E(P\xi)$  и  $V = E(P(\xi \oplus \eta)) \setminus E(P\eta)$  соответственно. Рассмотрим в кольце когомологий пространства  $E(P(\xi \oplus \eta))$  элементы

$$\alpha_1 = \sum_{i=0}^m (-1)^i x_i(\xi) y^{m-i} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \sum_{j=0}^n (-1)^j x_j(\eta) y^{n-j},$$

где  $y = x_1(\lambda_{\xi \oplus \eta})$ ,  $m = \dim \xi$  и  $n = \dim \eta$ . Введём для краткости обозначение  $E = E(P(\xi \oplus \eta))$ . Рассмотрим когомологическую последовательность пары  $(E, V)$ :

$$\dots \longrightarrow H^m(E, V) \xrightarrow{p^*} H^m(E) \xrightarrow{i^*} H^m(V) \longrightarrow \dots$$

Отображение  $i^*$  соответствует ограничению класса когомологий на  $V$ . Но  $E(P\xi)$  является деформационным ретрактом пространства  $V$ , поэтому вместо ограничения на  $V$  можно рассматривать ограничение на  $E(P\xi)$ . Покажем, что при ограничении класса  $\alpha_1$  на  $E(P\xi)$  получается класс  $\sum_{i=0}^m (-1)^i x_i(\xi) a_\xi^{m-i} = 0$ . Действительно, пусть  $\lambda_\xi = f^*(\gamma^1)$ . При ограничении класса  $y = x_1(\lambda_{\xi \oplus \eta})$  на  $E(P\xi)$  получаем класс  $x_1(\lambda_\xi) = x_1(f^*\gamma^1) = f^*x_1(\gamma^1) = f^*(\alpha) = a_\xi$  (мы пользуемся доказанными ранее свойствами: естественностью и тем, что  $x_1(\gamma^1) = \alpha$ ). Последовательность пары точна, поэтому существует элемент  $\alpha'_1 \in H^m(E, V)$ , для которого  $p^*\alpha'_1 = \alpha_1$ . Аналогично существует элемент  $\alpha'_2 \in H^m(E, U)$ , для которого  $p^*\alpha'_2 = \alpha_2$ . Элемент  $\alpha'_1 \smile \alpha'_2$  лежит в  $H^*(E, U \cup V) = 0$ , поэтому  $\alpha'_1 \smile \alpha'_2 = 0$ . Следовательно,  $\alpha_1 \smile \alpha_2 = (p^*\alpha'_1) \smile (p^*\alpha'_2) = 0$ . В итоге получаем

$$\left( \sum_{i=0}^m (-1)^i x_i(\xi) y^{m-i} \right) \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j x_j(\eta) y^{n-j} \right) = 0.$$

В случае классов Штифеля—Уитни рассматриваются когомологии с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ , для которых умножение коммутативно (а не косоком-

мутативно). В случае классов Чженя  $x_i$  и  $y$  имеют чётную размерность, поэтому для них умножение тоже коммутативно. Следовательно, полученное равенство можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{m+n} (-1)^k \left( \sum_{i+j=k} x_i(\xi) \smile x_j(\eta) \right) y^{m+n-k} = 0.$$

С другой стороны, существуют единственные элементы  $x_k(\xi \oplus \eta)$ , для которых

$$\sum_{k=0}^{m+n} (-1)^k x_k(\xi \oplus \eta) y^{m+n-k} = 0.$$

Значит,  $x_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} x_i(\xi) \smile x_j(\eta)$ , что и требовалось.

### 16.1. Изоморфизм Тома для расслоений

У каждого гладкого многообразия есть касательное расслоение. У топологического же многообразия касательного расслоения нет. В связи с этим Милнор [Ми5] ввёл понятие микрорасслоения, которое обобщает понятие векторного расслоения. При этом у каждого топологического многообразия есть касательное микрорасслоение, с которым во многих отношениях можно работать так же, как с касательным расслоением гладкого многообразия. Например, приведённое выше доказательство изоморфизма Пуанкаре для топологических многообразий фактически основано на использовании микрорасслоений.

*Микрорасслоение* размерности  $n$  — это отображение  $p: E \rightarrow B$ , которое обладает следующими свойствами:

1) существует отображение  $i: B \rightarrow E$ , для которого  $pi = \text{id}_B$ ;

2) отображение  $p$  локально тривиально в том смысле, что для любой точки  $b \in B$  найдутся открытые окрестности  $U \ni b$ ,  $V \ni i(b)$  и гомеоморфизм  $h_b: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow V \cap p^{-1}(U)$ , для которых  $ph_b(u, v) = u$  для всех  $(u, v) \in U \times \mathbb{R}^n$  и  $h_b(u, v) = i(u)$  для всех  $u \in U$ .

**Пример 16.1.** *Векторное расслоение  $p: E \rightarrow B$  является микрорасслоением. В качестве  $i$  можно взять нулевое сечение  $i(b) = (b, 0)$ .*

**Пример 16.2.** *Пусть  $M$  — топологическое многообразие без края. Тогда проекция  $p: M \times M \rightarrow M$  на первый множитель является микрорасслоением. В качестве  $i$  можно взять диагональное отображение  $d: M \rightarrow M \times M$ .*

Доказательство того, что в примере 16.2 действительно получается микрорасслоение, фактически содержится в доказательстве леммы 15.2 на

с. 254. Это микрорасслоение называют *касательным микрорасслоением* топологического многообразия  $M$ .

Для топологического многообразия  $M$  с краем  $\partial M$  касательное микрорасслоение можно определить следующим образом. Приклеим к краю многообразия  $M$  прямое произведение  $\partial M \times [0, 1)$ . Из теоремы о воротнике следует, что в результате получится топологическое многообразие  $M'$ . У  $M'$  края нет. Касательное микрорасслоение многообразия  $M$  — это ограничение на  $M \times M$  касательного микрорасслоения многообразия  $M'$ .

Обычно микрорасслоение  $p: E \rightarrow B$  рассматривается вместе с фиксированным отображением  $i: B \rightarrow E$ .

Два микрорасслоения  $p: E \rightarrow B$  и  $p': E' \rightarrow B$  (над одной и той же базой  $B$ ) с фиксированными отображениями  $i: B \rightarrow E$  и  $i': B \rightarrow E'$  называют *эквивалентными*, если в  $E$  и в  $E'$  есть открытые окрестности  $U$  и  $U'$  множеств  $i(B)$  и  $i'(B)$  и существует гомеоморфизм  $h: U \rightarrow U'$ , для которого  $hi = i'$  и  $p'|_{U'}h = p|_U$ .

**Теорема 16.1.** *Для замкнутого гладкого многообразия  $M$  касательное расслоение эквивалентно касательному микрорасслоению.*

**Доказательство.** Введём на касательном расслоении риманову метрику. Для каждого касательного вектора  $v \in T_x M$  существует единственная геодезическая  $\gamma_v(t)$ , для которой  $\gamma_v(0) = x$  и  $\frac{d}{dt}\gamma_v(0) = v$ . Рассмотрим отображение  $\exp_x: T_x M \rightarrow M$ , которое сопоставляет касательному вектору  $v$  точку  $\gamma_v(1)$ . Компактность многообразия  $M$  позволяет выбрать число  $\varepsilon > 0$  так, что для всех  $x \in M$  ограничение отображения  $\exp_x$  на открытый шар в  $T_x M$ , состоящий из векторов длины меньше  $\varepsilon$ , диффеоморфно отображает этот шар на некоторую открытую окрестность точки  $x$  в  $M$ .

Пусть  $U$  — открытая окрестность нулевого сечения в  $TM$ , состоящая из векторов длины меньше  $\varepsilon$ . Отображение  $h: U \rightarrow M \times M$ , заданное формулой  $h(x, v) = (x, \exp_x(v))$ , является диффеоморфизмом окрестности  $U$  на окрестность  $U'$  диагонали  $d(M)$  в  $M \times M$ . Отображение  $h$  обладает всеми требуемыми свойствами.  $\square$

Класс Тома  $U \in H^n(M \times M, M \times M \setminus d(M))$  характеризуется тем, что для любой точки  $x \in M$  отображение пар

$$l_x: (M, M \setminus \{x\}) \rightarrow (M \times M, M \times M \setminus d(M)),$$

заданное формулой  $l_x(y) = (x, y)$ , переводит  $U$  в образующую группы  $H^n(M, M \setminus \{x\})$ , т. е.  $l_x^* U$  — образующая группы  $H^n(M, M \setminus \{x\})$ . По аналогии с этим *класс Тома*  $n$ -мерного микрорасслоения  $p: E \rightarrow B$  — это

когомологический класс  $U \in H^n(E, E \setminus i(B))$ , который обладает следующим свойством: для любой точки  $b \in B$  естественное включение

$$i_b: (p^{-1}(b), p^{-1}(b) \setminus i(b)) \rightarrow (E, E \setminus i(B))$$

переводит  $U$  в образующую группы  $H^n(p^{-1}(b), p^{-1}(b) \setminus i(b))$ .

Сейчас нас будут интересовать классы Тома в случае вещественных векторных расслоений. Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 16.2.** Пусть  $\xi$  — ориентированное вещественное  $n$ -мерное векторное расслоение над компактным  $CW$ -комплексом  $B$ . Пусть, далее,  $E = E(\xi)$  — пространство расслоения и  $E_0$  — открытое подмножество в  $E$ , состоящее из всех ненулевых векторов. Тогда

а) существует единственный класс когомологий  $U_\xi \in H^n(E, E_0)$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ , обладающий тем свойством, что для любой точки  $b \in B$  класс когомологий  $i_b^* U_\xi$  является образующей группы  $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , задающей выбранную ориентацию слоя  $\mathbb{R}^n$ ;

б)  $H^i(E, E_0) = 0$  при  $i < n$ ;

в) отображение  $H^i(B) \rightarrow H^{i+n}(E, E_0)$ , заданное формулой\*)  $\alpha \mapsto p^*(\alpha) \smile U_\xi$ , является изоморфизмом для всех  $i$ .

**Доказательство.** В случае, когда расслоение тривиально, т. е.  $E = B \times \mathbb{R}^n$ ,  $E_0 = B \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  и  $p: E \rightarrow B$  — проекция на первый множитель, все требуемые утверждения фактически содержатся в теореме 14.15 на с. 235 (в обозначениях этой теоремы  $X = B$ ,  $A = \emptyset$  и  $e^n = U_\xi$ ). Поэтому нужно лишь проверить, что если требуемые утверждения верны над открытыми множествами  $U$ ,  $V$  и  $U \cap V$ , то они верны и над  $U \cup V$ .

Пусть  $E^1 = p^{-1}(U)$ ,  $E^2 = p^{-1}(V)$ ,  $E^3 = p^{-1}(U \cap V)$  и  $E^4 = p^{-1}(U \cup V)$ . Запишем последовательность Майера—Вьеториса:

$$H^{i-1}(E^3, E_0^3) \longrightarrow H^i(E^4, E_0^4) \longrightarrow H^i(E^1, E_0^1) \oplus H^i(E^2, E_0^2) \longrightarrow H^i(E^3, E_0^3).$$

При  $i < n$  слева и справа от  $H^i(E^4, E_0^4)$  стоят нули, поэтому  $H^i(E^4, E_0^4) = 0$ . Это доказывает утверждение б). Свойство единственности показывает, что классы  $U_1 \in H^n(E^1, E_0^1)$  и  $U_2 \in H^n(E^2, E_0^2)$  определяют один и тот же элемент группы  $H^n(E^3, E_0^3)$ . Поэтому существует класс  $U_4 \in H^n(E^4, E_0^4)$ , проектирующийся в  $U_1$  и в  $U_2$ . Равенство  $H^{n-1}(E^3, E_0^3) = 0$  показывает, что этот класс единствен. Это доказывает утверждение а).

Чтобы доказать утверждение в), нужно рассмотреть аналогичную последовательность Майера—Вьеториса для баз расслоений и отобразить её в написанную выше последовательность Майера—Вьеториса, сопоставив элементу  $\alpha$  элемент  $p^*(\alpha) \smile U$ . Применяя 5-лемму, получаем требуемое.  $\square$

\*) Относительное сир-произведение классов  $p^*(\alpha) \in H^i(E)$  и  $U_\xi \in H^n(E, E_0)$  лежит в  $H^{i+n}(E, E_0)$ .

Если расслоение  $\xi$  не обязательно ориентируемое, то для коэффициентов в  $\mathbb{Z}_2$  верна теорема, аналогичная теореме 16.2.

### Последовательность Гизина

Пусть  $p: E \rightarrow B$  — ориентированное векторное расслоение  $\xi$  размерности  $n$ . Рассмотрим точную когомологическую последовательность пары  $(E, E_0)$ :

$$\dots \longrightarrow H^{i+n}(E, E_0) \xrightarrow{j^*} H^{i+n}(E) \xrightarrow{i^*} H^{i+n}(E_0) \xrightarrow{\delta^*} H^{i+n+1}(E, E_0) \longrightarrow \dots$$

Отображение  $p$  является гомотопической эквивалентностью, поэтому  $p^*: H^{i+n}(B) \rightarrow H^{i+n}(E)$  — изоморфизм. Кроме того, имеет место изоморфизм Тома  $\varphi^*: H^i(B) \rightarrow H^{i+n}(E, E_0)$ . Воспользовавшись этими изоморфизмами, получим точную последовательность

$$\dots \longrightarrow H^i(B) \xrightarrow{p^{*-1}j^*\varphi} H^{i+n}(B) \xrightarrow{i^*p^*} H^{i+n}(E_0) \xrightarrow{\varphi^{-1}\delta^*} H^{i+1}(B) \longrightarrow \dots$$

Эту точную последовательность называют *последовательностью Гизина* [Gu].

В последовательности Гизина отображение  $i^*p^*$  индуцировано ограничением отображения  $p$  на  $E_0$ . Кроме того, отображение  $p^{*-1}j^*\varphi$  выражается через класс Эйлера  $e(\xi)$ . А именно,  $p^{*-1}j^*\varphi(\alpha) = \alpha \cup e(\xi)$ . Действительно,  $p^{*-1}j^*\varphi(\alpha) = p^{*-1}j^*(p^*(\alpha) \cup U_\xi) = p^{*-1}(p^*(\alpha) \cup j^*(U_\xi)) = \alpha \cup (p^{*-1}j^*(U_\xi))$ . Остаётся проверить, что  $p^{*-1}j^*(U_\xi) = e(\xi)$ , т. е.  $j^*(U_\xi) = p^*e(\xi)$ . Пусть  $\mathbb{R}^n$  — слой над некоторой точкой базы. Рассмотрим коцепь в  $E$ , принимающую значение 0 на симплексе  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  и значение  $\pm 1$  на симплексе  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ , внутри которого лежит точка 0 (знак зависит от того, согласованы ли ориентации симплекса и слоя). Когомологический класс такой цепи определён однозначно, причём он совпадает как с  $j^*(U_\xi)$ , так и с  $p^*e(\xi)$ ; это видно непосредственно из определений.

Для неориентируемых векторных расслоений имеет место точная последовательность Гизина для когомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ ; эйлеров класс  $e(\xi)$  при этом приводится по модулю 2, т. е. он заменяется на  $\omega_n(\xi)$ .

Точная последовательность Гизина имеет место и для ориентированного\*) локально тривиального расслоения  $p: E \rightarrow B$  со слоем  $S^{n-1}$ , поскольку такому расслоению можно сопоставить ориентированное  $n$ -мерное векторное расслоение.

**Задача 16.1.** Вычислите группы когомологий многообразия  $G_+(2n+2, 2)$ , используя расслоение  $V(2n+2, 2) \xrightarrow{S^1} G_+(2n+2, 2)$ .

\*) Это означает, что все слои  $S^{n-1}$  ориентированы согласованным образом.

## 16.2. Формулы Тома и Ву

В этом пункте мы будем рассматривать когомологии с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ . Пусть  $\xi$  — вещественное расслоение над компактным симплициальным комплексом  $B$ ,  $U_\xi$  — его класс Тома, а  $\varphi: H^i(B) \rightarrow H^{i+n}(E, E_0)$  — изоморфизм Тома, заданный формулой  $\varphi(\alpha) = p^*(\alpha) \cup U_\xi$ .

**Теорема 16.3** (Том [Th1]). *Класс Штифеля—Уитни  $w_i(\xi)$  равен  $\varphi^{-1}(\text{Sq}^i U_\xi)$ , где  $\text{Sq}^i$  — квадрат Стинрода.*

**Доказательство.** Проверим, что  $\varphi^{-1}(\text{Sq}^i U_\xi)$  обладает всеми свойствами  $i$ -го класса Штифеля—Уитни. Ясно, что  $\varphi^{-1}(\text{Sq}^0 U_\xi) = \varphi^{-1}(U_\xi) = 1$ . Кроме того, если  $i > n = \dim \xi$ , то  $\text{Sq}^i U_\xi = 0$ .

Проверим естественность. Пусть  $f: B' \rightarrow B$  — произвольное отображение,  $\xi$  — расслоение над  $B$ ,  $f^*(\xi)$  — индуцированное расслоение над  $B'$ ,  $g: E \rightarrow E'$  — послонное отображение расслоений, индуцированное отображением  $f$ . Тогда  $g^*(U_\xi) = U_{f^*(\xi)}$  и для изоморфизмов Тома имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^i(B) & \xrightarrow{\varphi} & H^{i+n}(E, E_0) \\ \downarrow f^* & & \downarrow g^* \\ H^i(B') & \xrightarrow{\varphi'} & H^{i+n}(E', E'_0). \end{array}$$

Поэтому  $\varphi' f^* = g^* \varphi$ , т. е.  $f^* \varphi^{-1} = (\varphi')^{-1} g^*$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} f^*(w_i(\xi)) &= f^* \varphi^{-1}(\text{Sq}^i U_\xi) = (\varphi')^{-1} g^*(\text{Sq}^i U_\xi) = (\varphi')^{-1} \text{Sq}^i(g^*(U_\xi)) = \\ &= (\varphi')^{-1} \text{Sq}^i U_{f^*(\xi)} = w_i(f^*(\xi)). \end{aligned}$$

Проверим формулу Уитни. На этот раз её удобнее доказывать в виде  $w(\xi \times \eta) = w(\xi) \times w(\eta)$ . Рассмотрим внешнее произведение классов Тома  $U_\xi \in H^m(E, E_0)$  и  $U_\eta \in H^n(E', E'_0)$ . Класс  $U_\xi \times U_\eta$  лежит в группе  $H^{n+m}(E \times E', (E \times E'_0) \cup (E_0 \times E'))$ . Множество  $(E \times E'_0) \cup (E_0 \times E')$  — это в точности множество ненулевых векторов в  $E \times E'$ . Поэтому класс  $U_\xi \times U_\eta$  лежит там же, где и класс Тома  $U_{\xi \times \eta}$ . Покажем, что эти два когомологических класса в действительности совпадают. Для этого достаточно проверить, что ограничение класса  $U_\xi \times U_\eta$  на  $(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}_0^{n+m})$ , где  $\mathbb{R}^{n+m}$  — слой расслоения  $\xi \times \eta$ , является ненулевым классом когомологий для слоя расслоения  $\xi \times \eta$  над каждой точкой. Но рассматриваемый класс равен внешнему произведению ограничений классов  $U_\xi$  и  $U_\eta$  на  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_0^m)$  и  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$ , а согласно теореме 14.15 на с. 235 это произведение ненулевое.

Для доказательства формулы Уитни нужно ещё проверить, что изоморфизмы Тома расслоений  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\xi \times \eta$  связаны соотношением  $\varphi_\xi(\alpha) \times \varphi_\eta(\beta) = \varphi_{\xi \times \eta}(\alpha \times \beta)$ , т. е.

$$(p_\xi^* \alpha \cup U_\xi) \times (p_\eta^* \beta \cup U_\eta) = (p_{\xi \times \eta}^* (\alpha \times \beta)) \cup U_{\xi \times \eta}.$$

В случае коэффициентов в  $\mathbb{Z}_2$  не нужно учитывать знаки, поэтому

$$(p_\xi^* \alpha \cup U_\xi) \times (p_{\eta'}^* \beta \cup U_\xi) = (p_\xi^* \alpha \times p_{\eta'}^* \beta) \cup (U_\xi \times U_\xi).$$

Равенство  $U_\xi \times U_\eta = U_{\xi \times \eta}$  мы уже доказали. Пусть  $p_B$  и  $p_{B'}$  — проекции  $B \times B'$  на первый и второй множители,  $p_E$  и  $p_{E'}$  — аналогичные отображения для  $E \times E'$ . Тогда  $p_{\xi \times \eta}^*(\alpha \times \beta) = p_{\xi \times \eta}^*(p_B^* \alpha \cup p_{B'}^* \beta) = (p_B p_{\xi \times \eta})^* \alpha \cup (p_{B'} p_{\xi \times \eta})^* \beta$  и  $p_\xi^* \alpha \times p_{\eta'}^* \beta = (p_E^* p_\xi^* \alpha) \cup (p_{E'}^* p_{\eta'}^* \beta) = (p_\xi p_E)^* \alpha \cup (p_{\eta'} p_{E'})^* \beta$ . Но  $p_B p_{\xi \times \eta} = p_\xi p_E$  (оба отображения — естественные проекции  $E \times E'$  на  $B$ ) и  $p_{B'} p_{\xi \times \eta} = p_{\eta'} p_{E'}$ .

В итоге получаем, что если  $\tilde{\omega}(\xi) = \varphi^{-1}(\text{Sq } U_\xi)$ , то  $\varphi_{\xi \times \eta}(\tilde{\omega}(\eta) \times \tilde{\omega}(\xi)) = \varphi_{\xi \times \eta}((\varphi_\xi^{-1} \text{Sq } U_\xi) \times (\varphi_{\eta'}^{-1} \text{Sq } U_{\eta'})) = \text{Sq } U_\xi \times \text{Sq } U_{\eta'} = \text{Sq}(U_\xi \times U_{\eta'}) = \text{Sq } U_{\xi \times \eta} = \varphi_{\xi \times \eta}(\tilde{\omega}(\eta \times \xi))$ , а значит,  $\tilde{\omega}(\eta) \times \tilde{\omega}(\xi) = \tilde{\omega}(\eta \times \xi)$ .

Остаётся провести вычисления для расслоения  $\gamma_1^1$  над  $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ . Для этого расслоения пара  $(E, E_0)$  представляет собой лист Мёбиуса  $M$  и лист Мёбиуса с вырезанной центральной окружностью. Деформационным ретрактом такой пары является пара  $(M, \partial_\varepsilon M)$ , где  $\partial_\varepsilon M$  — кривая, параллельная краю листа Мёбиуса и отстоящая от него на расстояние  $\varepsilon$ . Изоморфизм вырезания показывает, что  $H^*(M, \partial_\varepsilon M) \cong H^*(\mathbb{R}P^2, D^2)$ , а кохомологическая последовательность пары  $(\mathbb{R}P^2, D^2)$  показывает, что  $H^i(\mathbb{R}P^2, D^2) \cong H^i(\mathbb{R}P^2)$  при  $i \geq 1$ . Таким образом, класс Тома  $U$  расслоения  $\gamma_1^1$  отождествляется с единственным ненулевым элементом  $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^2)$ . Но  $\text{Sq}^1 \alpha = \alpha \cup \alpha \neq 0$ , поэтому  $\text{Sq}^1 U \neq 0$ , а значит,  $\varphi^{-1}(\text{Sq}^1 U) \neq 0$ .  $\square$

Формула Тома верна для всех векторных расслоений, но её применение сильно затруднено тем, что нужно вычислять класс Тома. Если же мы ограничимся касательными расслоениями многообразий, то для классов Штифеля—Уитни таких расслоений можно получить более явную формулу, в которой не участвует класс Тома.

Пусть  $\text{Sq}^T : H_*(X) \rightarrow H_*(X)$  — операция, сопряжённая  $\text{Sq} = \sum_{i \geq 0} \text{Sq}^i$ ,

т.е.  $\langle \alpha, \text{Sq}^T \beta \rangle = \langle \text{Sq } \alpha, \beta \rangle$ . Для любого замкнутого многообразия  $M^n$  можно определить класс кохомологий  $v = D^{-1} \text{Sq}^T [M^n] \in H^*(M^n)$ , где  $[M^n]$  — фундаментальный класс (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ ), а  $D : H^k(M^n) \rightarrow H_{n-k}(M^n)$  — изоморфизм Пуанкаре. Класс  $v$  называют *классом Ву* многообразия  $M^n$ .

Теорема 16.4 (Ву [Wu]). *Класс Ву замкнутого многообразия  $M^n$  обладает следующими свойствами:*

- 1)  $\langle \alpha \cup v, [M^n] \rangle = \langle \text{Sq } \alpha, [M^n] \rangle$  для любого элемента  $\alpha \in H^*(M^n)$ ;
- 2)  $\omega(M^n) = \text{Sq } v$ .

*Доказательство.* По определению  $Dv = \text{Sq}^T [M^n]$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \langle \text{Sq } \alpha, [M^n] \rangle &= \langle \alpha, \text{Sq}^T [M^n] \rangle = \langle \alpha, Dv \rangle = \\ &= \langle \alpha, v \cap [M^n] \rangle = \langle \alpha \cup v, [M^n] \rangle. \end{aligned}$$



Чтобы проверить равенство  $\omega(M^n) = \text{Sq } v$ , достаточно проверить, что  $\langle \omega(M^n), \beta \rangle = \langle \text{Sq } v, \beta \rangle$  для любого элемента  $\beta \in H_*(M^n)$ . Согласно формуле Тома  $\text{Sq } U = \varphi(\omega(M^n))$ . Вместо класса Тома касательного расслоения можно взять класс Тома касательного микрорасслоения, лежащий в  $H^n(M^n \times M^n, M^n \times M^n \setminus d(M^n))$ . При этом изоморфизм Тома имеет вид  $\varphi(\alpha) = p_1^* \alpha \cup U$ , где  $p_1: M^n \times M^n \rightarrow M^n$  — проекция на первый множитель. В таком случае  $p_1^* \alpha = \alpha \times 1$ , где  $1 \in H^0(M^n)$  — единичный элемент. Значит,  $\text{Sq } U = p_1^*(\omega(M^n)) \cup U = (\omega(M^n) \times 1) \cup U$ .

Воспользуемся классом  $\tilde{U} \in H^n(M^n \times M^n)$ , введённым на с. 263, и доказанными там для него свойствами (1) и (2). Для этого класса, как и для класса  $U$ , выполняется соотношение  $\text{Sq } \tilde{U} = (\omega(M^n) \times 1) \cup \tilde{U}$ . Ясно, что

$$\begin{aligned} \langle \text{Sq } v, \beta \rangle &= \langle v, \text{Sq}^T \beta \rangle \stackrel{(2)}{=} \langle \tilde{U}, \text{Sq}^T \beta \times Dv \rangle = \\ &= \langle \tilde{U}, \text{Sq}^T \beta \times \text{Sq}^T [M^n] \rangle = \langle \tilde{U}, \text{Sq}^T (\beta \times [M^n]) \rangle = \\ &= \langle \text{Sq } \tilde{U}, \beta \times [M^n] \rangle = \langle (\omega(M^n) \times 1) \cup \tilde{U}, \beta \times [M^n] \rangle \stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} \langle (1 \times \omega(M^n)) \cup \tilde{U}, \beta \times [M^n] \rangle = \langle \tilde{U}, (1 \times \omega(M^n)) \frown (\beta \times [M^n]) \rangle = \\ &= \langle \tilde{U}, \beta \times (\omega(M^n) \frown [M^n]) \rangle = \langle \tilde{U}, \beta \times D\omega(M^n) \rangle \stackrel{(2)}{=} \langle \omega(M^n), \beta \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Непосредственно из определения класса Ву легко выводится, что если  $v = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ , где  $v_i \in H^i(M^n)$ , то  $v_i = 0$  при  $i > [n/2]$ . Действительно, пусть  $\text{Sq}^T [M^n] = m_0 + m_1 + \dots + m_n$ , где  $m_i \in H_i(M^n)$ . Если  $\alpha \in H^k(M^n)$ , то  $\langle \alpha, m_k \rangle = \langle \text{Sq } \alpha, [M^n] \rangle = \langle \text{Sq}^{n-k} \alpha, [M^n] \rangle$ . При этом  $\text{Sq}^{n-k} \alpha = 0$ , если  $n - k > k$ , т.е.  $2k < n$ . Следовательно,  $m_k = 0$  при  $2k < n$ . Это означает, что  $v_{n-k} = 0$  при  $2k < n$ , т.е.  $v_i = 0$  при  $2i > n$ .

**Задача 16.2.** Пусть  $v = v_0 + v_1 + \dots + v_{[n/2]}$  — класс Ву замкнутого многообразия  $M^n$ , а  $\omega = 1 + \omega_1 + \dots + \omega_n$  — класс Штифеля—Уитни.

а) Докажите, что если  $\omega_1 = \dots = \omega_k = 0$ , то  $v_1 = \dots = v_k = 0$  и  $v_{k+1} = \omega_{k+1}$ .

б) Докажите, что если  $\omega_1 = \dots = \omega_k = 0$  и  $n = 2k$  или  $2k + 1$ , то  $\omega_{k+1} = \omega_{k+2} = \dots = \omega_n = 0$ .

**Задача 16.3 [Mi3].** Пусть  $M^{4k}$  — замкнутое  $(2k - 1)$ -связное многообразие. Докажите, что на диагонали формы пересечения многообразия  $M^{4k}$  стоят чётные числа тогда и только тогда, когда  $\omega_{2k}(M^{4k}) = 0$ .

Воспользовавшись результатом задачи 16.2, можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 16.5 (Штифель [St6]).** Любое замкнутое ориентируемое трёхмерное многообразие параллелизуемо.

**Доказательство.** Чтобы доказать параллелизуемость многообразия  $M^3$ , нужно построить три линейно независимых сечения его кас-

тельного расслоения. Учитывая ориентируемость, достаточно построить два независимых сечения. При построении  $k$  независимых сечений  $n$ -мерного вещественного расслоения первое препятствие возникает при продолжении на  $(n - k + 1)$ -мерный остов. Если  $n - k$  нечётно и  $k \geq 2$ , то это препятствие — в точности класс  $\omega_{n-k+1}$ . В нашем случае это будет класс  $\omega_2$ . Если построены два независимых сечения на двумерном остове, то задача решена, потому что препятствие к продолжению их на трёхмерный остов лежит в когомологиях с коэффициентами в  $\pi_2(V(3, 2))$ , а  $V(3, 2) \approx \mathbb{R}P^3$  и  $\pi_2(\mathbb{R}P^3) = 0$ . Поэтому достаточно доказать, что  $\omega_2(M^3) = 0$ . Для ориентируемого многообразия  $\omega_1 = 0$ . Согласно задаче 16.2 б) из равенства  $\omega_1 = 0$  следует, что  $\omega_2 = 0$  и  $\omega_3 = 0$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Штифель доказал параллелизуемость замкнутого ориентируемого трёхмерного многообразия в предположении, что  $\omega_2(M^3) = 0$ ; у него не было убедительного доказательства того, что это равенство выполняется.

Штифель занимался общей задачей о построении  $n - 1$  линейно независимых векторных полей на ориентируемом  $n$ -мерном многообразии, т. е. задачей о параллелизуемости многообразия; именно для решения этой задачи он построил теорию характеристических классов [St6]. По совету Хопфа Штифель начал с простейшего нетривиального случая  $n = 3$ . Но все многочисленные примеры ориентируемых замкнутых трёхмерных многообразий, которые он рассмотрел, оказались параллелизуемыми.

О результатах Штифеля Хопф сделал доклад на первой международной топологической конференции в Москве (1935 г.). Присутствовавший на этом докладе Уитни сказал, что значительная часть этих результатов содержится в только что вышедшей его заметке [Wh2], о которой Штифель и Хопф тогда ещё не знали.

### 16.3. Препятствия к вложениям

Пусть замкнутое многообразие  $M^n$  погружено в  $\mathbb{R}^{n+k}$ ,  $\nu_{M^n}$  — нормальное расслоение для этого погружения. Согласно теореме Уитни (теорема 11.10 на с. 164)  $\omega_i(\nu_{M^n}) = \bar{\omega}_i(M^n)$ . Значит,  $\bar{\omega}_i(M^n) = 0$  при  $i > k$ , поскольку  $\dim \nu_{M^n} = k$ . В том случае, когда многообразие  $M^n$  вложено в  $\mathbb{R}^{n+k}$ , появляется дополнительное условие  $\bar{\omega}_k(M^n) = 0$ , доказательством которого мы сейчас займёмся.

Из теоремы о трубчатой окрестности следует, что если замкнутое многообразие  $M^n$  вложено в  $\mathbb{R}^{n+k}$ , то для достаточно малого  $\varepsilon > 0$  множество  $M_\varepsilon$ , состоящее из точек, удалённых от  $M^n$  не более чем на  $\varepsilon$ , гомеоморфно пространству расслоения  $E(\nu_{M^n}) = E$ . При этом возникает

гомеоморфизм пар  $(E, E_0) \approx (M_\varepsilon, M_\varepsilon \setminus M^n)$ . Используя изоморфизм вырезания, получаем  $H^*(E, E_0) \cong H^*(M_\varepsilon, M_\varepsilon \setminus M^n) \cong H^*(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} \setminus M^n)$ . Рассмотрим композицию двух гомоморфизмов ограничения

$$H^k(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} \setminus M^n) \longrightarrow H^k(\mathbb{R}^{n+k}) \longrightarrow H^k(M^n). \quad (1)$$

Эта композиция, очевидно, нулевая, поскольку  $H^k(\mathbb{R}^{n+k}) = 0$ . Поэтому достаточно доказать следующее утверждение.

*Л е м м а.* При композиции (1) класс, соответствующий классу Тома  $U \in H^k(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ , переходит в  $\omega_k(\nu_{M^n})$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Нулевое сечение  $s: M \rightarrow E$  индуцирует изоморфизм  $s^*: H^k(E) \rightarrow H^k(M^n)$ . Покажем, что композиция гомоморфизмов

$$H^k(E, E_0) \longrightarrow H^k(E) \xrightarrow{s^*} H^k(M^n)$$

переводит класс Тома  $U$  в  $\omega_k(\nu_{M^n})$ . Действительно, изоморфизм Тома  $\varphi: H^k(M^n) \rightarrow H^{2k}(E, E_0)$  переводит класс  $s^*(U|_E)$  в класс  $p^*s^*(U|_E) \cup U = (U|_E) \cup U = U \cup U = \text{Sq}^k U$ . Поэтому  $s^*(U|_E) = \varphi^{-1} \text{Sq}^k U = \omega_k(\nu_{M^n})$ .

Если заменить пару  $(E, E_0)$  на гомеоморфную ей пару  $(M_\varepsilon, M_\varepsilon \setminus M^n)$ , то получим, что композиция гомоморфизмов ограничения

$$H^k(M_\varepsilon, M_\varepsilon \setminus M^n) \longrightarrow H^k(M_\varepsilon) \longrightarrow H^k(M^n)$$

переводит класс, соответствующий классу Тома  $U$ , в  $\omega_k(\nu_{M^n})$ .

Композиция (1) включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^k(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} \setminus M^n) & \longrightarrow & H^k(\mathbb{R}^{n+k}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \\ H^k(M_\varepsilon, M_\varepsilon \setminus M^n) & \longrightarrow & H^k(M^n). \end{array}$$

Поэтому при композиции (1) класс в  $H^k(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} \setminus M^n)$ , соответствующий классу Тома  $U$ , тоже переходит в  $\omega_k(\nu_{M^n})$ .  $\square$

**З а д а ч а 16.4.** Докажите, что если  $n = 2^m$ , то  $\mathbb{R}P^n$  нельзя вложить в  $\mathbb{R}^{2^n-1}$ .

## Глава V

# Когомологии Чеха и де Рама

## § 17. Когомологии с коэффициентами в пучке

### 17.1. Пучки и предпучки

Предположим, что каждому открытому множеству  $U \subset X$  сопоставлена абелева группа  $\mathcal{F}(U)$ , причём  $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ , а каждому включению открытых множеств  $V \rightarrow U$  сопоставлен гомоморфизм  $r_V^U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ , называемый *гомоморфизмом ограничения*. Предположим, далее, что эти сопоставления удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $r_U^U = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$ ;
- 2)  $r_W^U = r_W^V r_V^U$ , если  $W \subset V \subset U$ .

В таком случае говорят, что  $\mathcal{F}$  — *предпучок* абелевых групп на  $X$ .

Пусть  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  — предпучки на одном и том же пространстве  $X$ . Предположим, что для любого открытого множества  $U \subset X$  задан гомоморфизм  $h_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ , причём диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow r_V^U & & \downarrow r_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{h_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

коммутативна для всех  $V \subset U$ . Тогда говорят, что задан *гомоморфизм предпучков*  $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ .

Аналогично можно определить предпучок колец или предпучок  $R$ -модулей, где  $R$  — фиксированное кольцо; гомоморфизмы таких предпучков тоже определяются аналогично.

*Пример 17.1.* Для каждой абелевой группы  $G$  можно рассмотреть предпучок, который любому непустому открытому множеству  $U \subset X$  сопоставляет группу  $G$ , а пустому множеству сопоставляет нулевую группу. Этот предпучок называют *постоянным*.

*Пример 17.2.* В качестве  $\mathcal{F}(U)$  возьмём множество непрерывных функций на  $U$ ; групповая операция — поточечное сложение функций.

Для краткости элемент  $r_V^U(f)$ , где  $f \in \mathcal{F}(U)$ , будем обозначать  $f|_V$ .

Пучок — это предпучок, удовлетворяющий определённым дополнительным условиям. Сформулируем эти условия. Пусть  $\mathcal{U} = \{U\}$  — некоторое семейство открытых подмножеств в  $X$ . Семейство элементов  $\{f_U \in \mathcal{F}(U)\}$ ,  $U \in \mathcal{U}$ , будем называть *согласованным*, если  $f_U|_{U \cap U'} = f_{U'}|_{U \cap U'}$  для любых  $U, U' \in \mathcal{U}$ . Каждое семейство открытых множеств  $\mathcal{U}$  задаёт открытое множество  $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ . Предпучок  $\mathcal{F}$  называют *пучком*, если для любого

семейства открытых множеств  $\mathcal{U}$  выполняются следующие условия:

1) если элемент  $f \in \mathcal{F}(V)$  таков, что  $f|_U = 0$  для всех  $U \in \mathcal{U}$ , то  $f = 0$ ;

2) для любого согласованного семейства элементов  $\{f_U\}$  существует элемент  $f \in \mathcal{F}(V)$ , для которого  $f|_U = f_U$  для всех  $U \in \mathcal{U}$ .

**Пример 17.3.** Пусть  $X$  — объединение двух непересекающихся открытых множеств  $U_1$  и  $U_2$ . Тогда (ненулевой) постоянный предпучок на  $X$  не является пучком.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ . Семейство элементов  $0 \in \mathcal{F}(U_1)$ ,  $f \in \mathcal{F}(U_2)$ ,  $f \neq 0$ , согласовано, но не существует элемента  $f' \in \mathcal{F}(X)$ , для которого  $f'|_{U_1} = 0$  и  $f'|_{U_2} = f \neq 0$ .  $\square$

**Пример 17.4.** Пусть  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}$  — предпучок ограниченных функций, т. е.  $\mathcal{F}(U)$  состоит из ограниченных функций на  $U$ . Этот предпучок не является пучком.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , где  $U_k = (-k, k)$ . Тогда семейство элементов  $\{f_k\}$ , где  $f_k(x) = x$ , согласованное, но не существует ограниченной функции  $f$  на  $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ , которая на каждом множестве  $U_k$

совпадала бы с  $f_k$ . Действительно, такой функцией могла бы быть только функция  $f(x) = x$ , а она не ограниченная.  $\square$

Любому предпучку можно сопоставить пучок, используя переход к прямому пределу. Напомним соответствующие определения.

Множество  $J$  называют *направленным*, если между некоторыми его элементами задано отношение  $\alpha > \beta$  так, что выполняются следующие условия:

1)  $\alpha > \alpha$  для любого  $\alpha \in J$ ;

2) если  $\alpha > \beta$  и  $\beta > \gamma$ , то  $\alpha > \gamma$ ;

3) для любых  $\alpha, \beta \in J$  найдётся  $\delta \in J$ , для которого  $\alpha > \delta$  и  $\beta > \delta$ .

**Пример 17.5.** Пусть  $J$  состоит из открытых множеств, содержащих фиксированную точку  $x \in X$ , а отношение  $V < U$  соответствует включению  $V \subset U$ . Тогда  $J$  — направленное множество.

Пусть  $J$  — направленное множество. Систему абелевых групп  $\{G_\alpha\}$ ,  $\alpha \in J$ , называют *направленной*, если для любой пары элементов  $\alpha > \beta$  задан гомоморфизм  $f_{\alpha\beta}: G_\alpha \rightarrow G_\beta$ , причём  $f_{\alpha\alpha} = \text{id}$  и  $f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\gamma}$ .

**Пример 17.6.** Пусть  $\mathcal{F}$  — предпучок на пространстве  $X$ ,  $J$  — направленное множество из примера 17.5,  $G_U = \mathcal{F}(U)$  и  $f_{UV} = r_V^U$ . Тогда  $\{G_U\}$ ,  $U \ni x$ , — направленная система абелевых групп.

Для направленной системы абелевых групп прямой предел  $\varinjlim_{\alpha \in J} G_\alpha$  определяется следующим образом. Рассмотрим несвязное объединение групп  $G_\alpha$  и профакторизуем его по следующему отношению эквивалентности:  $g_\alpha \sim g_\beta$ , если  $f_{\alpha\delta}(g_\alpha) = f_{\beta\delta}(g_\beta)$  для некоторого  $\delta$  (здесь  $g_\alpha \in G_\alpha$  и  $g_\beta \in G_\beta$ ). Групповая операция вводится следующим образом:  $\{g_\alpha\} + \{g_\beta\} = \{f_{\alpha\delta}(g_\alpha) + f_{\beta\delta}(g_\beta)\}$ , где  $\alpha > \delta$  и  $\beta > \delta$ .

Для направленной системы абелевых групп из примера 17.6 прямой предел состоит из ростков в точке  $x$ , которые определяются следующим образом. Будем считать, что элементы  $f \in \mathcal{F}(U)$  и  $g \in \mathcal{F}(V)$ , где  $U$  и  $V$  — открытые окрестности точки  $x$ , эквивалентны, если  $f|_W = g|_W$  для некоторого открытого множества  $W \subset U \cap V$ . Класс эквивалентности, в котором лежит элемент  $f \in \mathcal{F}(U)$ , называют *ростком* элемента  $f$  в точке  $x$  и обозначают  $f_x$ . Сложение ростков определяется естественным образом.

Положим  $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$  (т. е.  $\mathcal{F}_x$  — группа ростков в точке  $x$ ) и  $\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ . Снабдим  $\tilde{\mathcal{F}}$  топологией так, чтобы естественная проекция  $p: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow X$ , отображающая  $\mathcal{F}_x$  в  $x$ , была локальным гомеоморфизмом. Пусть  $U \subset X$  — открытое множество,  $f \in \mathcal{F}(U)$ . Рассмотрим множество всех ростков  $f_x$ ,  $x \in U$ . Такие множества будем считать базой топологии пространства  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Ясно, что если  $\tilde{\mathcal{F}}$  снабжено такой топологией, то  $p$  — локальный гомеоморфизм.

*Сечением* предпучка  $\tilde{\mathcal{F}}$  над открытым множеством  $U \subset X$  будем называть непрерывное отображение  $s: U \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ , для которого  $p \circ s = \text{id}_U$ . Множество сечений над  $U$  будем обозначать  $\Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$ ; это множество является группой со следующей операцией:  $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$  для каждой точки  $x \in U$ . Для семейства групп  $\Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$  с разными множествами  $U$  естественным образом определены гомоморфизмы ограничений, которые удовлетворяют аксиомам предпучка. Более того, если мы положим  $\overline{\mathcal{F}}(U) = \Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$ , то получим предпучок  $\overline{\mathcal{F}}$ , который является пучком. Его называют пучком, *порождённым*  $\mathcal{F}$  или *ассоциированным* с  $\mathcal{F}$ .

Каждому элементу  $f \in \mathcal{F}(U)$  можно сопоставить сечение  $s \in \Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$ , положив  $s(x) = f_x$ . Так мы получаем гомоморфизм предпучков  $\tau: \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}$ .

**Теорема 17.1.** Если  $\mathcal{F}$  — пучок, то  $\tau$  — изоморфизм пучков, т. е. для любого открытого множества  $U \subset X$  отображение  $\tau_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \overline{\mathcal{F}}(U)$  является изоморфизмом.

**Доказательство.** Проверим сначала, что  $\tau_U$  — мономорфизм. Пусть  $f, g \in \mathcal{F}(U)$  и  $f_x = g_x$  для всех  $x \in U$ . Из определения ростка

следует, что для каждой точки  $x \in U$  найдётся окрестность  $V \ni x$ , для которой  $f|_V = g|_V$ , т. е.  $(f - g)|_V = 0$ . Поэтому из первой аксиомы пучка следует, что  $f = g$ .

Проверим теперь, что  $\tau_U$  — эпиморфизм. Пусть  $s \in \Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$ . Тогда для каждой точки  $x \in U$  найдётся окрестность  $V \ni x$  и найдётся элемент  $f \in \mathcal{F}(V)$ , для которого  $f_x = s(x)$ . Это означает, что сечения  $s$  и  $\tau_V(f)$  совпадают в точке  $x$ . Два сечения, совпадающих в точке  $x$ , должны совпадать и в некоторой окрестности  $W \ni x$ . Поэтому  $s|_W = \tau_W(f|_W)$ . Каждой точке  $x \in U$  мы сопоставили открытое множество  $W_x \ni x$  (лежащее в  $U$ ) и элемент  $f^x \in \mathcal{F}(W_x)$  так, что  $f_y^x = s(y)$  для всех  $y \in W_x$ . Семейство элементов  $\{f^x \in \mathcal{F}(W_x)\}$  согласованное, т. е.  $f^x|_{W_x \cap W_z} = f^z|_{W_x \cap W_z}$ . Действительно, для всех  $y \in W_x \cap W_z$  выполняется равенство  $f_y^x = s(y) = f_y^z$ . Поэтому  $\tau_{W_x \cap W_z}(f^x|_{W_x \cap W_z} - f^z|_{W_x \cap W_z}) = 0$ ; остаётся заметить, что мономорфность  $\tau$  мы уже доказали. Воспользовавшись второй аксиомой пучка, получим элемент  $f \in \mathcal{F}(U)$ , для которого  $f_x = s(x)$  для всех  $x \in U$ .  $\square$

Прямые пределы часто бывает удобно вычислять не по всему направленному множеству  $J$ , а по некоторому его подмножеству  $J_0$ . Подмножество  $J_0 \subset J$  называют *кофинальным* в направленном множестве  $J$ , если для любого  $\alpha \in J$  в  $J_0$  есть элемент  $\delta$ , для которого  $\alpha > \delta$ .

**Теорема 17.2.** Пусть  $\{G_\alpha\}$ ,  $\alpha \in J$ , — направленная система абелевых групп,  $J_0 \subset J$  — кофинальное подмножество. Тогда  $J_0$  — направленное множество и  $\varinjlim_{\alpha \in J} G_\alpha \cong \varinjlim_{\alpha \in J_0} G_\alpha$ .

**Доказательство.** Для  $\alpha, \beta \in J_0$  можно выбрать  $\delta' \in J$  так, что  $\alpha > \delta'$  и  $\beta > \delta'$ . Затем для  $\delta'$  можно выбрать  $\delta \in J_0$  так, что  $\delta' > \delta$ . Поэтому  $J_0$  — направленное множество.

Тождественные отображения  $G_\alpha \rightarrow G_\alpha$  коммутируют с отображениями  $f_{\alpha\delta}$ , поэтому тождественные отображения  $G_\alpha \rightarrow G_\alpha$ ,  $\alpha \in J_0$ , задают гомоморфизм  $\varinjlim_{\alpha \in J} G_\alpha \rightarrow \varinjlim_{\alpha \in J_0} G_\alpha$ . Этот гомоморфизм — эпиморфизм, поскольку для любого элемента  $g_\alpha \in G_\alpha$ ,  $\alpha \in J$ , можно выбрать  $\delta \in J_0$  так, что  $\alpha > \delta$ . Тогда определено отображение  $f_{\alpha\delta}: G_\alpha \rightarrow G_\delta$  и  $g_\alpha \sim g_\delta = f_{\alpha\delta}(g_\alpha)$ . Проверим теперь, что этот гомоморфизм — мономорфизм. Пусть  $g_\alpha \sim 0_\beta$  для некоторого  $\beta \in J$ , т. е. можно выбрать  $\delta \in J$  так, что  $f_{\alpha\delta}(g_\alpha) = f_{\beta\delta}(0_\beta) = 0_\delta$ . Выберем  $\gamma \in J_0$  так, что  $\delta > \gamma$ . Тогда  $f_{\alpha\gamma}(g_\alpha) = f_{\delta\gamma} \circ f_{\alpha\delta}(g_\alpha) = f_{\delta\gamma}(0_\gamma) = 0_\gamma$ , т. е.  $g_\alpha \sim 0_\gamma$  для некоторого  $\gamma \in J_0$ .  $\square$

## 17.2. Когомологии Чеха

Пусть  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  — открытое покрытие пространства  $X$ ;  $\mathcal{F}$  — предпучок на  $X$ . Мы будем предполагать, что все множества  $U_\alpha$  попарно различ-

ны. Для краткости введём обозначение  $U_{\alpha_0 \dots \alpha_k} = U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$ . Коцепь  $c^k \in C^k(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  сопоставляет упорядоченному набору  $U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_k}$  элемент  $c^k(U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_k}) \in \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k})$ . Кограничный гомоморфизм определяется формулой

$$(\delta c^k)(U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_{k+1}}) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i c^k(U_{\alpha_0}, \dots, \widehat{U}_{\alpha_i}, \dots, U_{\alpha_{k+1}})|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}}}.$$

Простая стандартная проверка показывает, что  $\delta\delta = 0$ . Это позволяет определить группу когомологий  $\check{H}^k(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  — *когомологии Чеха* покрытия  $\mathcal{U}$  с коэффициентами в предпучке  $\mathcal{F}$ .

*Пример 17.7.* Если  $\mathcal{F}$  — постоянный предпучок, соответствующий абелевой группе  $G$ , то  $\check{H}^k(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \cong H^k(N(\mathcal{U}); G)$ , где  $N(\mathcal{U})$  — нерв покрытия  $\mathcal{U}$ .

Посредством перехода к прямому пределу можно определить когомологии Чеха, зависящие только от самого пространства  $X$ , а не от конкретного его покрытия  $\mathcal{U}$ . Для этого нужно построить направленное семейство групп когомологий. Делается это следующим образом. Пусть  $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ , т. е.  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$  — измельчение покрытия  $\mathcal{V} = \{V_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$ . Согласно определению измельчения существует отображение  $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , для которого  $U_\alpha \subset V_{\lambda(\alpha)}$  для всех  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Сопоставим коцепи  $c^k \in C^k(\mathcal{V}; \mathcal{F})$  коцепь  $\lambda^\# c^k \in C^k(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ , для которой

$$(\lambda^\# c^k)(U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_k}) = c^k(V_{\lambda(\alpha_0)}, \dots, V_{\lambda(\alpha_k)}).$$

Легко проверить, что отображение  $\lambda^\#$  коцепное, т. е.  $\lambda^\# \delta = \delta \lambda^\#$ . Коцепное отображение  $\lambda^\#$  индуцирует гомоморфизм когомологий  $\lambda^*: \check{H}^k(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^k(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ .

Гомоморфизм  $\lambda^*$  не зависит от выбора  $\lambda$ . Прежде чем доказывать это утверждение в общем виде, поясним, почему оно верно для постоянного пучка  $\mathcal{F}$ .

*Пример 17.8.* Для постоянного пучка  $\mathcal{F}$  гомоморфизм

$$\lambda^*: \check{H}^k(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^k(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

индуцирован симплициальным отображением  $\tilde{\lambda}: N(\mathcal{U}) \rightarrow N(\mathcal{V})$ , переводящим  $\alpha$  в  $\lambda(\alpha)$ . Если  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  — другое отображение, для которого  $U_\alpha \subset V_{\mu(\alpha)}$ , то отображения  $\tilde{\lambda}$  и  $\tilde{\mu}$  гомотопны.

*Доказательство.* Предположим, что точка  $x$  принадлежит симплексу  $[\alpha_0, \dots, \alpha_n]$ . Тогда точки  $\tilde{\lambda}(x)$  и  $\tilde{\mu}(x)$  принадлежат симплексу с вершинами  $\lambda(\alpha_0), \dots, \lambda(\alpha_n), \mu(\alpha_0), \dots, \mu(\alpha_n)$ ; такой симплекс существует, потому что

$$\bigcap (V_{\lambda(\alpha_i)} \cap V_{\mu(\alpha_i)}) \supset \bigcap U_{\alpha_i} \neq \emptyset.$$



Соединив точки  $\tilde{\lambda}(x)$  и  $\tilde{\mu}(x)$  отрезком, легко построить требуемую гомотопию.  $\square$

Перейдём теперь к общему утверждению.

**Теорема 17.3.** Пусть  $\lambda, \mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  — два отображения, для которых  $U_\alpha \subset V_{\lambda(\alpha)}$  и  $U_\alpha \subset V_{\mu(\alpha)}$ . Тогда существует коцепная гомотопия, связывающая отображения  $\lambda^\#$  и  $\mu^\#$ .

**Доказательство.** Пусть отображение  $D: C^k(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \rightarrow C^{k-1}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  задано формулой

$$(Dc^k)(U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_{k-1}}) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i c^k(V_{\lambda(\alpha_0)}, \dots, V_{\lambda(\alpha_i)}, V_{\mu(\alpha_i)}, \dots, V_{\mu(\alpha_{k-1})}).$$

Покажем, что  $\delta D + D\delta = \mu^\# - \lambda^\#$ . В выражении  $(\delta(Dc^k) + D(\delta c^k))(U_0, \dots, U_k)$  ограничения коцепей  $(-1)^i (-1)^j c^k(V_{\lambda(0)}, \dots, V_{\lambda(j)}, V_{\mu(j)}, \dots, \hat{U}_i, \dots, V_{\mu(k)})$  и  $(-1)^j (-1)^{i+1} c^k(V_{\lambda(0)}, \dots, V_{\lambda(j)}, V_{\mu(j)}, \dots, \hat{V}_{\mu(i)}, \dots, V_{\mu(k)})$  на множество  $V_{\lambda(0)\dots\lambda(j)\mu(i)\dots\mu(i)\dots\mu(k)}$  взаимно уничтожаются. Здесь предполагается, что  $i > j$ . Случай, когда  $i < j$ , рассматривается аналогично. Ни с чем не сокращаются только члены  $c^k(\hat{V}_{\lambda(0)}, V_{\mu(0)}, \dots, V_{\mu(k)})$  и  $(-1)^k (-1)^{k+1} c^k(V_{\lambda(0)}, \dots, V_{\lambda(k)}, \hat{V}_{\mu(k)})$ .  $\square$

Мы построили направленную систему абелевых групп, поэтому можно рассмотреть прямой предел  $\varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \check{H}^k(X; \mathcal{F})$  — когомологии Чеха пространства  $X$  с коэффициентами в предпучке  $\mathcal{F}$ . Когомологии Чеха пространства  $X$  с коэффициентами в постоянном предпучке, соответствующем абелевой группе  $G$ , мы будем обозначать  $\check{H}^k(X; G)$ .

**Теорема 17.4.** Если  $K$  — конечный симплициальный комплекс, то  $\check{H}^k(|K|; G) \cong H^k(K; G)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{U}_0$  — покрытие пространства  $|K|$  открытыми множествами  $\text{st } v_i$ , где  $v_i$  — вершина комплекса  $K$ . Тогда нерв  $N(\mathcal{U}_0)$  отождествляется с  $K$ , поэтому  $\check{H}^k(\mathcal{U}_0; G) \cong H^k(N(\mathcal{U}_0); G) \cong H^k(K; G)$ .

Пусть  $K'$  — барицентрическое подразделение комплекса  $K$ ,  $h_1: K' \rightarrow K$  — симплициальная аппроксимация тождественного отображения ( $h_1$  сопоставляет барицентру грани одну из вершин этой грани),  $\mathcal{U}_1$  — покрытие пространства  $|K|$  звёздами вершин симплициального комплекса  $K'$ . Если отождествить  $N(\mathcal{U}_1)$  с  $K'$ , то  $h_1$  можно рассматривать как отображение  $N(\mathcal{U}_1) \rightarrow N(\mathcal{U}_0)$ . Это отображение индуцирует изоморфизм когомологий.

Затем можно рассмотреть  $\mathcal{U}_m$  — покрытие  $|K|$  звёздами вершин  $m$ -го барицентрического подразделения комплекса  $K$ . Отображение  $N(\mathcal{U}_m) \rightarrow N(\mathcal{U}_{m-1})$ , индуцирующее изоморфизм когомологий, строится точно так же.

Мы построили направленное множество  $\mathcal{U}_0 > \mathcal{U}_1 > \dots$  и направленную систему абелевых групп  $\check{H}^k(\mathcal{U}_m; G)$ , в которой все гомоморфизмы  $\check{f}_{\alpha\beta}$  являются изоморфизмами. Поэтому  $\varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U}_m; G) \cong H^k(K; G)$ .

Чтобы воспользоваться теоремой 17.2, покажем, что покрытия  $\mathcal{U}_0 > \mathcal{U}_1 > \dots$  образуют кофинальное подмножество в множестве всех покрытий пространства  $|K|$ . Пусть  $\mathcal{U}$  — произвольное открытое покрытие пространства  $|K|$ ,  $\delta$  — его число Лебега (мы предполагаем, что симплициальный комплекс  $K$  вложен в евклидово пространство). Выберем  $m$  так, что диаметр любого симплекса  $m$ -го барицентрического подразделения комплекса  $K$  меньше  $\delta$ . Тогда  $\mathcal{U}_m < \mathcal{U}$ .  $\square$

**Теорема 17.5.** Пусть  $X$  — нормальное топологическое пространство,  $Y$  — его компактное подпространство. Тогда  $\check{H}^k(Y; G) \cong \cong \varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U}; G)$ , где  $\mathcal{U}$  — покрытие  $Y$  множествами, открытыми в  $X$  (а не в  $Y$ , как в определении когомологий Чеха).

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{U}$  — покрытие  $Y$  множествами, открытыми в  $X$ . Выберем из него конечное подпокрытие  $\{U_1, \dots, U_n\}$  и рассмотрим покрытие  $Y$  множествами  $U_i \cap Y$ , открытыми в  $Y$ . Любое подпространство нормального пространства хаусдорфово, а компактное хаусдорфово пространство нормально. Поэтому пространство  $Y$  нормально, а значит, в покрытие  $\{U_i \cap Y\}$  можно вписать открытое покрытие  $\{V_i\}$  так, что  $\bar{V}_i \subset U_i \cap Y$ . Здесь  $\bar{V}_i$  — замыкание  $V_i$  в  $Y$ , но оно же будет и замыканием  $V_i$  в  $X$ , поскольку  $Y$  замкнуто в  $X$ .

Построим набор открытых в  $X$  множеств  $W_1, \dots, W_n$  так, что  $\bar{V}_i \subset W_i$ ,  $\bar{W}_i \subset U_i$  и нервы покрытий  $\{\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_n\}$  и  $\{\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_n\}$  совпадают, т.е.  $\bar{V}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{V}_{i_p} = \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $\bar{W}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{W}_{i_p} = \emptyset$ . Пусть  $C_1$  — объединение всех множеств вида  $\bar{V}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{V}_{i_p}$ , не пересекающих  $\bar{V}_1$ . Множества  $\bar{V}_1$ ,  $C_1$  и  $X \setminus U_1$  замкнуты в  $X$ , причём множества  $\bar{V}_1$  и  $C_1 \cup (X \setminus U_1)$  не пересекаются. Поэтому в  $X$  можно выбрать открытое множество  $W_1$  так, что  $\bar{V}_1 \subset W_1$  и  $\bar{W}_1 \cap (C_1 \cup (X \setminus U_1)) = \emptyset$ ; это равенство означает, что  $\bar{W}_1 \cap C_1 = \emptyset$  и  $\bar{W}_1 \subset U_1$ . Покажем, что нервы покрытий  $\{\bar{W}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n\}$  и  $\{\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_n\}$  совпадают. Ясно, что если  $\bar{W}_1 \cap \bar{V}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{V}_{i_p} = \emptyset$ , то  $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{V}_{i_p} = \emptyset$ , поскольку  $\bar{V}_1 \subset W_1 \subset \bar{W}_1$ . Предположим теперь, что  $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{V}_{i_p} = \emptyset$ . Тогда  $\bar{V}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{V}_{i_p} \subset C_1$ . Но  $\bar{W}_1 \cap C_1 = \emptyset$ , поэтому  $\bar{W}_1 \cap \bar{V}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{V}_{i_p} = \emptyset$ . Повторив ту же самую конструкцию для  $\bar{W}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n$ , построим  $\bar{W}_2$  и т.д.

Покажем, что нервы покрытий пространства  $Y$  открытыми в  $X$  множествами  $\{W_1, \dots, W_n\}$  и открытыми в  $Y$  множествами  $\{W_1 \cap Y, \dots, W_n \cap Y\}$  совпадают. Ясно, что если  $W_{i_1} \cap \dots \cap W_{i_p} = \emptyset$ , то  $W_{i_1} \cap \dots \cap W_{i_p} \cap Y = \emptyset$ . Предположим теперь, что  $W_{i_1} \cap \dots \cap W_{i_p} \cap Y = \emptyset$ . Тогда  $\bar{V}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{V}_{i_p} = \emptyset$ , а это эквивалентно тому, что  $\bar{W}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{W}_{i_p} = \emptyset$ . Значит,  $W_{i_1} \cap \dots \cap W_{i_p} = \emptyset$ .

Итак, мы показали, что покрытия пространства  $Y$  открытыми в  $X$  множествами  $\{W_1, \dots, W_n\}$ , для которых нервы покрытий  $\{W_1, \dots, W_n\}$  и  $\{W_1 \cap Y, \dots, W_n \cap Y\}$  совпадают, кофинальны в множестве покрытий пространства  $Y$  множествами, открытыми в  $X$ . Значит, согласно теореме 17.2 мы имеем  $\varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U}; G) \cong \varinjlim \check{H}^k(\mathcal{W}; G)$ . По построению  $\check{H}^k(\mathcal{W}; G) \cong \check{H}^k(\mathcal{W} \cap Y; G)$ ; здесь  $\mathcal{W} \cap Y = \{W_1 \cap Y, \dots, W_n \cap Y\}$ . Кроме того, покрытия  $\mathcal{W} \cap Y$  кофинальны в множестве всех открытых покрытий пространства  $Y$ . Из этого следует требуемый изоморфизм.  $\square$

Для вычисления чеховских когомологий часто бывает полезно следующее утверждение.

**Т е о р е м а 17.6.** Пусть  $X$  — компактное триангулируемое\*) пространство,  $Y_n$  — подкомплекс некоторой триангуляции пространства  $X$ . Предположим, что  $|Y_1| \supset |Y_2| \supset \dots$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} |Y_n| = Y$ . Тогда  $\check{H}^k(Y; G) \cong \varinjlim \check{H}^k(Y_n; G)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $X_n$  — триангуляция пространства  $X$ , для которой какое-то\*\*) подразделение  $Y_n$  является полным подкомплексом, т. е. если на набор вершин комплекса  $Y_n$  натянут симплекс комплекса  $X_n$ , то на этот набор вершин натянут и симплекс комплекса  $Y_n$ . Эту триангуляцию мы выберем столь мелкой, что будут выполняться два условия: 1) диаметр любого симплекса  $X_n$  меньше  $1/n$  (чтобы придать этому смысл, нужно вложить  $X$  в евклидово пространство); 2) звезда каждой вершины  $X_n$  содержится в звезде некоторой вершины комплекса  $X_{n-1}$ . Мы будем предполагать, что триангуляция  $Y_n$  индуцирована триангуляцией  $X_n$ .

Рассмотрим для  $Y_n$  два покрытия  $\mathcal{U}_n$  и  $\mathcal{U}'_n$ ;  $\mathcal{U}_n$  — покрытие звёздами в  $Y_n$  всех вершин комплекса  $Y_n$ ,  $\mathcal{U}'_n$  — покрытие звёздами в  $X_n$  всех вершин комплекса  $Y_n$ . Первое покрытие открыто в  $Y_n$ , второе открыто в  $X_n$ .

Условие 2) позволяет построить симплициальную аппроксимацию  $h_n: Y_n \rightarrow Y_{n-1}$  включения  $|Y_n| \subset |Y_{n-1}|$ . Нерв покрытия  $\mathcal{U}_n$  можно отождествить с  $Y_n$ , поэтому получаем симплициальное отображение  $h_n: N(\mathcal{U}_n) \rightarrow N(\mathcal{U}_{n-1})$  и индуцированный им гомоморфизм (не обязательно изоморфизм)  $(h_n)_*: \check{H}^k(\mathcal{U}_{n-1}) \rightarrow \check{H}^k(\mathcal{U}_n)$ ; для краткости мы опустили группу коэффициентов  $G$ . Таким образом,  $\varinjlim \check{H}^k(Y_n) \cong \varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U}_n)$ .

Для покрытий  $\mathcal{U}'_n$  из условия 2) следует, что  $\bar{\mathcal{U}}'_n < \mathcal{U}'_{n-1}$ , поэтому возникает гомоморфизм  $(h'_n)_*: \check{H}^k(\mathcal{U}'_{n-1}) \rightarrow \check{H}^k(\mathcal{U}'_n)$ . Покажем, что нервы покрытий  $\mathcal{U}_n$  и  $\mathcal{U}'_n$  совпадают, а значит, после отождествления этих нервов гомоморфизмы  $(h_n)_*$  и  $(h'_n)_*$  совпадают.

\*) Это означает, что существует гомеоморфизм  $X \rightarrow |K|$ , где  $K$  — некоторый симплициальный комплекс.

\*\*) Задача 8.3 из части I показывает, что достаточно взять барицентрическое подразделение.

Ясно, что  $\text{st}(v, Y_n) \subset \text{st}(v, X_n)$ , поэтому если  $\bigcap \text{st}(v_i, Y_n) \neq \emptyset$ , то  $\bigcap \text{st}(v_i, X_n) \neq \emptyset$ . Предположим теперь, что  $\bigcap \text{st}(v_i, X_n) \neq \emptyset$ . Это означает, что на вершины  $\{v_i\}$  симплекса в  $X_n$  натянут симплекс. При этом  $\{v_i\}$  — вершины комплекса  $Y_n$ , а по построению симплициальный подкомплекс  $Y_n$  полный. Значит, на вершины  $\{v_i\}$  в  $Y_n$  натянут симплекс, т. е.  $\bigcap \text{st}(v_i, Y_n) \neq \emptyset$ .

Таким образом,  $\varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U}_n) \cong \varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U}'_n)$ .

Чтобы воспользоваться теоремой 17.2, покажем, что покрытия  $\mathcal{U}'_1 > \mathcal{U}'_2 > \dots$  образуют кофинальное подмножество в семействе покрытий пространства  $Y$  открытыми в  $X$  множествами. Пусть  $\mathcal{U}$  — покрытие пространства  $Y$  множествами, открытыми в  $X$ . Сначала покажем, что  $\mathcal{U}$  покрывает некоторое множество  $|Y_n|$ . Предположим, что в каждом множестве  $|Y_n|$  есть точка  $y_n$ , не покрытая  $\mathcal{U}$ . Из компактности пространства  $X$  следует, что последовательность  $\{y_n\}$  содержит сходящуюся подпоследовательность  $\{y_{n_k}\}$ . Предельная точка  $y$  лежит в  $\bigcap_{n=1}^{\infty} |Y_n| = Y$ . Она, как и любая

точка множества  $Y$ , покрыта неким открытым множеством  $U$  из покрытия  $\mathcal{U}$ . Но тогда  $y_{n_k} \in U$  для достаточно большого  $k$ , что противоречит предположению.

Точно так же, как доказывается теорема Лебега об открытых покрытиях, можно доказать, что существует положительное число  $\delta$ , обладающее следующим свойством: если диаметр множества  $B$ , пересекающего  $|Y_n|$ , меньше  $\delta$ , то  $B$  содержится в одном из открытых множеств покрытия  $\mathcal{U}$ . Пусть  $1/m < \delta/2$  и  $m \leq n$ . Покажем, что покрытие  $\mathcal{U}'_m$  вписано в покрытие  $\mathcal{U}$ . Диаметр любой звезды вершины комплекса  $Y_m$  меньше  $2/m < \delta$ . Кроме того, эта звезда пересекает  $|Y_n|$ , поскольку  $|Y_m| \subset |Y_n|$ . Значит, звезда содержится в одном из открытых множеств покрытия  $\mathcal{U}$ .  $\square$

С помощью когомологий Чеха можно сформулировать и доказать следующий более общий вариант двойственности Александера.

**Т е о р е м а 17.7** (двойственность Александера—Понтрягина). Пусть  $A \subsetneq S^n$  — замкнутое подмножество. Тогда  $\check{H}^k(A) \cong \check{H}_{n-k-1}(S^n \setminus A)$  при  $0 \leq k \leq n-1$ . (Здесь  $\check{H}^*$  — приведённые чеховские когомологии,  $\check{H}_*$  — приведённые сингулярные гомологии.)

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $K$  — столь мелкая триангуляция сферы  $S^n$ , что не все  $n$ -мерные симплексы  $K$  пересекают  $A$ ;  $K^{(m)}$  —  $m$ -е барицентрическое подразделение комплекса  $K$ . Рассмотрим  $M_m$  — подкомплекс в  $K^{(m)}$ , состоящий из тех симплексов, которые пересекают  $A$ . Симплициальный комплекс  $M_m$  не обязан быть многообразием; у него могут быть особые точки (или особые симплексы). Но все особые точки лежат вне  $A$ , поэтому из  $M_m$  можно вырезать малые окрестности особых

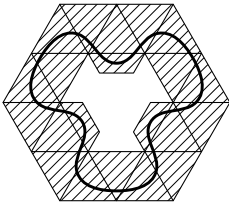


Рис. 42.  
Исправление  
комплекса  $M_m$

точек так, чтобы  $M_m$  стало многообразием, содержащим  $A$  (рис. 42).

Так можно построить последовательность триангулированных многообразий  $M_1 \supset M_2 \supset \dots$ , причём  $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = A$ . Для  $M_i$  верна теорема двой-

ственности Александра  $\tilde{H}^k(M_i) \cong \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus M_i)$ ; это доказывается точно так же, как в гладком (триангулируемом) случае. Эти изоморфизмы коммутируют с гомоморфизмами, индуцированными вложениями  $M_{i+1} \subset M_i$ , поэтому  $\varinjlim \tilde{H}^k(M_i) \cong$

$\cong \varinjlim \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus M_i)$ . Согласно теореме 17.6 прямой предел, стоящий слева, — это группа чеховских когомологий  $\check{H}^k(A)$ . Убедимся, что справа стоит группа сингулярных гомологий  $\tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus A)$ .

Гомоморфизмы  $\tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus M_i) \rightarrow \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus A)$ , индуцированные включениями, дают гомоморфизм  $\varinjlim \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus M_i) \rightarrow \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus A)$ . Нужно проверить, что этот гомоморфизм — изоморфизм. Носитель любой сингулярной цепи из  $C_{n-k-1}(S^n \setminus A)$  компактен. Вложенные друг в друга открытые множества  $S^n \setminus M_i$  покрывают его, поэтому он содержится в одном из них. Из этого следует эпиморфность. Мономорфность следует из компактности носителя  $(n-k)$ -мерной сингулярной цепи, границей которой служит разность двух данных  $(n-k-1)$ -мерных сингулярных цепей.  $\square$

### 17.3. Расслоения со структурной группой

Пусть  $G$  — топологическая группа,  $B$  — топологическое пространство. Предположим, что группа  $G$  эффективно действует на топологическом пространстве  $F$ . Локально тривиальное расслоение  $p: E \rightarrow B$  со слоем  $F$  называют *расслоением со структурной группой  $G$* , если гомеоморфизмы  $h_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$  обладают следующим свойством: для любой пары индексов  $i, j$  найдётся отображение  $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$ , для которого  $h_i h_j^{-1}(u, f) = (u, g_{ij}(u)f)$  для всех  $u \in U_i \cap U_j$ . Действие  $G$  на  $F$  эффективно, поэтому отображение  $g_{ij}$  однозначно задаётся гомеоморфизмами  $h_i$  и  $h_j$ . Это отображение называют *функцией перехода*. Функции перехода описывают, как производится склейка общей части «столбиков»  $U_i \times F$  и  $U_j \times F$  (рис. 43).

В этом определении расслоения со структурной группой есть существенный недостаток — зависимость от покрытия  $\{U_i\}$ . Чтобы избавиться от этого недостатка, рассмотрим все гомеоморфизмы  $h_U: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ ,

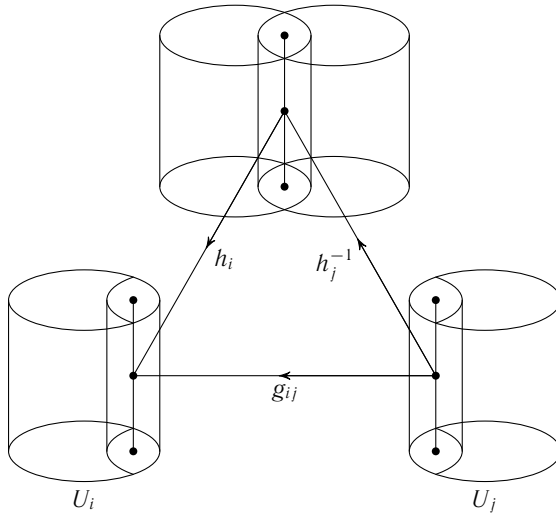


Рис. 43. Функции перехода

которые можно добавить к гомеоморфизмам  $h_i$ , а именно те гомеоморфизмы, которые обладают следующим свойством: для каждого  $U_i$  найдётся отображение  $g_{U,i}: U \cap U_i \rightarrow G$ , для которого  $h_U h_i^{-1}(u, f) = (u, g_{U,i}(u)f)$  для всех  $u \in U \cap U_i$ . Такие гомеоморфизмы будем называть *допустимыми картами*. Будем считать, что два покрытия  $\{U_i\}$  и  $\{U'_j\}$  с гомеоморфизмами  $\{h_i\}$  и  $\{h'_j\}$  задают одно и то же расслоение со структурной группой  $G$ , если у них совпадают множества допустимых карт.

Введём теперь понятие изоморфизма двух расслоений со структурной группой  $G$  над одной и той же базой  $B$ . Пусть  $p: E \rightarrow B$  и  $p': E' \rightarrow B$  — расслоения со структурной группой  $G$ . Гомеоморфизм  $\varphi: E \rightarrow E'$  называют *изоморфизмом* расслоений со структурной группой  $G$ , если для каждой точки  $b \in B$  выполняются следующие свойства:

1) слой  $p^{-1}(b)$  отображается на слой  $(p')^{-1}(b)$ ;

2) можно выбрать окрестность  $U \ni b$ , отображение  $g_U: U \rightarrow G$ , допустимую карту  $h_U: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  для расслоения  $E$  и допустимую карту  $h'_U: (p')^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  для расслоения  $E'$  так, что для всех  $u \in U$  имеет место равенство  $h'_U \varphi h_U^{-1}(u, f) = (u, g_U(u)f)$ .

Например,  $n$ -мерные векторные расслоения — это то же самое, что расслоения со слоем  $\mathbb{R}^n$  и структурной группой  $GL(n, \mathbb{R})$ . Изоморфизм векторных расслоений — это то же самое, что изоморфизм расслоений со структурной группой. Если в векторном расслоении можно ввести риманову метрику (например, если база компактна), то можно считать, что

структурная группа — это  $O(n)$ . При этом расслоение ориентируемо тогда и только тогда, когда в качестве структурной группы можно взять  $SO(n)$ .

**Пример 17.9.** Пусть многообразие  $\mathbb{C}P^n$  покрыто картами  $U_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , которые в однородных координатах  $(z_0 : \dots : z_n)$  задаются уравнениями  $z_i = 0$ . Тогда каноническое расслоение  $\gamma_n^1$  над  $\mathbb{C}P^n$  задаётся функциями перехода  $g_{ij} = z_i/z_j$ .

**Доказательство.** Слоем канонического расслоения над точкой  $(z_0 : \dots : z_n)$  является прямая  $(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n)$ . Гомеоморфизм  $h_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$  можно задать формулой  $h_i(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) = ((z_0 : \dots : z_n), \lambda_i)$ , где  $\lambda_i = \lambda z_i$ , т. е.  $(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) = \lambda_i \left( \frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right)$ . По определению  $\lambda_i = g_{ij} \lambda_j$ , т. е.  $g_{ij} = \lambda_i/\lambda_j = z_i/z_j$ .  $\square$

**Пример 17.10.** Пусть  $n$ -мерное векторное расслоение задаётся функциями перехода  $g_{ij}$  (в каждой точке  $g_{ij}$  представляет собой матрицу порядка  $n$ ). Тогда двойственное расслоение задаётся функциями перехода  $(g_{ij}^T)^{-1}$ .

**Доказательство.** Отображение  $g_{ij}: V_1 \rightarrow V_2$  индуцирует двойственное отображение  $V_2^* \rightarrow V_1^*$ , которое задаётся матрицей  $g_{ij}^T$ . Но нас интересует не это отображение, а обратное к нему отображение  $V_1^* \rightarrow V_2^*$ .  $\square$

Если  $\xi$  — одномерное расслоение с функциями перехода  $g_{ij}$ , то двойственное расслоение  $\xi^*$  задаётся функциями перехода  $1/g_{ij}$ . Ясно также, что если одномерное расслоение  $\eta$  задаётся функциями перехода  $h_{ij}$ , то расслоение  $\xi \otimes \eta$  задаётся функциями перехода  $g_{ij}h_{ij}$ . В частности, расслоение  $\xi \otimes \xi^*$  тривиально.

**Пример 17.11.** Рассмотрим отображение

$$p: \mathbb{C}P^{n+1} \setminus (0 : \dots : 0 : 1) \rightarrow \mathbb{C}P^n,$$

заданное формулой  $p(z_0 : \dots : z_{n+1}) = (z_0 : \dots : z_n)$ . Это отображение является векторным расслоением, двойственным каноническому расслоению  $\gamma_n^1$ .

**Доказательство.** Гомеоморфизм  $h_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$  можно задать формулой  $h_i(z_0 : \dots : z_{n+1}) = ((z_0 : \dots : z_n), \lambda_i)$ , где  $\lambda_i = z_{n+1}/z_i$ . Тогда  $g_{ij} = \lambda_i/\lambda_j = z_j/z_i$ .  $\square$

## 17.4. Некоммутативные когомологии Чеха

Точно так же, как определяется пучок абелевых групп, можно определить пучок неабелевых групп на пространстве  $X$ . В неабелевом случае группы когомологий  $\check{H}^k(X; \mathcal{F})$  при  $k > 1$  определить нельзя, но можно определить когомологическое множество  $\check{H}^1(X; \mathcal{F})$  с отмеченным элемен-

том. При этом если  $\mathcal{F}$  — пучок абелевых групп, то это множество совпадает с группой когомологий Чеха, причём отмеченный элемент совпадает с нулевым элементом группы когомологий.

Напомним, что если  $\mathcal{F}$  — пучок абелевых групп на топологическом пространстве  $X$  и  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  — открытое покрытие пространства  $X$ , то коцепь  $c^1 \in C^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  сопоставляет упорядоченному набору  $U_i, U_j$  элемент  $c^1(U_i, U_j) \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) = \Gamma(U_i \cap U_j; \mathcal{F})$ . При этом коцепь  $c^1$  является коциклом, если для любого упорядоченного набора  $U_i, U_j, U_k$  при ограничении на  $U_i \cap U_j \cap U_k$  имеет место равенство  $c^1(U_i, U_j) + c^1(U_j, U_k) = c^1(U_i, U_k)$ . Коцепь  $c^1$  является кограницей, если существует коцепь  $c^0 \in C^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ , для которой при ограничении на  $U_i \cap U_j$  имеет место равенство  $c^1(U_i, U_j) = c^0(U_j) - c^0(U_i)$ .

Для пучков неабелевых групп соответствующие определения такие. Коцикл (одномерный)  $f$  снова сопоставляет упорядоченному набору  $U_i, U_j$  элемент  $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) = \Gamma(U_i \cap U_j; \mathcal{F})$ , причём для ограничений на  $U_i \cap U_j \cap U_k$  имеет место равенство  $f_{ij}f_{jk} = f_{ik}$ . Два коцикла  $f$  и  $f'$  эквивалентны (отличаются на кограницу), если для каждого множества  $U_i$  существует элемент  $g_i \in \Gamma(U_i; \mathcal{F})$ , для которого при ограничении на  $U_i \cap U_j$  имеет место равенство  $f'_{ij} = g_i^{-1} f_{ij} g_j$ . Когомологическое множество  $\check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  — это множество классов эквивалентных коциклов. Отмеченный элемент этого множества — класс коцикла 1, который каждому упорядоченному набору  $U_i, U_j$  сопоставляет единичный элемент группы  $\Gamma(U_i \cap U_j; \mathcal{F})$ .

Когомологическое множество  $\check{H}^1(X; \mathcal{F})$ , как и в коммутативном случае, строится как прямой предел. Пусть покрытие  $\mathcal{U}$  — измельчение покрытия  $\mathcal{V}$  и  $U_i \subset V_{\lambda(i)}$ . Тогда коциклу  $f \in Z^1(\mathcal{V}; \mathcal{F})$  можно сопоставить коцикл  $\lambda^\# f \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ , для которого  $(\lambda^\# f)(U_i \cap U_j) = f(V_{\lambda(i)} \cap V_{\lambda(j)})$ . Отображение  $\lambda^\#$  индуцирует отображение  $\lambda^*: \check{H}^1(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ . Проверим, что если  $U_i \subset V_{\mu(i)}$ , то  $\mu^* = \lambda^*$ . Эквивалентность коциклов  $\lambda^\# f$  и  $\mu^\# f$  устанавливает нульмерная коцепь  $g_i = f_{\lambda(i), \mu(i)}$ . Действительно, из уравнения коцикла следует, что  $f_{\mu(i), \lambda(i)} f_{\lambda(i), \lambda(j)} f_{\lambda(j), \mu(j)} = f_{\mu(i), \mu(j)}$ , т. е.  $g_i^{-1} (\lambda^\# f)_{ij} g_j = (\mu^\# f)_{ij}$ .

Рассмотрим пучок  $\mathcal{G}$  на  $B$ , для которого  $\Gamma(U, \mathcal{G})$  — группа всех непрерывных отображений из  $U$  в  $G$ , т. е.  $\mathcal{G}$  — пучок ростков непрерывных функций со значениями в  $G$ . Если задано открытое покрытие  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  пространства  $B$  и задан коцикл  $g = \{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ , то можно построить расслоение  $E_g$  над  $B$  со структурной группой  $G$  и слоем  $F$ . Для этого нужно взять дизъюнктное объединение множеств  $U_i \times F$  и для каждой точки  $u \in U_i \cap U_j$  отождествить точку  $(u, f) \in U_i \times F$  с точкой  $(u, g_{ij}(u)f) \in U_j \times F$ . Корректность такого отождествления обеспечивается уравнением коцикла. Для полученного пространства  $E_g$  проекция  $p_g: E_g \rightarrow B$  индуцирована естественной проекцией  $U_i \times F \rightarrow U_i$ .



Если заданы два коцикла  $g \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$  и  $g' \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ , то расслоения  $p_g: E_g \rightarrow B$  и  $p_{g'}: E_{g'} \rightarrow B$  изоморфны (как расслоения со структурной группой  $G$ ) тогда и только тогда, когда коциклом  $g$  и  $g'$  соответствует один и тот же элемент когомологического множества  $\check{H}^1(B; \mathcal{G})$ .

Ясно также, что любое расслоение над  $B$  со структурной группой  $G$  и слоем  $F$  можно получить как расслоение  $E_g$  для некоторого коцикла  $g$ . Поэтому имеет место следующее утверждение.

**Теорема 17.8.** Пусть задано эффективное непрерывное действие топологической группы  $G$  на пространстве  $F$ . Тогда классы изоморфных расслоений над  $B$  со структурной группой  $G$  и слоем  $F$  находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами когомологического множества  $\check{H}^1(B; \mathcal{G})$ . При этом тривиальному расслоению  $B \times F$  соответствует отмеченный элемент.

## § 18. Когомологии де Рама

Напомним, что дифференциальная  $k$ -форма  $\omega$  на многообразии  $M^n$  — это полилинейная кососимметрическая функция от  $k$  векторных полей  $\xi_1, \dots, \xi_k$  на  $M^n$ . Линейное пространство  $k$ -форм на многообразии  $M^n$  мы будем обозначать \*)  $\Omega^k(M^n)$ . Для двух дифференциальных форм  $\omega_1 \in \Omega^p(M^n)$  и  $\omega_2 \in \Omega^q(M^n)$  определено их внешнее произведение  $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{p+q}(M^n)$ ; при этом  $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq} \omega_2 \wedge \omega_1$ . Внешнее умножение превращает линейное пространство  $\Omega^*(M^n) = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(M^n)$  в алгебру.

Гладкое отображение  $f: M^m \rightarrow N^n$  индуцирует линейное отображение  $f^*: \Omega^k(N^n) \rightarrow \Omega^k(M^m)$ , а именно  $(f^*\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(f_*\xi_1, \dots, f_*\xi_k)$ , где  $f_* = df$  — дифференциал отображения  $f$ . В локальных координатах это отображение выглядит следующим образом. Пусть  $x_1, \dots, x_n$  и  $y_1, \dots, y_m$  — локальные координаты на  $N^n$  и  $M^m$ . Тогда

$$f^* \left( \sum a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) = \sum a_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial y_{j_1}} \dots \frac{\partial f_{i_k}}{\partial y_{j_k}} dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}.$$

Отображение  $f^*: \Omega^*(N^n) \rightarrow \Omega^*(M^m)$  является гомоморфизмом алгебр.

Построим полилинейное отображение  $d: \Omega^k(M^n) \rightarrow \Omega^{k+1}(M^n)$ , обладающее следующими свойствами: 1)  $d \circ d = 0$ ; 2)  $d$  полилинейно относительно гладких функций, т. е.  $d\omega(\varphi\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_p) = \varphi d\omega(\xi_0, \dots, \xi_p)$  для любой функции  $\varphi \in C^\infty(M^n)$ . Для этого нам понадобится понятие коммутатора векторных полей.

\*) В части I использовалось обозначение  $\Lambda^k M^n$ .

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — векторные поля на  $M^n$ , рассматриваемые как дифференциальные операторы,  $\varphi \in C^\infty(M^n)$ . Положим  $[\xi, \eta](\varphi) = \xi(\eta(\varphi)) - \eta(\xi(\varphi))$ . Если воспользоваться тем, что  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}$ , то в локальных координатах получим выражение

$$[\xi, \eta](\varphi) = \sum_{i,j} \left( \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Таким образом, в фиксированной локальной системе координат  $[\xi, \eta]$  представляет собой векторное поле. Оператор  $[\xi, \eta]$  на гладких функциях не зависит от выбора локальной системы координат, поэтому мы получаем векторное поле  $[\xi, \eta]$ , которое называют *коммутатором* векторных полей  $\xi$  и  $\eta$ .

Непосредственно из определения видно, что  $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$ . Легко проверить, что если  $\varphi \in C^\infty(M^n)$ , то  $[\varphi \xi, \eta] = \varphi [\xi, \eta] - \eta(\varphi) \xi$ ; для доказательства нужно заметить, что

$$\frac{\partial(\varphi \xi_i)}{\partial x_j} = \varphi \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

Теперь мы уже можем определить отображение  $d$ . Пусть  $\omega \in \Omega^k(M^n)$ . Положим

$$\begin{aligned} d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i(\omega(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k)) + \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_k). \end{aligned}$$

Для  $\varphi \in C^\infty(M^n) = \Omega^0(M^n)$  положим  $d\varphi(\xi) = \xi(\varphi)$ . Кососимметричность и полилинейность  $d\omega$  видны непосредственно из определения. Равенство  $d\omega(\varphi \xi_0, \dots, \xi_k) = \varphi d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k)$  следует из того, что

$$\begin{aligned} \xi_i(\omega(\varphi \xi_0, \dots, \xi_k)) &+ \omega([\varphi \xi_0, \xi_i], \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k) = \\ &= \varphi \xi_i(\omega(\varphi \xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k)) + \xi_i(\varphi) \omega(\varphi \xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k) + \\ &+ \varphi \omega([\xi_0, \xi_i], \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k) - \xi_i(\varphi) \omega(\varphi \xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k) = \\ &= \varphi (\xi_i(\omega(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k)) + \omega([\xi_0, \xi_i], \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k)). \end{aligned}$$

Введём локальные координаты  $x_1, \dots, x_n$  и вычислим дифференциал формы  $\omega = \varphi(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ , где  $i_1 < \dots < i_k$ . Положим  $\xi_0 = \frac{\partial}{\partial x_{j_0}}, \dots, \xi_k = \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}$ , где  $j_0 < \dots < j_k$ . Векторные поля  $\xi_i$  попарно коммутируют:

$[\xi_i, \xi_j] = 0$ . Поэтому

$$d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) = \sum_{p=0}^k (-1)^p \frac{\partial}{\partial x_{j_p}} (\omega(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_p, \dots, \xi_k)).$$

Здесь  $\omega(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_p, \dots, \xi_k) = \varphi(x)$ , если  $i_1 = j_0, \dots, i_p = j_{p-1}, i_{p+1} = j_p, \dots, i_k = j_k$ , а во всех остальных случаях получаем 0. При этом  $j_{p-1} < j_p < j_{p+1}$ . Значит,

$$\begin{aligned} (-1)^p \frac{\partial}{\partial x_{j_p}} (\omega(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_p, \dots, \xi_k)) &= \\ &= (-1)^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j_p}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(\xi_0, \dots, \xi_p, \dots, \xi_k) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j_p}} dx_{j_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_{j_p} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(\xi_0, \dots, \xi_k). \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$d(\varphi(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{s=0}^n \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_s} dx_s \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Пользуясь этим выражением, легко проверить, что  $d \circ d = 0$ ; кроме того, если  $\omega_1$  —  $k$ -форма, то  $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$ .

Дифференциальную форму  $\omega$  называют *замкнутой*, если  $d\omega = 0$ . Дифференциальную форму  $\omega$  называют *точной*, если  $\omega = d\omega'$  для некоторой формы  $\omega'$ . Факторпространство замкнутых  $k$ -форм на многообразии  $M^n$  по точным  $k$ -формам называют *когомологиями де Рама* и обозначают  $H_{DR}^k(M^n)$ .

**Пример 18.1.**  $H_{DR}^0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$  и  $H_{DR}^1(\mathbb{R}) = 0$ .

**Доказательство.** Для  $\mathbb{R}$  есть только один нетривиальный дифференциал  $d: \Omega^0(\mathbb{R}) \rightarrow \Omega^1(\mathbb{R})$ ; при этом  $\varphi \mapsto \frac{d\varphi}{dx} dx$ . Ясно, что  $\text{Ker } d$  состоит из постоянных функций. Поэтому  $H_{DR}^0(\mathbb{R}) = \text{Ker } d \cong \mathbb{R}$ . Легко проверить, что  $\text{Im } d = \Omega^1(\mathbb{R})$ . Действительно, любая 1-форма на  $\mathbb{R}$  имеет вид  $\xi dx$ , где  $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Положим  $\varphi(x) = \int_0^x \xi(t) dt$  при  $x \geq 0$  и  $\varphi(x) = \int_x^0 \xi(t) dt$  при  $x \leq 0$ . Тогда  $d\varphi = \xi dx$ . Таким образом,  $H_{DR}^1(\mathbb{R}) = \Omega^1(\mathbb{R})/\text{Im } d = \Omega^1(\mathbb{R})/\Omega^1(\mathbb{R}) = 0$ .  $\square$

**Пример 18.2.** Если  $M^n$  — связное многообразие, то  $H_{DR}^0(M^n) \cong \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Ядро гомоморфизма  $d: \Omega^0(M^n) \rightarrow \Omega^1(M^n)$  состоит из функций, которые в каждой координатной окрестности удовлетворяют условию  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0$ . Такие функции постоянны на каждой компоненте связности многообразия.  $\square$

Легко проверить, что отображение  $f^*: \Omega^k(N^m) \rightarrow \Omega^k(M^n)$ , индуцированное гладким отображением  $f: M^n \rightarrow N^m$ , цепное, т. е.  $df^*\omega = f^*d\omega$ . Действительно, на векторных полях  $\xi_0, \dots, \xi_k$  обе формы принимают одно и то же значение

$$\sum (-1)^i \xi_i \omega(f_*\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, f_*\xi_k) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega(f_*[\xi_i, \xi_j], \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, f_*\xi_k),$$

поскольку  $f_*[\xi_i, \xi_j] = [f_*\xi_i, f_*\xi_j]$ .

**Теорема 18.1.** Пусть  $M^n = U_1 \cup U_2$ , где  $U_1$  и  $U_2$  — открытые множества. Тогда имеет место точная последовательность Майера—Вьеториса

$$\rightarrow H_{\text{DR}}^k(M^n) \rightarrow H_{\text{DR}}^k(U_1) \oplus H_{\text{DR}}^k(U_2) \rightarrow H_{\text{DR}}^k(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_{\text{DR}}^{k+1}(M^n) \rightarrow$$

**Доказательство.** Достаточно построить точную последовательность групп коцепей

$$0 \rightarrow \Omega^k(M^n) \xrightarrow{i^*} \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \xrightarrow{j^*} \Omega^k(U_1 \cap U_2) \rightarrow 0.$$

Пусть  $\omega \in \Omega^k(M^n)$ . Положим  $i^*(\omega) = (i_1^*\omega, i_2^*\omega)$ , где  $i_1^*\omega$  и  $i_2^*\omega$  — ограничения формы  $\omega$  на  $U_1$  и  $U_2$ . Пусть  $\omega_1 \in \Omega^k(U_1)$  и  $\omega_2 \in \Omega^k(U_2)$ . Положим  $j^*(\omega_1, \omega_2) = j_1^*\omega_1 - j_2^*\omega_2$ , где  $j_i^*\omega_i$  — ограничение формы  $\omega_i$  на  $U_i$ .

Мономорфность гомоморфизма  $i^*$  очевидна, поскольку форма на  $M^n$  однозначно задаётся своими ограничениями на  $U_1$  и  $U_2$ .

Покажем, что  $j^*$  — эпиморфизм. Пусть  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$  — гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию  $\{U_1, U_2\}$ . Тогда форму  $\omega \in \Omega^k(U_1 \cap U_2)$  можно представить в виде  $i_1^*\lambda_2\omega + i_2^*\lambda_1\omega$ ; здесь  $\lambda_2\omega$  — корректно определённая форма на  $U_1$ , поскольку  $\lambda_2 = 0$  на множестве  $U_1 \setminus (U_1 \cap U_2)$ .

Наконец, проверим, что  $\text{Ker } j^* = \text{Im } i^*$ . Из равенства  $j^*i^* = 0$  следует, что  $\text{Ker } j^* \supset \text{Im } i^*$ . Пусть  $(\omega_1, \omega_2) \in \text{Ker } j^*$ , т. е.  $j_1^*\omega_1 = j_2^*\omega_2$ . Это означает, что  $\omega_1(x) = \omega_2(x)$  для всех  $x \in U_1 \cap U_2$ . Поэтому можно определить форму  $\omega$  на  $M^n$ , полагая её равной  $\omega_1$  на  $U_1$  и  $\omega_2$  на  $U_2$ . Ясно, что  $i^*\omega = (\omega_1, \omega_2)$ .  $\square$

Для некомпактного многообразия  $M^n$  наряду с алгеброй дифференциальных форм  $\Omega^*(M^n)$  часто бывает полезно рассматривать алгебру  $\Omega_c^*(M^n)$  дифференциальных форм с компактными носителями (т. е. форм, тождественно равных нулю вне некоторого компактного множества). Дифференциал  $d$  для них определяется точно так же; свойство  $d \circ d = 0$  для него тоже выполняется, поэтому по формам с компактными носителями можно построить когомологии, которые мы будем обозначать  $H_c^*(M^n)$ .

Если многообразие  $M^n$  компактно, то когомологии  $H_{\text{DR}}^*$  и  $H_c^*$  для него совпадают. Но если  $M^n$  некомпактно, то эти когомологии различны.

**Пример 18.3.** Если  $M^n$  — связное некомпактное многообразие, то  $H_c^0(M^n) = 0$ .

**Доказательство.** Ядро гомоморфизма  $d: \Omega_c^0(M^n) \rightarrow \Omega_c^1(M^n)$  состоит из постоянных функций с компактными носителями. Но поскольку  $M^n$  некомпактно (и связно), такая функция только одна — тождественно равная нулю.  $\square$

**Пример 18.4.** Имеет место изоморфизм  $H_c^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Форма  $\psi(x) dx$  (с компактным носителем) лежит в образе гомоморфизма  $d: \Omega_c^0(\mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^1(\mathbb{R})$  тогда и только тогда, когда носитель функции  $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$  компактен, т. е.  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ .

Рассмотрим отображение  $\Omega_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , заданное формулой  $\psi(x) dx \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt$ . Ясно, что это отображение — эпиморфизм. Его ядро совпадает с  $\text{Im } d$ . Поэтому  $\Omega_c^1(\mathbb{R}) / \text{Im } d \cong \mathbb{R}$ .  $\square$

Когомологии с компактными носителями имеют весьма существенное отличие от обычных когомологий де Рама, которое проявляется даже в случае компактных многообразий. А именно, для когомологий с компактными носителями имеет место точная последовательность Майера—Вьеториса, но отображения в ней направлены в обратную сторону, т. е. так, как для гомологий, а не для когомологий. Причина этого заключается в том, что для форм с компактными носителями нельзя использовать операцию ограничения формы на открытое множество. Действительно, если компактный носитель формы содержит данное открытое множество, то в результате получится форма с некомпактным носителем. Но в случае форм с компактными носителями для открытого множества  $U$  можно использовать операцию распространения формы на множество, содержащее  $U$ , полагая форму равной нулю вне  $U$ . Действительно, любая точка вне  $U$  имеет окрестность, не пересекающуюся с компактным множеством  $K \subset U$ .

**Теорема 18.2.** Пусть  $M^n = U_1 \cup U_2$ , где  $U_1$  и  $U_2$  — открытые множества. Тогда имеет место точная последовательность Майера—Вьеториса

$$\dots \rightarrow H_c^k(M^n) \rightarrow H_c^k(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_c^k(U_1) \oplus H_c^k(U_2) \rightarrow H_c^{k+1}(M^n) \rightarrow \dots$$

**Доказательство.** Построим точную последовательность

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{j_c^*} \Omega_c^k(U_1) \oplus \Omega_c^k(U_2) \xrightarrow{i_c^*} \Omega_c^k(M^n) \rightarrow 0$$

следующим образом. Пусть  $\omega \in \Omega_c^k(U_1 \cap U_2)$ . Положим  $j^*\omega = (j_1^*\omega, -j_2^*\omega)$ , где  $j_p^*\omega$  — распространение формы  $\omega$  на  $U_p$ . Для форм  $\omega_1 \in \Omega_c^k(U_1)$

и  $\omega_2 \in \Omega_c^k(U_2)$  положим  $i^*(\omega_1, \omega_2) = i_1^*\omega_1 + i_2^*\omega_2$ , где  $i_p^*\omega_p$  — распространённые формы  $\omega_p$  с множества  $U_p$  на всё многообразие.

Мономорфность и точность в среднем члене очевидны. Проверим эпиморфность. Пусть  $\omega \in \Omega_c^k(M^n)$  и  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$  — гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию  $\{U_1, U_2\}$ . Носитель формы  $\lambda_p\omega$  представляет собой пересечение компактного множества  $\text{supp } \omega$  и замкнутого множества  $\text{supp } \lambda_p$ , поэтому он компактен (замкнутое подмножество компактного пространства компактно). Значит,  $\lambda_p\omega \in \Omega_c(U_p)$ . Ясно, что  $i_c^*(\lambda_1\omega, \lambda_2\omega) = \omega$ .  $\square$

## 18.1. Теорема Стокса. Гомотопическая инвариантность

### Интегрирование форм

Выберем в  $\mathbb{R}^n$  координаты и запишем форму  $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$  в виде  $\omega = \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Для краткости это будем записывать так:  $\omega = \varphi(x) dx$ . Перейдя к другой системе координат  $y(x)$ , получим  $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Кратко это будем записывать так:  $dy = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) dx$ . В новых координатах  $\omega = \psi(y) dy$ . Выясним, как связаны функции  $\psi(y)$  и  $\varphi(x)$ . Ясно, что  $\varphi(x) dx = \omega = \psi(y) dy = \psi(y) \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) dx$ , поэтому  $\varphi(x) = \psi(y(x)) \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ .

Формула замены переменных в интеграле показывает, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y(x)) \left| \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) \right| dx = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx,$$

где знак  $\pm$  соответствует знаку определителя  $\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ . Это позволяет определить интеграл формы следующим образом. Предположим, что в  $\mathbb{R}^n$  фиксирована ориентация. Пусть  $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$  — форма с компактным носителем. Положим  $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx$ , где  $x$  — система координат, ориентация которой согласована с ориентацией  $\mathbb{R}^n$ .

Чтобы определить *интеграл* формы  $\omega \in \Omega_c^n(M^n)$ , где  $M^n$  — ориентированное многообразие, поступим следующим образом. Возьмём произвольный локально конечный атлас  $\{U_\alpha\}$  с картами  $f_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ , сохраняющими ориентацию. Пусть  $\{\lambda_\alpha\}$  — подчинённое ему гладкое разбиение единицы. Положим

$$\int_{M^n} \omega = \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_{\alpha}(f_{\alpha}^{-1})^* \omega = \sum_{\alpha} \int_{U_{\alpha}} \lambda_{\alpha} \omega.$$

Носитель формы  $\lambda_\alpha \omega$  — замкнутое подмножество компактного множества  $\text{supp } \lambda_\alpha$ , поэтому он компактен. Если  $\{V_\beta\}$  — другой ориентирующий атлас и  $\{\mu_\beta\}$  — подчинённое ему разбиение единицы, то из равенства  $\sum_\beta \mu_\beta = 1$  следует, что  $\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \lambda_\alpha \omega = \sum_{\alpha, \beta} \int_{U_\alpha} \lambda_\alpha \mu_\beta \omega$ . Носитель формы  $\lambda_\alpha \mu_\beta \omega$  лежит в  $U_\alpha \cap V_\beta$ , поэтому  $\int_{U_\alpha} \lambda_\alpha \mu_\beta \omega = \int_{V_\beta} \lambda_\alpha \mu_\beta \omega$ . Следовательно,  $\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \lambda_\alpha \omega = \sum_{\alpha, \beta} \int_{V_\beta} \lambda_\alpha \mu_\beta \omega = \sum_\beta \int_{V_\beta} \mu_\beta \omega$ , поскольку  $\sum_\alpha \lambda_\alpha = 1$ . Это означает, что определение интеграла формы  $\omega$  по многообразию  $M^n$  корректно.

### Теорема Стокса

*Теорема Стокса* заключается в том, что  $\int_{M^n} d\omega = \pm \int_{\partial M^n} \omega$  для любой формы  $\omega \in \Omega_c^n(M^n)$ . Во втором интеграле формально следовало бы вместо  $\omega$  написать  $i^* \omega$ , где  $i: \partial M^n \rightarrow M^n$  — естественное включение; другими словами,  $i^* \omega$  — ограничение формы  $\omega$  на  $\partial M^n$ . От знака  $\pm$  перед вторым интегралом можно избавиться посредством соглашения об ориентации  $\partial M^n$ , индуцированной ориентацией многообразия  $M^n$ .

Займёмся доказательством теоремы Стокса.

С л у ч а й 1.  $M^n = \mathbb{R}^n$ .

Пусть  $\omega = \varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ . Тогда  $d\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = (-1)^{n-1} \int \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Но  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, \infty) - \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, -\infty) = 0$ , поскольку носитель функции  $\varphi$  компактен.

С л у ч а й 2.  $M^n = \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ .

Пусть  $\omega = \sum_i \varphi_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ . Тогда  $d\omega = \sum_i (-1)^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} d\omega &= \sum_{1 \leq i < n} (-1)^{i-1} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_n + \\ &\quad + (-1)^{n-1} \left( \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Если  $i \neq n$ , то  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_i = 0$ , как и в случае 1. При  $i = n$  получаем интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \infty) - \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \\ = -\varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Значит,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} d\omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1} = (-1)^n \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \omega;$$

при записи последнего равенства мы воспользовались тем, что при ограничении на  $\partial \mathbb{R}_+^n$  форма  $dx_n$  обращается в нуль; поэтому при ограничении на  $\partial \mathbb{R}_+^n$  от формы  $\omega$  остаётся только одно слагаемое  $\varphi_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$ .

От знака  $(-1)^n$  можно избавиться, если предполагать, что ориентация  $\partial \mathbb{R}_+^n$  задаётся формой  $(-1)^n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$ . По-другому это соглашение можно сформулировать следующим образом. Пусть базис  $e_1, \dots, e_{n-1}$  задаёт положительную ориентацию края,  $\varepsilon$  — вектор внешней нормали к краю. Тогда базис  $\varepsilon, e_1, \dots, e_{n-1}$  задаёт положительную ориентацию многообразия. Действительно,  $\varepsilon = -e_n$ , поэтому базис  $\varepsilon, e_1, \dots, e_{n-1}$  ориентирован так же, как базис  $(-1)^n e_1, \dots, e_{n-1}, e_n$ .

В дальнейшем мы будем предполагать, что ориентация  $\partial \mathbb{R}_+^n$  выбрана именно так, и в формуле Стокса знак писать не будем. Отметим, что на с. 106 мы, исходя из других соображений, пришли к тому же самому соглашению об ориентации края.

**С л у ч а й 3.**  $M^n$  — произвольное ориентированное многообразие.

Переход от  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}_+^n$  к произвольным многообразиям делается посредством разбиений единицы. Пусть  $\{U_\alpha\}$  — ориентирующий атлас для  $M^n$ , в котором все множества  $U_\alpha$  диффеоморфны  $\mathbb{R}^n$  или  $\mathbb{R}_+^n$ ;  $\{\lambda_\alpha\}$  — подчинённое ему гладкое разбиение единицы. Представим форму  $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M^n)$  в виде  $\omega = \sum \lambda_\alpha \omega$ . Теорему Стокса достаточно доказать для каждой отдельной формы  $\lambda_\alpha \omega$ . Носитель этой формы — замкнутое подмножество компактного множества  $\text{supp } \lambda_\alpha \subset U_\alpha$ , поэтому он компактен.

### Гомотопическая инвариантность когомологий де Рама

**Теорема 18.3.** Пусть  $i_0, i_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$  — вложения, заданные формулами  $x \mapsto (x, 0)$  и  $x \mapsto (x, 1)$ . Тогда для всех  $k \geq 0$  существует линейное отображение  $D: \Omega^k(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ , обладающее следующим свойством:  $dD + Dd = i_1^* - i_0^*$ .

**Доказательство.** Для  $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^{n+1}) = C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  положим  $D\varphi = 0$ . При  $k \geq 1$  базисные формы из  $\Omega^k(\mathbb{R}^{n+1})$  разбиваются на два типа.



А именно, пусть  $t$  — координата на прямой  $\mathbb{R}$ ,  $x_1, \dots, x_n$  — координаты в  $\mathbb{R}^n$ . Формы, в которые не входит  $dt$ , будем обозначать  $\alpha = a dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ , а формы, в которые входит  $dt$ , будем обозначать  $\beta = b dt \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}$ . Любая форма является суммой форм таких видов, поэтому требуемое утверждение достаточно доказать только для них.

Положим  $D\alpha = 0$  и  $D\beta = \left(\int_0^1 b dt\right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}$ .

Займёмся теперь проверкой равенства  $dD + Dd = i_1^* - i_0^*$  во всех трёх случаях: для функции  $\varphi$ , для формы  $\alpha$  и для формы  $\beta$ .

$$1. dD\varphi = 0 \text{ и } Dd\varphi = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = \varphi(1) - \varphi(0) = (i_1^* - i_0^*)\varphi.$$

$$2. dD\alpha = 0 \text{ и } Dd\alpha = \left(\int_0^1 \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = (i_1^* - i_0^*)\alpha.$$

3. Прежде всего заметим, что  $i_0^*\beta = i_1^*\beta = 0$ , поскольку ограничение  $dt$  на  $i_0(\mathbb{R}^n)$  и на  $i_1(\mathbb{R}^n)$  тождественно равно нулю (все касательные векторы имеют нулевую  $t$ -координату). Далее,

$$\begin{aligned} dD\beta &= \sum_i \left( \int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}, \\ Dd\beta &= D \left( \sum_i \frac{\partial b}{\partial x_i} dx_i \wedge dt \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}} \right) = \\ &= - \sum_i \left( \int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}. \end{aligned}$$

Поэтому  $dD\beta + Dd\beta = 0$ . □

**Следствие** (лемма Пуанкаре). В  $\mathbb{R}^n$  любая замкнутая дифференциальная  $k$ -форма ( $k > 0$ ) точна, т. е.  $H_{\text{DR}}^k(\mathbb{R}^n) = 0$  при  $k > 0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим отображение  $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданное формулой  $(x, t) \mapsto tx$ . Тогда  $Hi_1 = \text{id}$  и  $Hi_0 = *$  (отображение в 0). Пусть  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$  и  $d\omega = 0$ . Тогда  $\omega = (i_1^* - i_0^*)H^*\omega = dD(H^*\omega) + Dd(H^*\omega)$ . Но  $Dd(H^*\omega) = DH^*d\omega$ , поэтому  $\omega = dD(H^*\omega)$ , т. е. форма  $\omega$  точна. □

Теорему 18.3 можно доказать и для отображений  $i_0, i_1: M^n \times \mathbb{R} \rightarrow M^n$ ; доказательство не требует никаких существенных изменений. Как следствие, получаем, что гомотопные отображения индуцируют одинаковые отображения когомологий де Рама.

**Пример 18.5.**  $H_c^k(\mathbb{R}^n) \cong H_{\text{DR}}^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{при } k = n; \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases}$

**Доказательство.** Используя диффеоморфизм  $\mathbb{R}^n \approx S^n \setminus \{x_0\}$ , можно построить точную последовательность

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^k(S^n) \rightarrow \Omega^k(S^n)/\Omega_c^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow 0.$$

Здесь  $\Omega^k(S^n)/\Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$  — ростки  $k$ -форм в точке  $x_0$ . Когомологии ростков  $k$ -форм легко вычисляются с помощью леммы Пуанкаре. Действительно, достаточно малую окрестность точки  $x_0$  можно считать расположенной в  $\mathbb{R}^n$ , поэтому из замкнутости  $k$ -формы в малой окрестности точки  $x_0$  при  $k \geq 0$  следует её точность.

По короткой точной последовательности форм можно построить точную последовательность когомологий. В результате получим  $H_c^k(\mathbb{R}^n) \cong \cong H_{\text{DR}}^k(S^n)$  при  $k \geq 2$ . Кроме того, получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_c^0(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^0(S^n) & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & H_c^1(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^1(S^n) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & & & & & & & & \\ & & 0 & & \mathbb{R} & & & & & & & & & \end{array}$$

Поэтому  $H_c^1(\mathbb{R}^n) \cong H_{\text{DR}}^1(S^n)$ . В частности,  $H_{\text{DR}}^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ .

Остаётся вычислить когомологии де Рама сферы  $S^n$ ,  $n \geq 2$ . Представим  $S^n$  в виде объединения открытых множеств  $U_1 = S^n \setminus \{x_1\}$  и  $U_2 = S^n \setminus \{x_2\}$ , диффеоморфных  $\mathbb{R}^n$ . При этом  $U_1 \cap U_2 \approx S^{n-1} \times \mathbb{R}$ , а значит,  $H_{\text{DR}}^k(U_1 \cap U_2) \cong \cong H_{\text{DR}}^k(S^{n-1})$ . Поэтому при  $k > 0$  последовательность Майера—Вьеториса показывает, что  $H_{\text{DR}}^k(S^{n-1}) \cong H_{\text{DR}}^{k+1}(S^n)$ . При  $k = 0$  и  $n \geq 2$  получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{\text{DR}}^0(S^n) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^0(\mathbb{R}^n) \oplus H_{\text{DR}}^0(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^0(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^1(S^n) & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & & & \end{array}$$

Из точности в члене  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  следует, что в этом члене  $\text{Ker} \cong \mathbb{R}$  и  $\text{Im} \cong \mathbb{R}$ , а значит, ядром отображения  $H_{\text{DR}}^0(S^{n-1}) \rightarrow H_{\text{DR}}^1(S^n)$  служит  $\mathbb{R}$ . Поэтому  $H_{\text{DR}}^1(S^n) = 0$ . □

Любая  $n$ -форма  $\omega \in \Omega^n(S^n)$  замкнута. Если эта форма  $\omega$  точна, то она лежит в ядре отображения  $\Omega^n(S^n) \rightarrow \mathbb{R}$ , заданного формулой  $\omega \mapsto \int_{S^n} \omega$ . Действительно,  $\int_{S^n} d\alpha = 0$ . Равенство  $H_{\text{DR}}^n(S^n) = \mathbb{R}$  показывает, что пространство точных  $n$ -форм совпадает с ядром этого отображения. Поэтому когомологический класс любой  $n$ -формы  $\omega$ , для которой  $\int_{S^n} \omega \neq 0$ , является ненулевым элементом группы  $H_{\text{DR}}^n(S^n) = \mathbb{R}$ .

Чтобы получить ненулевой класс когомологий в  $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ , нужно взять форму  $\varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , для которой  $\varphi$  — функция с компактным носителем и  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \neq 0$ .

## 18.2. Изоморфизм Пуанкаре для когомологий де Рама

Пусть  $M^n$  — компактное ориентированное многообразие,  $\alpha^k \in \Omega^k(M^n)$  и  $\beta^{n-k} \in \Omega^{n-k}(M^n)$ . Тогда  $\alpha^k \wedge \beta^{n-k} \in \Omega^n(M^n)$ , поэтому можно рассмотреть интеграл  $\int_{M^n} \alpha^k \wedge \beta^{n-k}$ . В случае, когда многообразие  $M^n$  некомпактное, такой интеграл может оказаться расходящимся. Чтобы этого избежать, будем предполагать, что  $\beta^{n-k} \in \Omega_c^{n-k}(M^n)$ .

Если  $M^n$  — многообразие без края, то построенное таким образом отображение  $\Omega^k(M^n) \times \Omega_c^{n-k}(M^n) \rightarrow \mathbb{R}$  переносится на когомологии де Рама. Действительно, пусть  $d\alpha^k = 0$  и  $d\beta^{n-k} = 0$ . Тогда  $d(\omega^{k-1} \wedge \beta^{n-k}) = d\omega^{k-1} \wedge \beta^{n-k}$  и  $d(\alpha^k \wedge \omega^{n-k-1}) = \pm \alpha^k \wedge d\omega^{n-k-1}$ , поэтому формы  $d\omega^{k-1} \wedge \beta^{n-k}$  и  $\alpha^k \wedge d\omega^{n-k-1}$  точные. А интеграл точной формы (с компактным носителем) по многообразию без края равен нулю. Это означает, что отображение переносится на фактор замкнутых форм по точным. В результате получаем билинейное отображение  $H_{\text{DR}}^k(M^n) \times H_c^{n-k}(M^n) \rightarrow \mathbb{R}$ , т. е. линейное отображение  $D: H_{\text{DR}}^k(M^n) \rightarrow (H_c^{n-k}(M^n))^*$ .

**Теорема 18.4** (изоморфизм Пуанкаре). *Для ориентированного многообразия  $M^n$  без края отображение  $D: H_{\text{DR}}^k(M^n) \rightarrow (H_c^{n-k}(M^n))^*$  — изоморфизм.*

**Доказательство** (см. [Gr2]). Сначала проверим, что утверждение верно для  $M^n = \mathbb{R}^n$ . Группы  $H^k(\mathbb{R}^n)$  и  $H_c^k(\mathbb{R}^n)$  мы уже вычисляли (лемма Пуанкаре и пример 18.5). Отличны от нуля только группы  $H^0(\mathbb{R}^n)$  и  $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ , причём обе они изоморфны  $\mathbb{R}$ . Поэтому достаточно проверить, что отображение  $D: H_{\text{DR}}^0(M^n) \rightarrow (H_c^n(M^n))^*$  ненулевое.

Пусть  $1 \in H^0(\mathbb{R}^n)$  — когомологический класс функции на  $\mathbb{R}^n$ , тождественно равной 1, а  $\varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$  — форма, когомологический класс которой отличен от 0. Тогда

$$\langle D(1), \varphi(x_1, \dots, x_n) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \neq 0,$$

а значит,  $D(1) \neq 0$ .

Утверждение доказано для  $M^n = \mathbb{R}^n$ , а тем самым и для всех открытых подмножеств произвольного многообразия  $M^n$ , диффеоморфных  $\mathbb{R}^n$ . Чтобы перенести его на все открытые подмножества многообразия  $M^n$  (а тем самым и на всё  $M^n$ ), мы применим стандартную технику, основанную на отображении одной последовательности Майера—Вьеториса в другую.

Рассмотрим последовательность Майера—Вьеториса для когомологий с компактными носителями

$$\begin{aligned} \dots \longleftarrow H_c^{n-k}(M^n) \longleftarrow H_c^{n-k}(U_1) \oplus H_c^{n-k}(U_2) \longleftarrow \\ \longleftarrow H_c^{n-k}(U_1 \cap U_2) \longleftarrow H_c^{n-k-1}(M^n) \longleftarrow \dots \end{aligned}$$

и дуализируем её, т. е. рассмотрим последовательность двойственных пространств и двойственных отображений. Затем отобразим последовательность Майера—Вьеториса для когомологий де Рама в дуализированную последовательность посредством отображения  $D$ :

$$\begin{array}{ccccccc} H^k(M^n) & \longrightarrow & H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) & \longrightarrow & H^k(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & H^{k+1}(M^n) \\ \downarrow D_{M^n} & & \downarrow D_{U_1 \oplus U_2} & & \downarrow D_{U_1 \cap U_2} & & \downarrow D_{M^n} \\ H_c^{n-k}(M^n)^* & \longrightarrow & H_c^{n-k}(U_1)^* \oplus H_c^{n-k}(U_2)^* & \longrightarrow & H_c^{n-k}(U_1 \cap U_2)^* & \longrightarrow & H_c^{n-k-1}(M^n)^*. \end{array}$$

Покажем, что полученная диаграмма коммутативна с точностью до знака. Коммутативность левого и среднего квадрата, в которых используются только операции ограничения формы и распространения формы, очевидна. Займёмся правым квадратом.

В правом квадрате верхнее отображение устроено следующим образом. Пусть  $\alpha^k \in \Omega^k(U_1 \cap U_2)$  и  $d\alpha^k = 0$ . Представим форму  $\alpha^k$  в виде  $\alpha^k = \alpha_1^k - \alpha_2^k$ , где  $\alpha_i^k \in \Omega^k(U_i)$ . Форме  $\alpha^k$  сопоставляется форма  $\alpha^{k+1} \in \Omega^{k+1}(M^n)$ , которая равна  $d\alpha_i^k$  на  $U_i$ . Отображение  $H_c^{n-k-1}(M^n) \rightarrow H_c^{n-k}(U_1 \cap U_2)$ , которому двойственно нижнее отображение квадрата, устроено следующим образом. Пусть  $\beta^{n-k-1} \in \Omega_c^{n-k-1}(M^n)$  и  $d\beta^{n-k-1} = 0$ . Представим форму  $\beta^{n-k-1}$  в виде  $\beta^{n-k-1} = \beta_1^{n-k-1} + \beta_2^{n-k-1}$ , где  $\beta_i^{n-k-1} \in \Omega_c(U_i)$ . Форме  $\beta^{n-k-1}$  сопоставляется форма  $\beta^{n-k} \in \Omega_c^{n-k}(U_1 \cap U_2)$ , которая равна  $d\beta_1^{n-k-1} = -d\beta_2^{n-k-1}$  (здесь подразумевается равенство на  $U_1 \cap U_2$ ). Требуется доказать, что  $\int_{U_1 \cap U_2} \alpha^k \wedge \beta^{n-k} = \pm \int_{M^n} \alpha^{k+1} \wedge \beta^{n-k-1}$ . Ясно, что

$$\begin{aligned} \int_{M^n} \alpha^{k+1} \wedge \beta^{n-k-1} &= \int_{U_1} \alpha^{k+1} \wedge \beta_1^{n-k-1} + \int_{U_2} \alpha^{k+1} \wedge \beta_2^{n-k-1} = \\ &= \int_{U_1} d\alpha_1^k \wedge \beta_1^{n-k-1} + \int_{U_2} d\alpha_2^k \wedge \beta_2^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Форма  $\alpha_i^k \wedge \beta_i^{n-k-1}$  имеет компактный носитель в  $U_i$ , поэтому интеграл  $\int_{U_i} d(\alpha_i^k \wedge \beta_i^{n-k-1})$  равен 0. Значит,

$$(-1)^{k+1} \int_{M^n} \alpha^{k+1} \wedge \beta^{n-k-1} = \int_{U_1} \alpha_1^k \wedge d\beta_1^{n-k-1} + \int_{U_2} \alpha_2^k \wedge d\beta_2^{n-k-1}.$$

Носитель формы  $d\beta_1^{n-k-1} = -d\beta_2^{n-k-1}$  лежит в пересечении носителей форм  $\beta_1^{n-k-1}$  и  $\beta_2^{n-k-1}$ , поэтому он лежит в  $U_1 \cap U_2$ . Значит, эту форму

можно рассматривать как распространение формы  $\beta^{n-k}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} \int_{M^n} \alpha^{k+1} \wedge \beta^{n-k-1} &= \int_{U_1 \cap U_2} \alpha_1^k \wedge \beta^{n-k} - \int_{U_1 \cap U_2} \alpha_2^k \wedge \beta^{n-k} = \\ &= \int_{U_1 \cap U_2} (\alpha_1^k - \alpha_2^k) \wedge \beta^{n-k} = \int_{U_1 \cap U_2} \alpha^k \wedge \beta^{n-k}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Теперь из 5-леммы следует, что если теорема об изоморфизме Пуанкаре верна для многообразий  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_1 \cap U_2$ , то она верна и для многообразия  $U_1 \cup U_2 = M^n$ .

Следующий (и важнейший) шаг — доказательство изоморфизма Пуанкаре для любого открытого множества  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Пусть  $\mathcal{U}$  — база топологии пространства  $\mathbb{R}^n$ , состоящая из открытых прямоугольников, заданных неравенствами  $a_i < x_i < b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Эта база обладает двумя важными для наших целей свойствами: 1) для любого множества из  $\mathcal{U}$  верна теорема об изоморфизме Пуанкаре; 2) пересечение любых двух множеств из  $\mathcal{U}$  снова лежит в  $\mathcal{U}$ .

*Л е м м а 18.1.* Пусть  $\mathcal{U}$  — база топологии многообразия  $M^n$ , для которой выполняются свойства 1) и 2). Тогда для любого конечного объединения множеств из  $\mathcal{U}$  верна теорема об изоморфизме Пуанкаре.

*Доказательство.* Пусть  $U_1, \dots, U_k$  — множества из  $\mathcal{U}$ . Докажем индукцией по  $k$ , что теорема об изоморфизме Пуанкаре верна для  $U_1 \cup \dots \cup U_k$ . При  $k = 1$  это верно согласно свойству 1). При  $k > 1$  представим рассматриваемое множество в виде  $U' \cup U_k$ , где  $U' = U_1 \cup \dots \cup U_{k-1}$ . Для множеств  $U'$  и  $U_k$  теорема об изоморфизме Пуанкаре верна по предположению индукции, поэтому остаётся проверить, что она верна для множества  $U' \cap U_k = (U_1 \cap U_k) \cup \dots \cup (U_{k-1} \cap U_k)$ . Согласно свойству 2) теорема об изоморфизме Пуанкаре верна для каждого множества  $U_i \cap U_k$ , поэтому она верна и для  $U' \cap U_k$ .  $\square$

*Л е м м а 18.2.* Пусть  $\mathcal{U}$  — база топологии многообразия  $M^n$ , для которой выполняется свойство 1). Тогда для любого (не обязательно конечного!) объединения попарно не пересекающихся множеств из  $\mathcal{U}$  верна теорема об изоморфизме Пуанкаре.

*Доказательство.* Пусть  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{U}$ , причём  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  для любых  $\alpha, \beta \in A$ . Тогда естественные включения  $\Omega^k \left( \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \rightarrow \prod_{\alpha \in A} \Omega^k(U_\alpha)$  и  $\bigoplus_{\alpha \in A} \Omega_c^{n-k}(U_\alpha) \rightarrow \Omega_c^{n-k} \left( \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right)$  являются изоморфизмами. Во втором случае берётся прямая сумма, а не прямое произведение, потому что форма с компактным носителем может быть отличной от нуля лишь на конечном

числе множеств  $U_\alpha$ . После дуализации второго отображения получаем изоморфизм  $\Omega_c^{n-k} \left( \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right)^* \rightarrow \prod_{\alpha \in A} \Omega_c^{n-k}(U_\alpha)^*$ . Здесь уже стоит прямое произведение. Ситуация в точности такая, как для цепей и коцепей: в каждую цепь входит конечное число симплексов, но коцепь может принимать ненулевое значение на любом множестве симплексов.

Переходя от форм к когомологиям, получаем изоморфизмы когомологий, которые включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{DR}}^k \left( \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{\alpha \in A} H_{\text{DR}}^k(U_\alpha) \\ \downarrow D & & \cong \downarrow \prod_{\alpha \in A} D_\alpha \\ H_c^{n-k} \left( \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right)^* & \xrightarrow{\cong} & \prod_{\alpha \in A} H_c^{n-k}(U_\alpha)^*. \end{array}$$

Значит,  $D$  — изоморфизм. □

Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — произвольное открытое множество. Его можно представить в виде  $U = \bigcup_{i=1}^\infty V_i$ , где  $\bar{V}_i \subset U$ ; в качестве множеств  $V_i$  можно взять открытые шары рационального радиуса с рациональными центрами. Положим  $K_1 = \bar{V}_1$ . Граница множества  $K_1$  — компактное подмножество в  $U$ , поэтому её можно покрыть конечным набором множеств  $V_{i_1}, \dots, V_{i_m}$ . Положим  $K_2 = \bar{V}_2 \cup \bar{V}_{i_1} \cup \dots \cup \bar{V}_{i_m}$ . Аналогично построим  $K_3$  и т. д. По построению  $\bigcup_{i=1}^\infty K_i = U$  и  $K_i \subset \text{int } K_{i+1}$ . Из условия  $K_i \subset \text{int } K_{i+1}$  следует, что существует компактное множество  $L_i$ , для которого  $K_i \subset \text{int } L_i \subset L_i \subset \text{int } K_{i+1}$  (рис. 44).

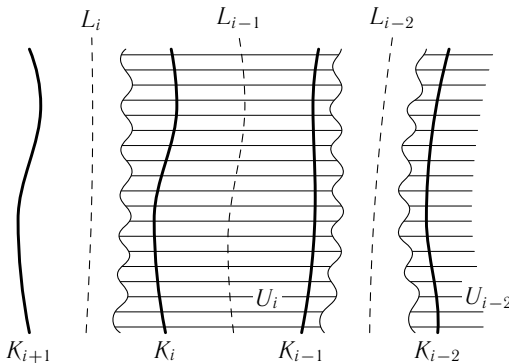


Рис. 44. Множества  $K_i$  и  $L_i$

Покроем множество  $\overline{K_i \setminus K_{i-1}}$  множествами базы  $\mathcal{U}$ , целиком лежащими в  $\text{int}(L_i \setminus L_{i-1})$ . Из компактности множества  $\overline{K_i \setminus K_{i-1}}$  следует, что из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть  $U_i$  — объединение всех множеств, входящих в это подпокрытие. Согласно лемме 18.1 для множества  $U_i$  верна теорема об изоморфизме Пуанкаре. Кроме того, по построению  $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = U$  и  $U_i \cap U_j = \emptyset$  при  $|i - j| > 1$ . Пусть  $W_1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{2i+1}$  и  $W_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{2i}$ . Согласно лемме 18.2 теорема об изоморфизме Пуанкаре верна для множеств  $W_1$  и  $W_2$ . Кроме того,  $U = W_1 \cup W_2$ . Поэтому остаётся проверить, что теорема об изоморфизме Пуанкаре верна для  $W_1 \cap W_2$ . Множество  $W_1 \cap W_2$  представляет собой объединение попарно не пересекающихся множеств  $U_i \cap U_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Каждое из этих множеств является объединением конечного числа множеств из  $\mathcal{U}$ . Поэтому согласно лемме 18.1 для множества  $U_i \cap U_{i+1}$  верна теорема об изоморфизме Пуанкаре, а значит, согласно лемме 18.2 она верна и для  $W_1 \cap W_2$ .

Для произвольного многообразия  $M^n$  доказательство изоморфизма Пуанкаре теперь можно провести примерно по той же схеме, что и для открытого множества  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Единственное существенное отличие состоит в выборе базы топологии  $\mathcal{U}$ . В качестве  $\mathcal{U}$  возьмём набор открытых множеств, гомеоморфных  $\mathbb{R}^n$  и покрывающих  $M^n$ , и всех их конечных пересечений. Для этой базы свойство 2) выполняется по определению, а свойство 1) выполняется потому, что любое множество из  $\mathcal{U}$  можно рассматривать как открытое подмножество в  $\mathbb{R}^n$ , а для таких множеств изоморфизм Пуанкаре мы уже доказали. Кроме того, вместо шаров рационального радиуса с рациональными центрами нужно взять подходящую счётную базу топологии пространства  $M^n$ . В остальном доказательство проходит без изменений.  $\square$

## § 19. Теорема де Рама

Теорема де Рама [Rh] утверждает, что для замкнутого многообразия  $M^n$  когомологии де Рама  $H_{\text{DR}}^*(M^n)$  изоморфны симплициальным (или сингулярным) когомологиям  $H^*(M^n; \mathbb{R})$ . Здесь имеется в виду изоморфизм алгебр, т. е.  $\cup$ -умножение коцепей соответствует  $\wedge$ -умножению форм. Сейчас известно много разных доказательств теоремы де Рама, но все они не очень простые. Мы приведём доказательство, которое восходит к Уитни [Ui] (см. также [Si]). По поводу других доказательств теоремы де Рама см. [X1], [Уэ], [We2], [Sa2] и [Cu]. Кроме того, мы докажем аналог теоремы де Рама для симплициальных комплексов.

### 19.1. Доказательство теоремы де Рама

Триангуляцию  $f: |K| \rightarrow M^n$  называют *гладкой*, если для любого  $n$ -мерного симплекса  $\Delta^n$  комплекса  $K$  существует открытое множество  $U \supset \Delta^n$  в  $\mathbb{R}^n$  и существует продолжение отображения  $f|_{\Delta^n}$  на  $U$ , которое является (гладким) вложением многообразия  $U$  в  $M^n$ . Мы будем предполагать, что фиксирована гладкая триангуляция  $M^n$ . (В части I доказано существование именно гладкой триангуляции многообразия.) Пусть  $C^k(M^n) = C^k(K; \mathbb{R})$  — группа  $k$ -мерных симплициальных коцепей. Зададим отображение  $\rho: \Omega^k(M^n) \rightarrow C^k(M^n)$  формулой  $\langle \rho(\omega^k), \Delta^k \rangle = \int_{\Delta^k} \omega^k$ . Теорема Стокса показывает, что  $\rho d\omega = (\delta\rho)\omega$ , поэтому отображение  $\rho$  индуцирует гомоморфизм линейных пространств  $\rho^*: H_{DR}^k(M^n) \rightarrow H^k(M^n; \mathbb{R})$ .

**Шаг 1.** *Отображение  $\rho^*$  — эпиморфизм.*

Покажем, что эпиморфность имеет место уже на уровне коцепей, т. е. каждой коцепи  $c^k \in C^k(M^n)$  можно сопоставить форму  $\omega^k \in \Omega^k(M^n)$ , для которой  $\rho(\omega^k) = c^k$ . Для построения формы по коцепи нам понадобится специальное разбиение единицы, подчинённое покрытию  $\{st v_i\}$ , где  $v_1, \dots, v_r$  — вершины комплекса  $K$ . А именно, пусть  $x_i$  — барицентрическая координата, соответствующая вершине  $v_i$  (предполагается, что  $x_i = 0$  для любой точки, лежащей вне симплексов с вершиной  $v_i$ ). Пусть  $F_i$  — множество всех точек, для которых  $x_i \geq \frac{1}{n+1}$ , а  $G_i$  — множество всех точек, для которых  $x_i \leq \frac{1}{n+2}$  (рис. 45). Пусть  $\lambda_i$  — неотрицательная гладкая функция, которая положительна на  $F_i$  и обращается в нуль на  $G_i$ . Множества  $F_i$  покрывают  $M^n$ . Действительно, сумма  $n+1$  барицентри-

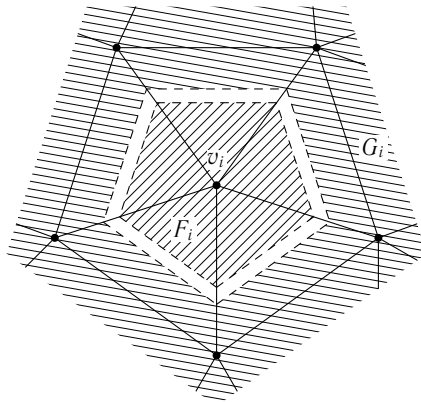


Рис. 45. Множества  $F_i$  и  $G_i$



ческих координат любой точки  $x \in M^n$  равна 1, поэтому одна из них не меньше  $\frac{1}{n+1}$ . Таким образом, функция  $\lambda(x) = \lambda_1(x) + \dots + \lambda_n(x)$  положительна. Поэтому функции  $\{\mu_i\}$ , где  $\mu_i(x) = \lambda_i(x)/\lambda(x)$ , образуют гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию  $\{M^n \setminus G_i\}$ .

Пусть  $\Delta_s^k = [v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$  и  $c_s^k$  — кощепь, двойственная симплексу  $\Delta_s^k$ , т. е.  $\langle c_s^k, \Delta_r^k \rangle = \delta_{sr}$ . Сопоставим кощепи  $c_s^k$  форму

$$\varphi_{i_0 \dots i_k} = k! \sum_{j=0}^k (-1)^j \mu_{i_j} d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k}.$$

В результате получим линейное отображение  $\varphi: C^k(M^n) \rightarrow \Omega^k(M^n)$  (линейное отображение достаточно задать на базисе). Докажем последовательно свойства этого отображения, которые позволят сделать вывод, что  $\rho^*$  — эпиморфизм.

С в о й с т в о 1. Справедливо равенство  $d\varphi(c_s^k) = \varphi(\delta c_s^k)$ .

Ясно, что  $d\varphi(c_s^k) = (k+1)! d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k}$ . Вычислим теперь  $\varphi(\delta c_s^k)$ . Кощепь  $\delta c_s^k$  представляет собой сумму кощепей, двойственных симплексам вида  $[v_p, v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ . Поэтому кощепь  $\frac{1}{(k+1)!} \varphi(\delta c_s^k)$  равна

$$\sum' \left( \mu_p d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k} - \sum_{j=0}^k (-1)^j \mu_{i_j} d\mu_p \wedge d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k} \right),$$

где  $\sum'$  означает суммирование по всем  $(k+1)$ -мерным симплексам  $[v_p, v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ . Заметим, что если  $p \notin \{i_0, \dots, i_k\}$ , но на вершины  $v_p, v_{i_0}, \dots, v_{i_k}$  не натянут симплекс, то  $\mu_p d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k} = 0$ . Действительно, если  $x \notin \text{st } v_p$ , то  $\mu_p(x) = 0$ . Если же  $x \in \text{st } v_p$ , то  $x_p \neq 0$ . Но тогда  $x_{i_j} = 0$  для некоторого  $j$  (иначе  $x_p \neq 0, x_{i_0} \neq 0, \dots, x_{i_k} \neq 0$ , поэтому точка  $x$  лежит внутри симплекса  $[v_p, v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ ). Рассмотрим открытое множество  $U$ , состоящее из точек  $y \in M^n$ , для которых  $y_{i_j} < \frac{1}{n+2}$ . Точка  $x$  принадлежит множеству  $U$  и  $\mu_{i_j}$  обращается в нуль на  $U$ , поскольку  $U \subset G_{i_j}$ . Следовательно,  $d\mu_{i_j} = 0$ . Таким образом,

$$\sum' \mu_p d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k} = \sum_{p \notin \{i_0, \dots, i_k\}} \mu_p d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k}.$$

Воспользовавшись этим свойством и тем, что  $\sum \mu_i(x) = 1$  (а значит,  $\sum d\mu_i = 0$ ), получим

$$\sum' \sum_{j=0}^k (-1)^j \mu_{i_j} d\mu_p \wedge d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum' \mu_{i_j} d\mu_p \wedge d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k} = \\
&= \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{p \notin \{i_0, \dots, i_k\}} \mu_{i_j} d\mu_p \wedge d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k} = \\
&= \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{p \neq i_j} \mu_{i_j} d\mu_p \wedge d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k} = \\
&= \sum_{j=0}^k (-1)^j \mu_{i_j} \left( \sum_{p \neq i_j} d\mu_p \right) d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k} = \\
&= \sum_{j=0}^k (-1)^j \mu_{i_j} (-d\mu_{i_j}) d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k} = \\
&= - \sum_{j=0}^k \mu_{i_j} d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k}.
\end{aligned}$$

В результате получаем, что

$$\begin{aligned}
\varphi(\delta c_s^k) &= (k+1)! \sum_p \mu_p d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k} = \\
&= (k+1)! d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k} = d\varphi(c_s^k).
\end{aligned}$$

**Свойство 2.** Если  $\langle c^0, v_i \rangle = 1$  для каждой вершины  $v_i$ , то  $\varphi(c^0) = 1$  (функция, тождественно равная 1).

Ясно, что  $c^0 = \sum_i c_i^0$ , где  $c_i^0$  — коцепь, двойственная симплексу  $[v_i]$ .

Поэтому  $\varphi(c^0) = \sum_i \mu_i = 1$ .

**Свойство 3.** Если  $c_s^k$  — коцепь, двойственная симплексу  $\Delta_s^k = [v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ , то форма  $\varphi(c_s^k)$  тождественно равна нулю в окрестности множества  $M^n \setminus \text{st } \Delta_s^k$ .

По определению

$$\varphi(c_s^k) = k! \sum_{j=0}^k (-1)^j \mu_{i_j} d\mu_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \dots \wedge d\mu_{i_k}.$$

Функция  $\mu_i$  и форма  $d\mu_i$  тождественно равны нулю на множестве  $G_i$ , поэтому форма  $\varphi(c_s^k)$  тождественно равна нулю на множестве  $G_{i_0} \cup \dots \cup G_{i_k}$ . Это множество содержит окрестность множества  $M^n \setminus \text{st } \Delta_s^k$ .

**Свойство 4.** Справедливо равенство  $\rho \circ \varphi = \text{id}$ .

Применим индукцию по  $k$ . Сначала рассмотрим случай  $k = 0$ . Пусть коцепь  $c_i^0$  двойственна симплексу  $[v_i]$ . Тогда  $\varphi(c_i^0) = \mu_i$  и  $\langle \rho\varphi(c_i^0), [v_j] \rangle = \int_{[v_j]} \mu_i = \mu_i(v_j)$ . Если  $i \neq j$ , то  $v_j \notin \text{st } v_i$ , а вне  $\text{st } v_i$  функция  $\mu_i$  равна нулю. Кроме того,  $\mu_i(v_i) = \sum_j \mu_i(v_j) = 1$ . Поэтому коцепь  $\rho\varphi(c_i^0)$  двойственна симплексу  $[v_i]$ , т. е.  $\rho\varphi(c_i^0) = c_i^0$ .

Предположим теперь, что  $k \geq 1$  и свойство 4 доказано для всех коцепей размерности  $k - 1$ . Пусть  $c_s^k$  — коцепь, двойственная симплексу  $\Delta_s^k = [v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ . Согласно свойству 3 форма  $\varphi(c_s^k)$  обращается в нуль вне  $\text{st } \Delta_s^k$ , поэтому она тождественно равна нулю на любом  $k$ -мерном симплексе, отличном от  $\Delta_s^k$ . Остаётся проверить, что  $\langle \rho\varphi(c_s^k), \Delta_s^k \rangle = 1$ . Пусть  $c_{s,j}^{k-1}$  — коцепь, двойственная симплексу  $\Delta_{s,j}^{k-1} = [v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_j}}, \dots, v_{i_k}]$ . Тогда  $\delta c_{s,0}^{k-1} = c_s^k + c_t^k + \dots + c_\tau^k$ , где  $c_t^k, \dots, c_\tau^k$  — коцепи, двойственные  $k$ -мерным симплексам, гранью которых служит симплекс  $\Delta_{s,0}^{k-1}$  (и которые отличны от  $\Delta_s^k$ ). Но мы только что доказали, что  $\langle \rho\varphi(c_t^k), \Delta_s^k \rangle = 0$  при  $t \neq s$ . Значит,  $\langle \rho\varphi(\delta c_{s,0}^{k-1}), \Delta_s^k \rangle = \langle \rho\varphi(c_s^k), \Delta_s^k \rangle$ . С другой стороны, воспользовавшись свойством 1 и формулой Стокса, получим

$$\begin{aligned} \langle \rho\varphi(\delta c_{s,0}^{k-1}), \Delta_s^k \rangle &= \langle d\rho\varphi(c_{s,0}^{k-1}), \Delta_s^k \rangle = \\ &= \int_{\partial\Delta_s^k} \rho\varphi(c_{s,0}^{k-1}) = \sum_j \int_{\Delta_{s,j}^{k-1}} \rho\varphi(c_{s,j}^{k-1}) = \int_{\Delta_{s,0}^{k-1}} \rho\varphi(c_{s,0}^{k-1}) = 1 \end{aligned}$$

(в самом конце мы воспользовались свойством 4 для коцепей коразмерности  $k - 1$ ).

Этим доказательство эпиморфности отображения  $\rho^*$  завершено. Действительно, из свойства 1 следует, что  $\alpha$  индуцирует гомоморфизм  $\varphi^*: H^k(M^n; \mathbb{R}) \rightarrow H_{\text{DR}}^k(M^n)$ , а из свойства 4 следует, что  $\rho^* \circ \varphi^* = \text{id}$ . Поэтому  $\rho^*$  — эпиморфизм.

**Шаг 2. Отображение  $\rho^*$  — мономорфизм.**

Пусть  $\Delta^m$  — симплекс в  $\mathbb{R}^n$ ,  $m \geq 1$ . Докажем следующие утверждения.

(A $_k$ ),  $k \geq 0$ . Пусть  $\omega^k$  — замкнутая форма, определённая в окрестности  $\partial\Delta^m$ . Если  $m = k + 1$ , то дополнительно предполагается, что  $\int_{\partial\Delta^m} \omega^k = 0$ . Тогда существует замкнутая форма  $\alpha^k$ , определённая в окрестности симплекса  $\Delta^m$ , для которой  $\alpha^k = \omega^k$  в окрестности  $\partial\Delta^m$ .

(B $_k$ ),  $k \geq 1$ . Пусть  $\omega^k$  — замкнутая форма, определённая в окрестности симплекса  $\Delta^m$ ,  $\alpha^{k-1}$  — форма, определённая в окрестности  $\partial\Delta^m$ . Предположим, что в окрестности границы  $\partial\Delta^m$  выполняется равенство  $\omega^k = d\alpha^{k-1}$ . Если  $m = k$ , то дополнительно предполагается, что  $\int_{\partial\Delta^k} \alpha^{k-1} = \int_{\Delta^k} \omega^k$ . Тогда существует форма  $\beta^{k-1} = \alpha^{k-1}$ , определённая в окрест-

ности  $\partial\Delta^m$ , для которой  $\beta^{k-1} = \alpha^{k-1}$  в окрестности  $\partial\Delta^m$  и  $d\beta^{k-1} = \omega^k$  в окрестности симплекса  $\Delta^m$ .

Оба дополнительных предположения связаны с тем, что для требуемой формы  $\alpha$  должна выполняться теорема Стокса, а это накладывает некоторые ограничения на исходную форму  $\omega$ .

Схема доказательства будет такая. Сначала мы докажем утверждение  $(A_0)$ , а затем докажем, что  $(A_{k-1}) \Rightarrow (B_k)$  и  $(B_k) \Rightarrow (A_k)$ .

$(A_0)$  Замкнутость 0-формы (функции)  $\omega^0$  означает, что она постоянна на каждой связной компоненте. Если  $m \geq 2$ , то множество  $\partial\Delta^m$  связно; окрестность этого множества тоже можно считать связной. В этом случае форма  $\omega^0$  равна константе  $c$  и мы полагаем  $\alpha^0 = c$ . Если  $m = 1$ , то множество  $\partial\Delta^m$  несвязно, но в этом случае  $m = k + 1$ , поэтому должно выполняться условие  $\int_{\partial\Delta^1} \omega^0 = 0$ . Пусть  $\Delta^1 = [v_0, v_1]$ . Тогда это условие имеет вид  $\omega^0(v_1) = \omega^0(v_0)$ , поэтому на обеих компонентах связности форма  $\omega^0$  принимает одно и то же значение  $c$ , и мы снова полагаем  $\alpha^0 = c$ .

$(A_{k-1}) \Rightarrow (B_k)$ . Пусть  $\omega^k$  — замкнутая форма, определённая в окрестности  $\Delta^m$ . Согласно лемме Пуанкаре  $\omega^k = d\beta_1^{k-1}$  для некоторой формы  $\beta_1^{k-1}$  (мы предполагаем, что окрестность симплекса  $\Delta^m$  диффеоморфна открытому  $n$ -мерному шару). Рассмотрим в окрестности  $\partial\Delta^m$  форму  $\gamma^{k-1} = \alpha^{k-1} - \beta_1^{k-1}$ . Тогда  $d\gamma^{k-1} = \omega^k - \omega^k = 0$ . Более того, если  $m = k$ , то  $\int_{\partial\Delta^k} \gamma^{k-1} = \int_{\partial\Delta^k} \alpha^{k-1} - \int_{\partial\Delta^k} \beta_1^{k-1} = \int_{\Delta^k} d\omega^k - \int_{\Delta^k} d\beta_1^{k-1} = 0$ . Поэтому к форме  $\gamma^{k-1}$  можно применить утверждение  $(A_{k-1})$ . В результате получим, что существует замкнутая форма  $\gamma_1^{k-1}$ , которая определена в окрестности  $\Delta^m$ , причём  $\gamma_1^{k-1} = \gamma^{k-1} = \alpha^{k-1} - \beta_1^{k-1}$  в окрестности  $\partial\Delta^m$ . Форма  $\beta^{k-1} = \beta_1^{k-1} + \gamma_1^{k-1}$  обладает всеми требуемыми свойствами.

$(B_k) \Rightarrow (A_k)$ . Пусть  $\omega^k$  — замкнутая форма, определённая в окрестности  $\partial\Delta^m$ , где  $\Delta^m = [v_0, \dots, v_m]$ . Рассмотрим множество  $(\partial\Delta^m) \setminus [v_1, \dots, v_m]$ , гомеоморфное открытому  $(m-1)$ -мерному шару. Можно считать, что окрестность этого множества гомеоморфна открытому  $n$ -мерному шару. В таком случае можно применить лемму Пуанкаре и получить форму  $\beta^{k-1}$ , определённую на этой окрестности и удовлетворяющую равенству  $d\beta^{k-1} = \omega^k$ . В частности,  $d\beta^{k-1} = \omega^k$  в окрестности  $\partial\Delta^{m-1}$ , где  $\Delta^{m-1} = [v_1, \dots, v_m]$ . При  $m > 1$  можно применить утверждение  $(B_k)$  к формам  $\omega^k$  и  $\beta^{k-1}$  и симплексу  $\Delta^{m-1}$ . Нужно лишь проверить, что при  $m-1 = k$  выполняется равенство  $\int_{\Delta^{m-1}} \omega^k = \int_{\partial\Delta^{m-1}} \beta^{k-1}$ . Положим  $c = \partial\Delta^m - \Delta^{m-1}$ . Тогда  $\partial c = -\partial\Delta^{m-1}$  и любой симплекс цепи  $c$  содержится в окрестности, на которой определена форма  $\beta^{k-1}$ . Поэтому  $\int_{\Delta^{m-1}} \omega^k - \int_{\partial\Delta^{m-1}} \beta^{k-1} = \int_{\Delta^{m-1}} \omega^k + \int_{\partial c} \beta^{k-1} = \int_{\Delta^{m-1}} \omega^k + \int_c \omega^k = \int_{\partial\Delta^m} \omega^k = 0$ .

Применив утверждение  $(B_{k-1})$ , получим форму  $\beta_1^{k-1}$ , которая определена в окрестности симплекса  $\Delta^{m-1}$ , причём  $\beta_1^{k-1} = \beta^{k-1}$  в окрестности  $\partial\Delta^{m-1}$ . Формы  $\beta_1^{k-1}$  и  $\beta^{k-1}$  совпадают там, где они обе определены, поэтому из них можно склеить форму  $\alpha_1^{k-1}$ , которая определена в окрестности  $\partial\Delta^{m-1}$  и удовлетворяет равенству  $d\alpha_1^{k-1} = \omega_k$ . Чтобы продолжить её до формы  $\alpha^{k-1}$ , определённой в окрестности симплекса  $\Delta^m$ , рассмотрим функцию  $\lambda$ , которая равна 1 в малой окрестности  $\partial\Delta^m$  и равна 0 вне чуть большей окрестности  $\partial\Delta^m$ . Форма  $\alpha^{k-1} = \lambda\alpha_1^{k-1}$  обладает всеми требуемыми свойствами. Остаётся рассмотреть отдельно случай  $m = 1$ . В этом случае форма  $\omega^k$  определена в окрестностях вершин  $v_0$  и  $v_1$ ; эти окрестности можно считать непересекающимися (и гомеоморфными открытому  $n$ -мерному шару). Согласно лемме Пуанкаре существует форма  $\alpha_1^{k-1}$ , которая определена в этих окрестностях и удовлетворяет равенству  $d\alpha_1^{k-1} = \omega^k$ . Форма  $\alpha^{k-1}$ , определённая в окрестности отрезка  $[v_0, v_1]$ , строится по форме  $\alpha_1^{k-1}$  точно так же, как и раньше.

Мономорфность отображения  $\rho^*$  вытекает из следующей леммы, которую мы докажем, используя утверждение  $(B_k)$ .

*Л е м м а.* Пусть  $\omega^k$  — замкнутая форма на  $M^n$ , причём  $\rho(\omega^k) = \delta c^{k-1}$  для некоторой коцепи  $c^{k-1} \in C^{k-1}(M^n; \mathbb{R})$ . Тогда существует форма  $\alpha^{k-1}$  на  $M^n$ , для которой  $d\alpha^{k-1} = \omega^k$  и  $\rho(\alpha^{k-1}) = c^{k-1}$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Напомним, что мы фиксировали триангуляцию  $f: |K| \rightarrow M^n$ . Форму  $\alpha^{k-1}$  мы будем строить индукцией по размерности остова комплекса  $K$ . А именно, мы будем строить последовательность форм  $\alpha_0^{k-1}, \dots, \alpha_n^{k-1}$  так, что

1) форма  $\alpha_m^{k-1}$  определена в окрестности  $m$ -мерного остова комплекса  $K$ , причём там, где эта форма определена, выполняется равенство  $d\alpha_m^{k-1} = \omega^k$ ;

2) форма  $\alpha_{m+1}^{k-1}$  совпадает с  $\alpha_m^{k-1}$  в окрестности  $m$ -мерного остова;

3)  $\rho(\alpha_{m-1}^{k-1}) = c^{k-1}$ .

Последнее равенство нужно понимать так. Отображение  $\rho$  мы определяем только для форм, заданных на всём комплексе  $K$ , но в действительности мы пользовались лишь ограничением  $k$ -формы на  $k$ -мерный остов. Поэтому можно считать, что отображение  $\rho$  определено для форм  $\alpha_m^{k-1}$ , где  $m \geq k-1$ ; при этом  $\rho(\alpha_{m-1}^{k-1}) = \rho(\alpha_n^{k-1})$ , т. е. в качестве  $\alpha^{k-1}$  можно взять форму  $\alpha_n^{k-1}$ .

Форма  $\alpha_0^{k-1}$  строится следующим образом. Покроем вершины  $v_1, \dots, v_r$  комплекса  $K$  непересекающимися окрестностями. В каждой из этих окрестностей можно применить лемму Пуанкаре и построить форму, дифференциал которой равен  $\omega^k$ . Если  $k \geq 1$ , то требуемая форма построена. При  $k = 1$  нужно ещё, чтобы выполнялось равенство  $\rho(\alpha_0^0) = c^0$ ,

т. е.  $\alpha_0^0(v_i) = \langle c^0, v_i \rangle$ . Этого легко добиться, поскольку в окрестности каждой точки  $v_i$  к функции  $\alpha_0^0$  можно прибавить произвольную константу  $C_i$ .

Форму  $\alpha_m^{k-1}$  по форме  $\alpha_{m-1}^{k-1}$  можно строить отдельно для каждого симплекса  $\Delta^m$ . Действительно, общая область определения построенных таким образом форм содержится в окрестности  $(m-1)$ -мерного остова, а там эти формы совпадают с  $\alpha_{m-1}^{k-1}$ . Построение формы  $\alpha_m^{k-1}$  основано на утверждении  $(B_k)$ , которое применяется к формам  $\omega_k$  и  $\alpha_{m-1}^{k-1}$ . Чтобы применить утверждение  $(B_k)$ , нужно проверить, что если  $k = m$ , то  $\int_{\partial \Delta^k} \alpha_{m-1}^{k-1} = \int_{\Delta^k} \omega^k$ . Но  $\int_{\Delta^k} \omega^k = \rho(\omega^k) = \langle \delta c^{k-1}, \Delta^k \rangle = \langle c^{k-1}, \partial \Delta^k \rangle = \langle \rho(\alpha_{k-1}^{k-1}), \partial \Delta^k \rangle = \int_{\partial \Delta^k} \alpha_{m-1}^{k-1}$ . Если  $m = k-1$ , то нужно ещё, чтобы выполнялось равенство  $\int_{\Delta^{k-1}} \alpha_{k-1}^{k-1} = \langle c^{k-1}, \Delta^{k-1} \rangle$ . Попытаемся добиться этого, добавив к построенной форме замкнутую форму  $\beta^{k-1}$ , которая определена в окрестности  $(k-1)$ -мерного остова, обращается в нуль в окрестности  $(k-2)$ -мерного остова и для которой  $\int_{\Delta^{k-1}} \beta^{k-1}$  имеет заданное значение для каждого симплекса  $\Delta^{k-1}$ , т. е.  $\rho(\beta^{k-1})$  — заданная коцепь  $d^{k-1}$ . Покажем, что форма  $\beta^{k-1} = \varphi(d^{k-1})$ , где  $\varphi: C^k(M^n) \rightarrow \Omega^k(M^n)$  — отображение, определённое на с. 312, обладает требуемыми свойствами. Напомним, что согласно свойству 3 форма  $\varphi(c_s^k)$  тождественно равна нулю в окрестности множества  $M^n \setminus \text{st} \Delta_s^k$ . В частности, она равна нулю в окрестности  $(k-1)$ -мерного остова. Следовательно, форма  $\beta^{k-1}$  обращается в нуль в окрестности  $(k-2)$ -мерного остова, а форма  $d\beta^{k-1} = \varphi(\delta d^{k-1})$  обращается в нуль в окрестности  $(k-1)$ -мерного остова.  $\square$

Наконец, проверим, что при изоморфизме де Рама  $\wedge$ -произведение форм переходит в  $\vee$ -произведение когомологических классов. Пусть формам  $\omega_1^p$  и  $\omega_2^q$  соответствуют когомологические классы  $\alpha^p$  и  $\beta^q$ . Рассмотрим на многообразии  $M^n \times M^n$  форму  $(p_1^* \omega_1^p) \wedge (p_2^* \omega_2^q)$ , где  $p_1, p_2: M^n \times M^n \rightarrow M^n$  — естественные проекции на первый и второй множитель. Из теоремы Фубини следует, что эта форма соответствует когомологическому классу  $\alpha^p \otimes \beta^q$ , поскольку

$$\int_{\Delta_1^p \times \Delta_2^q} (p_1^* \omega_1^p) \wedge (p_2^* \omega_2^q) = \delta_{pr} \delta_{qs} \left( \int_{\Delta_1^p} \omega_1^p \right) \left( \int_{\Delta_2^q} \omega_2^q \right).$$

Пусть  $d: M^n \rightarrow M^n \times M^n$  — диагональное отображение. Тогда  $d^*(\alpha^p \otimes \beta^q) = \alpha^p \vee \beta^q$  и  $d^*((p_1^* \omega_1^p) \wedge (p_2^* \omega_2^q)) = \omega_1^p \wedge \omega_2^q$ .

## 19.2. Симплициальная теорема де Рама

Дифференциальные формы можно рассматривать не только на гладких многообразиях, но и на симплициальных комплексах. Идея построения

таких форм восходит к Уитни [Уи] и Тому [Th2]. Но наиболее важную роль в развитии этой теории сыграла работа Сулливана [Su], в которой он применил кусочно полиномиальные дифференциальные формы для решения некоторых задач гомотопической топологии. Кроме того, Сулливан построил теорию над полем  $\mathbb{Q}$  (и вообще над любым полем нулевой характеристики), а не только над полем  $\mathbb{R}$ .

Пусть  $x_0, \dots, x_n$  — барицентрические координаты на симплексе  $\Delta^n$ ; предполагается, что  $\sum x_i = 1$ . Будем называть *полиномиальной  $k$ -формой* на  $\Delta^n$  выражение вида

$$\sum P_{i_1, \dots, i_k}(x_0, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

где  $P_{i_1, \dots, i_k}$  — многочлен с рациональными коэффициентами. Можно также рассматривать и многочлены с вещественными коэффициентами. Здесь снова предполагается, что  $\sum x_i = 1$  и, соответственно,  $\sum dx_i = 0$ .

Помимо полиномиальных дифференциальных форм можно рассматривать *гладкие дифференциальные  $k$ -формы* на симплексе  $\Delta^n$ . Они имеют вид

$$\sum f_{i_1, \dots, i_k}(x_0, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

где  $f_{i_1, \dots, i_k}$  — гладкая функция на открытом множестве в  $\mathbb{R}^n$ , содержащем  $\Delta^n$ .

*Полиномиальная дифференциальная форма* на симплицальном комплексе  $K$  получается склейкой полиномиальных дифференциальных форм на симплексах  $K$ . Эти формы должны быть согласованы в следующем смысле: если симплексы  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  имеют общую грань  $\Delta_{12}$  и на этих симплексах заданы формы  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то ограничения форм  $\omega_1$  и  $\omega_2$  на  $\Delta_{12}$  должны совпадать. Ограничение формы на грань  $x_i = 0$  производится следующим образом: нужно положить  $x_i = 0$  и  $dx_i = 0$ .

*Гладкие дифференциальные формы* на симплицальном комплексе  $K$  определяются аналогично. Обратите внимание, что гладкие формы на триангуляции многообразия — это совсем не то же самое, что гладкие формы на многообразии. Например, гладкие функции (0-формы) на триангуляции окружности — это кусочно гладкие функции (они могут быть недифференцируемыми в вершинах триангуляции).

Линейные пространства полиномиальных и гладких  $k$ -форм на симплицальном комплексе  $K$  мы будем обозначать  $A^k(K)$  и  $A_{C^\infty}^k(K)$  соответственно.

На линейных пространствах  $A^k(K)$  и  $A_{C^\infty}^k(K)$  определён оператор  $d$ ; определено также внешнее произведение форм. Для полиномиальных форм над  $\mathbb{Q}$  существенно, что  $d(P_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$  выражается через част-

ные производные многочлена  $P_{i_1, \dots, i_k}$ , которые тоже являются многочленами с рациональными коэффициентами.

Докажем теперь некоторые свойства полиномиальных форм, аналогичные свойствам дифференциальных форм на многообразиях.

**Лемма 1.** Пусть  $K$  — конечный симплицальный комплекс,  $CK$  — конус над  $K$ . Предположим, что форма  $\omega^k \in A^k(CK)$  замкнута,  $k \geq 1$ . Тогда  $\omega^k = d\alpha^{k-1}$  для некоторой формы  $\alpha^{k-1} \in A^{k-1}(CK)$ .

**Доказательство.** Представим точку конуса  $CK$  в виде  $\lambda x + (1 - \lambda)a$ , где  $x \in K$ ,  $a$  — вершина конуса и  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Зададим отображение  $\mu: CK \times I \rightarrow CK$  формулой

$$\mu(\lambda x + (1 - \lambda)a) = \lambda(1 - t)x + (\lambda + t(1 - \lambda))a.$$

Для формы  $\omega^k$  на  $CK$  можно рассмотреть форму  $\mu^*(\omega^k)$  на  $CK \times I$ . Пусть  $\Delta$  — некоторый симплекс  $K$ . Ограничение формы  $\mu^*(\omega^k)$  на  $CK \times I$  можно представить в виде  $\sum_{p \geq 0} (t^p \alpha_p(\Delta) + t^p \beta_p(\Delta) \wedge dt)$ , где  $\alpha_p(\Delta)$  и  $\beta_p(\Delta)$  — формы на  $\Delta$ , в которые не входят  $t$  и  $dt$ . Они определяют формы  $\alpha_p$  и  $\beta_p$  на всём  $K$ .

При  $t = 0$  отображение  $\mu$  тождественное, поэтому если мы положим  $t = 0$  и  $dt = 0$ , то из формы  $\mu^*(\omega^k)$  мы получим  $\omega^k$ . Это означает, что  $\alpha_0 = \omega^k$ . При  $t = 1$  отображение  $\mu$  постоянное, поэтому если мы положим  $t = 1$  и  $dt = 0$ , то из формы  $\mu^*(\omega^k)$  получим 0 (постоянное отображение индуцирует нулевое отображение  $k$ -форм при  $k \geq 1$ ; здесь существенно, что  $k \geq 1$ ). Это означает, что  $\sum_{p \geq 0} \alpha_p = 0$ .

Воспользуемся теперь тем, что форма  $\omega^k$  замкнута. Из этого следует, что  $d(\mu^*(\omega^k)) = \mu^*(d\omega^k) = 0$ , т. е.  $d\left(\sum_{p \geq 0} t^p \alpha_p + t^p \beta_p \wedge dt\right) = 0$ . Здесь

$$d(t^p \alpha_p) = t^p d\alpha_p + (-1)^{\deg \alpha_p} p t^{p-1} \alpha_p \wedge dt \text{ и } d(t^p \beta_p \wedge dt) = t^p d\beta_p \wedge dt.$$

Поэтому  $d\alpha_p = 0$  и  $(-1)^{\deg \alpha_p} p \alpha_p + d\beta_{p-1} = 0$  для всех  $p \geq 0$ .

Из полученных равенств следует, что

$$d\left(\sum_{p \geq 0} (-1)^{\deg \alpha_p} \frac{\beta_p}{p+1}\right) = \sum_{p \geq 0} (-1)^{\deg \alpha_p} \frac{d\beta_p}{p+1} = -\sum_{p \geq 1} \alpha_p = \alpha_0 = \omega^k. \quad \square$$

**Лемма 2** (о продолжении). Для любой формы  $\omega \in A^k(\partial\Delta^n)$  существует форма  $\Omega \in A^k(\Delta^n)$ , ограничение которой на  $\partial\Delta^n$  совпадает с  $\omega$ .

**Доказательство.** Симплекс  $\Delta^n = [v_0, \dots, v_n]$  с выброшенной вершиной  $v_0$  можно спроецировать из вершины  $v_0$  на противоположную ей грань  $[v_1, \dots, v_n]$ . В барицентрических координатах это отображение



задаётся формулой

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto \left( \frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_n}{1-x_0} \right).$$

Обозначим это отображение  $\pi_0$ . Пусть  $\omega_0$  — ограничение формы  $\omega$  на грань  $[v_1, \dots, v_n]$ . На  $\Delta^n \setminus \{x_0\}$  можно рассмотреть форму  $\pi_0^* \omega_0$ . Если

$$\omega_0 = \sum P_{i_1 \dots i_k}(y_1, \dots, y_n) dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k},$$

где  $y_1, \dots, y_n$  — барицентрические координаты на  $[v_1, \dots, v_n]$ , то

$$\pi_0^* \omega_0 = \sum P_{i_1 \dots i_k} \left( \frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_n}{1-x_0} \right) d \left( \frac{x_{i_1}}{1-x_0} \right) \wedge \dots \wedge d \left( \frac{x_{i_k}}{1-x_0} \right).$$

Но  $d \left( \frac{x_i}{1-x_0} \right) = \frac{(1-x_0) dx_i + x_i dx_0}{(1-x_0)^2}$ . Поэтому можно выбрать натуральное число  $N$  так, что форма  $(1-x_0)^N \pi_0^* \omega_0 = \tilde{\omega}_0$  будет полиномиальной формой. Более того, форма  $\tilde{\omega}_0$  корректно определена на всём симплексе  $\Delta^n$ : в вершине  $v_0$  она равна нулю, поскольку в этой вершине  $x_0 = 1$ . Аналогично можно построить формы  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$ , рассматривая проекции из вершин  $v_0, \dots, v_n$ .

Грань  $[v_1, \dots, v_n]$  задаётся уравнением  $x_0 = 0$ , поэтому на этой грани форма  $\tilde{\omega}_0$  совпадает с  $\omega$ . Таким образом, форма  $\omega - \tilde{\omega}_0|_{\partial \Delta^n}$  обращается в нуль на грани  $[v_1, \dots, v_n]$ .

Наша конструкция обладает следующим свойством: если форма  $\omega$  обращается в нуль на грани  $x_i = 0$ , то форма  $\omega - \tilde{\omega}_0|_{\partial \Delta^n}$  тоже обращается в нуль на этой грани. Другими словами, если задана форма  $\omega$  на  $\partial \Delta^n$ , которая обращается в нуль на нескольких гранях, то мы можем построить форму  $\tilde{\omega}_1$  на  $\Delta^n$ , которая обращается в нуль на всех тех же гранях и ещё дополнительно совпадает с  $\omega$  на какой-то другой грани. Теперь по индукции можно построить требуемую форму, поскольку форма  $\omega = 0$  продолжается на  $\Delta^n$  очевидным образом.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Для гладких функций на  $\Delta^n$  аналогичное утверждение тоже верно. Доказывается оно почти точно так же, нужно лишь заменить функцию  $(1-x_0)^N$  на гладкую функцию, которая равна 1 в окрестности грани  $[v_1, \dots, v_n]$  и равна 0 в окрестности вершины  $v_0$ .

**Л е м м а 3.** Пусть  $\omega^k$  — замкнутая полиномиальная форма на симплексе  $\Delta^n$ , обращающаяся в нуль на  $\partial \Delta^n$ ; при  $k = n$  будем дополнительно предполагать, что  $\int_{\Delta^n} \omega^k = 0$ . Тогда  $\omega^k = d\alpha^{k-1}$  для некоторой формы  $\alpha^{k-1} \in A^{k-1}(\Delta^n)$ , обращающейся в нуль на  $\partial \Delta^n$  ( $\omega^k = 0$  при  $k = 0$ ).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** При  $n = 0$  есть только нулевые формы. Пусть  $n = 1$  и  $\Delta^1 = [0, 1]$ . Если  $k = 0$ , то у нас есть полином  $P(x)$ , для которого

$P'(x) = 0$  для всех  $x$  и  $P(0) = P(1) = 0$ . Значит,  $P(x) = 0$  для всех  $x$ . Если  $k = 1$ , то у нас есть 1-форма  $P(x) dx$ , причём по условию  $\int_0^1 P(x) dx = 0$ .

Пусть  $Q(x) = \int_0^x P(t) dt = 0$ . Тогда  $d(Q(x)) = P(x) dx$  и  $Q(0) = Q(1) = 0$ .

Далее мы применим индукцию по  $n$ . Но доказательство импликации  $(A_{n-1}) \Rightarrow (A_n)$  (где  $(A_n)$  — утверждение леммы для  $\Delta^n$ ) мы получим, доказав импликацию  $(A_{n-1}) \Rightarrow (B_n) \Rightarrow (A_n)$ , где  $(B_n)$  — следующее утверждение: Пусть  $k \geq 1$  и  $\omega^k$  — замкнутая полиномиальная форма на  $\partial\Delta^n$ ; при  $k = n - 1$  будем дополнительно предполагать, что  $\int_{\partial\Delta^n} \omega^{n-1} = 0$ . Тогда  $\omega^k = d\alpha^{k-1}$  для некоторой полиномиальной формы  $\alpha^{k-1}$  на  $\partial\Delta^n$ .

Сначала докажем импликацию  $(A_{n-1}) \Rightarrow (B_n)$ . Пусть  $\omega^k$  — замкнутая полиномиальная форма на  $\partial\Delta^n$ . Рассмотрим грань  $[v_1, \dots, v_n]$  симплекса  $\Delta^n = [v_0, \dots, v_n]$ . Пусть  $K = \partial[v_1, \dots, v_n]$  и  $CK$  — объединение всех граней симплекса  $\Delta^n$ , кроме грани  $[v_1, \dots, v_n]$ . Применив лемму Пуанкаре (лемма 1), получим, что  $\omega^k|_{CK} = d\beta^{k-1}$  для некоторой формы  $\beta^{k-1} \in A^k(CK)$ . Применив лемму о продолжении, форму  $\beta^{k-1}$  можно продолжить до формы  $\tilde{\beta}^{k-1}$  на  $\partial\Delta^n$ . Форма  $\omega^k - \tilde{\beta}^{k-1}$  замкнута, и она может быть отлична от нуля только на грани  $[v_1, \dots, v_n]$ , причём на  $K = \partial[v_1, \dots, v_n]$  эта форма обращается в нуль. Если  $k = n - 1$ , то

$$0 = \int_{\partial\Delta^n} \omega^k = \int_{\partial\Delta^n} (\omega^k - \tilde{\beta}^{k-1}) = \int_{[v_1, \dots, v_n]} (\omega^k - \tilde{\beta}^{k-1}).$$

Поэтому утверждение  $(A_{n-1})$  можно применить к ограничению формы  $\omega^k - \tilde{\beta}^{k-1}$  на симплекс  $[v_1, \dots, v_n]$ . В результате получим, что  $(\omega^k - \tilde{\beta}^{k-1})|_{[v_1, \dots, v_n]} = \partial\gamma^{k-1}$  для некоторой формы  $\gamma^{k-1}$  на симплексе  $[v_1, \dots, v_n]$ , обращающейся в нуль на  $\partial[v_1, \dots, v_n]$ . Форму  $\gamma^{k-1}$  можно продолжить до формы  $\tilde{\gamma}^{k-1}$  на  $\partial\Delta^n$ , тождественно равной нулю на  $CK$ . При этом  $\omega^k = d(\tilde{\beta}^{k-1} + \tilde{\gamma}^{k-1})$ .

Докажем теперь импликацию  $(B_n) \Rightarrow (A_n)$ . Пусть  $\omega^k$  — замкнутая полиномиальная форма на  $\Delta^n$ , обращающаяся в нуль на  $\partial\Delta^n$ ; при  $k = n - 1$  дополнительно предполагается, что  $\int_{\partial\Delta^n} \omega^k = 0$ . Очевидно, что если  $k = 0$ , то  $\omega^k = 0$ . Поэтому будем предполагать, что  $k \geq 1$ . В таком случае можно применить лемму Пуанкаре и построить форму  $\beta^{k-1} \in A^{k-1}(\Delta^n)$ , для которой  $d\beta^{k-1} = \omega^k$ . Форма  $\beta^{k-1}$  может не обращаться в нуль на  $\partial\Delta^n$ ; это нужно исправить. Пусть  $k = 1$  и  $n \geq 2$ . Тогда  $\beta^{k-1}$  — функция, постоянная на  $\partial\Delta^n$ . Поэтому можно считать, что  $\beta^{k-1}$  обращается в нуль на  $\partial\Delta^n$ . Пусть теперь  $k \geq 2$ . Если  $k = n$ , то

$$\int_{\partial\Delta^n} \beta^{k-1} = \int_{\Delta^n} d\beta^{k-1} = \int_{\Delta^n} d\omega^k = 0.$$

Поэтому можно применить утверждение  $(B_n)$  и получить, что  $\beta^{k-1}|_{\partial\Delta^n} = d\tilde{\gamma}^{k-2}$ , где  $\tilde{\gamma}^{k-2}$  — некоторая полилинейная форма на  $\partial\Delta^n$ . Пусть  $\gamma^{k-2}$  — продолжение формы  $\tilde{\gamma}^{k-2}$  на  $\Delta^n$ . Положим  $\alpha^{k-1} = \beta^{k-1} - d\gamma^{k-2}$ . Тогда  $d\alpha^{k-1} = d\beta^{k-1} = \omega^k$  и  $\alpha^{k-1}|_{\partial\Delta^n} = \beta^{k-1}|_{\partial\Delta^n} - d\tilde{\gamma}^{k-2} = 0$ .  $\square$

Теперь мы уже можем непосредственно приступить к формулировке и доказательству *симплициальной теоремы де Рама*. Зададим отображение  $\rho: A^*(K) \rightarrow C^*(K; \mathbb{Q})$  формулой  $\langle \rho(\omega), \Delta^n \rangle = \int_{\Delta^n} \omega^n$ . Теорема Стокса показывает, что  $\rho d\omega = \delta\rho\omega$ , поэтому отображение  $\rho$  индуцирует отображение  $\rho^*$  алгебр когомологий.

**Теорема 19.1.** *Отображение  $\rho^*$  — изоморфизм алгебр.*

**Доказательство.** Сначала проверим, что  $\rho^*$  — изоморфизм векторных пространств. То, что  $\rho^*$  сохраняет умножение, мы докажем позже.

Прежде всего докажем, что  $\rho$  — эпиморфизм. Рассмотрим на симплексе  $\Delta_i^n$  форму  $\omega_i^n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Эта форма замкнута, потому что на  $n$ -мерном симплексе нет ненулевых  $(n+1)$ -форм. Проверим, что  $\omega_i^n|_{\partial\Delta_i^n} = 0$ . Для граней, заданных уравнениями  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ , это очевидно, а для грани, заданной уравнением  $x_0 = 0$ , это следует из того, что  $dx_1 + \dots + dx_n = -dx_0 = 0$ . Поэтому можно рассмотреть форму на  $n$ -мерном остове, которая совпадает с  $\omega_i^n$  на  $\Delta_i^n$  и равна нулю на всех остальных  $n$ -мерных симплексах. Согласно лемме о продолжении эту форму можно продолжить на весь симплициальный комплекс  $K$ . В результате получим форму  $\Omega_i^n \in A^n(K)$ , для которой  $\langle \rho(\Omega_i^n), \Delta_j^n \rangle = c\delta_{ij}$ , где  $c \neq 0$  — рациональное число. Из этого следует, что  $\rho$  — эпиморфизм.

Мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Кер } \rho \longrightarrow A^*(K) \xrightarrow{\rho} C^*(K; \mathbb{Q}) \longrightarrow 0.$$

Здесь  $\text{Кер } \rho$  состоит из форм  $\omega^n \in A^*(K)$ , для которых  $\int_{\Delta^n} \omega^n = 0$  для любого симплекса  $\Delta^n$  в  $K$ . Чтобы доказать, что  $\rho^*$  — изоморфизм, достаточно проверить, что  $H^*(\text{Кер } \rho) = 0$ . Иными словами, если  $\omega^n \in A^*(K)$ ,  $d\omega^n = 0$  и  $\int_{\Delta^n} \omega^n = 0$  для всех симплексов  $\Delta^n$  в  $K$ , то  $\omega^n = d\alpha^{n-1}$  для некоторой формы  $\alpha^{n-1} \in \text{Кер } \rho$  (это означает, что  $\int_{\Delta^{n-1}} \alpha^{n-1} = 0$  для любого симплекса  $\Delta^{n-1}$  в  $K$ ; при  $n = 0$  подразумевается, что  $\omega^n = 0$ ). Согласно лемме 3 для симплекса  $\Delta_i^n$  существует форма  $\beta_i^{n-1} \in A^{n-1}(\Delta_i^n)$ , для которой  $\omega^n|_{\Delta_i^n} = d\beta_i^{n-1}$  и  $\beta_i^{n-1}|_{\partial\Delta_i^n} = 0$ . Из форм  $\beta_i^{n-1}$  можно склеить форму  $\tilde{\beta}^{n-1}$  на  $n$ -мерном остове комплекса  $K$ , обращающуюся в нуль на  $(n-1)$ -мерном остове. С помощью леммы о продолжении форму  $\tilde{\beta}^{n-1}$  можно продолжить до формы  $\beta^{n-1}$  на всём  $K$ . Замкнутая форма  $\omega^n - d\beta^{n-1}$  обращается в нуль на  $n$ -мерном остове, т.е. она обращается в нуль на границе любого  $(n+1)$ -мерного симплекса. Снова применив лемму 3, по-

строим форму  $\gamma_j^{n-1} \in A^{n-1}(\Delta_j^{n+1})$ , для которой  $(\omega^n - d\beta^{n-1})|_{\Delta_j^{n+1}} = d\gamma_j^{n-1}$  и  $\gamma_j^{n-1}|_{\partial\Delta_j^{n+1}} = 0$ . Из форм  $\gamma_j^{n-1}$  можно склеить форму  $\tilde{\gamma}^{n-1}$  на  $(n+1)$ -мерном остове и продолжить её до формы  $\gamma^{n-1}$  на всём  $K$ . Замкнутая форма  $\omega^n - d(\beta^{n-1} + \gamma^{n-1})$  обращается в нуль теперь уже на  $(n+1)$ -мерном остове. Поэтому конструкцию можно повторять. В результате построим форму  $\alpha^{n-1} = \beta^{n-1} + \gamma^{n-1} + \dots$ . Эта сумма корректно определена, потому что форма, которая получается на  $k$ -м шаге, обращается в нуль на  $(n+k-2)$ -мерном остове. Форма  $\alpha^{n-1}$  обладает требуемыми свойствами, поскольку формы  $\beta^{n-1}, \gamma^{n-1}, \dots$  обращаются в нуль на  $(n-1)$ -мерном остове.

Докажем теперь, что  $\rho^*$  сохраняет умножение. Пусть  $\alpha, \beta \in Z^*(K; \mathbb{Q})$ . Напомним, что класс  $[\alpha] \cup [\beta] \in H^*(K; \mathbb{Q})$  — это образ класса  $[\alpha \otimes \beta]$  при отображении, индуцированном диагональным отображением  $d: |K| \rightarrow |K \times K|$ . Пусть  $\omega_1^n, \omega_2^m \in A^*(K)$ ,  $L$  — триангуляция  $|K \times K|$  с вершинами, которые являются произведениями вершин комплекса  $K$ . Построим форму  $\omega_1^n \times \omega_2^m \in A^{n+m}(L)$  следующим образом. Любой симплекс  $\Delta$  комплекса  $L$  лежит в произведении  $\Delta_1 \times \Delta_2$ , где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — симплексы в  $K$ . Рассмотрим канонические проекции  $p_i: \Delta_1 \times \Delta_2 \rightarrow \Delta_i$ ,  $i = 1, 2$ , и построим форму  $(p_1^* \omega_1^n) \wedge (p_2^* \omega_2^m)$  на  $\Delta_1 \times \Delta_2$ . Из ограничений таких форм на симплексы  $\Delta$  склеивается форма на  $L$ , которую мы обозначим  $\omega_1^n \times \omega_2^m$ .

Отображение  $\rho: A^*(L) \rightarrow C^*(L; \mathbb{Q})$  переводит форму  $\omega_1^n \times \omega_2^m$  в коцепь  $\rho(\omega_1^n \times \omega_2^m)$ , для которой  $\langle \rho(\omega_1^n \times \omega_2^m), \Delta_1^p \times \Delta_2^q \rangle = \int_{\Delta_1^p \times \Delta_2^q} (p_1^* \omega_1^n) \wedge (p_2^* \omega_2^m) = \delta_{np} \delta_{mq} \left( \int_{\Delta_1^n} \omega_1^n \right) \left( \int_{\Delta_2^m} \omega_2^m \right)$ ; при записи второго равенства мы применили теорему Фубини. Таким образом,  $\rho(\omega_1^n \times \omega_2^m) = \rho(\omega_1^n) \otimes \rho(\omega_2^m)$ . Кроме того, непосредственно из определения видно, что  $d^*(\omega_1^n \times \omega_2^m) = \omega_1^n \wedge \omega_2^m$ .  $\square$

## Глава VI

### Смесь

#### § 20. Полином Александера

Чтобы построить инвариант зацепления  $L \subset S^3$ , естественно рассмотреть пространство  $S^3 \setminus L$ . Гомологии этого пространства являются слишком грубым инвариантом, потому что эти группы одинаковые для всех зацеплений с одним и тем же числом компонент. Но есть более тонкий инвариант, связанный с гомологиями, а именно, полином Александера. Его можно определить несколькими способами. Один из них заключается в том, чтобы взять ориентируемую несамопересекающуюся поверхность  $F$  с границей  $L$  и построить с её помощью так называемую форму Зейферта. При таком подходе приходится доказывать, что построенный таким образом инвариант не зависит от выбора поверхности  $F$ . Другой подход позволяет этого избежать следующим образом. Построим бесконечное циклическое накрытие  $X_\infty$  над  $S^3 \setminus L$ . Существует естественный автоморфизм  $t: X_\infty \rightarrow X_\infty$ , который зависит только от  $L$ . Этот автоморфизм задаёт на  $H_1(X_\infty)$  структуру модуля над кольцом  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ . Оказывается, что эта структура модуля тесно связана с матрицей, задающей форму Зейферта (см. теорему 20.2).

##### 20.1. Форма Зейферта

Пусть  $F$  — сфера с  $g$  ручками, из которой вырезано  $n \geq 1$  дисков (предполагается, что поверхность  $F$  компактна). Тогда  $\chi(F) = 2 - 2g - n$ . Ясно также, что поверхность  $F$  гомотопически эквивалентна букету окружностей. Эйлерова характеристика букета  $k$  окружностей равна  $k - 1$ , поэтому поверхность  $F$  гомотопически эквивалентна букету  $2g + n - 1$  окружностей. Таким образом,  $H_1(F) \cong \mathbb{Z}^{2g+n-1}$ . В качестве образующих группы  $H_1(F)$  можно взять гомологические классы циклов, изображённых на рис. 46.

Предположим, что поверхность  $F$  вложена в  $S^3$ . Тогда согласно теореме двойственности Александера  $H^1(F; \mathbb{Z}) \cong H_1(S^3 \setminus F)$ . Пространство  $F$  гомотопически эквивалентно букету  $2g + n - 1$  окружностей, поэтому  $H^1(F; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g+n-1} \cong H_1(F)$ . Изоморфизм  $H_1(S^3 \setminus F) \cong H_1(F)$  несложно

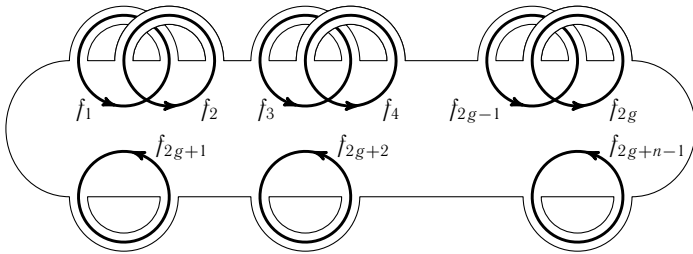


Рис. 46. Базис гомологий

доказать и непосредственно. Мы так и сделаем, чтобы получить явное описание этого изоморфизма. При этом для нас наиболее важно то, что билинейная форма  $\beta: H_1(S^3 \setminus F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$ , которая сопоставляет двум замкнутым ориентированным кривым в  $S^3 \setminus F$  и в  $F$  их коэффициент зацепления, невырождена.

Если число  $\varepsilon > 0$  достаточно мало, то замкнутая  $\varepsilon$ -окрестность  $V$  поверхности  $F$  в  $S^3$  представляет собой шар, к которому приклеено  $2g + n - 1$  ручек. При этом включение  $F \subset V$  является гомотопической эквивалентностью. Край  $\partial V$  представляет собой сферу с  $2g + n - 1$  ручками. В группе  $H_1(\partial V)$  каждой ручке соответствуют две образующих  $e_i$  и  $f'_i$ . Здесь  $e_i$  — граница малого диска, трансверсально пересекающего  $f_i$  в одной точке и не пересекающего  $f_j$  при  $j \neq i$ ;  $f'_i$  — элемент группы  $H_1(\partial V)$ , который переходит в  $f_i$  при гомоморфизме групп гомологий, индуцированном включением  $\partial V \subset V$  (при этом гомоморфизме  $e_i$  переходит в 0). Ориентацию кривой  $e_i$  выберем так, что  $\text{lk}(e_i, f_i) = 1$ . Тогда  $\text{lk}(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ . Пусть, далее,  $V'$  — замыкание дополнения  $S^3 \setminus V$ . Тогда включение  $V' \subset S^3 \setminus F$  является гомотопической эквивалентностью, поскольку включение  $\partial V \subset V \setminus F$  является гомотопической эквивалентностью. В последовательности Майера—Вьеториса

$$H_2(S^3) \longrightarrow H_1(\partial V) \longrightarrow H_1(V) \oplus H_1(V') \longrightarrow H_1(S^3)$$

крайние члены нулевые, поэтому  $H_1(\partial V) \cong H_1(V) \oplus H_1(V')$ . В частности,  $H_1(V)$  и  $H_1(V')$  — свободные абелевы группы. Ранги групп  $H_1(\partial V)$  и  $H_1(V)$  нам известны, поэтому получаем, что  $H_1(V') \cong \mathbb{Z}^{2g+n-1}$ . Образующими этой группы служат образы элементов  $e_i$  при гомоморфизме, индуцированном включением  $\partial V \subset V'$ . Итак, в группах  $H_1(V) \cong H_1(F)$  и  $H_1(V') \cong H_1(S^3 \setminus F)$  можно выбрать базисы  $f_1, \dots, f_{2g+n-1}$  и  $e_1, \dots, e_{2g+n-1}$  так, что  $\text{lk}(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ .

С помощью билинейной формы  $\beta: H_1(S^3 \setminus F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$  можно построить билинейную форму  $\alpha: H_1(F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$  следующим образом. Пусть  $v_1, v_2$  — положительно ориентированный базис в некоторой точке

поверхности  $F$ ;  $n$  — нормальный вектор, для которого базис  $v_1, v_2, n$  положительно ориентирован. Выберем достаточно малое число  $\varepsilon > 0$  и для каждой кривой  $\gamma$  на поверхности  $F$  рассмотрим кривую  $\gamma^+$ , которая получается при параллельном переносе каждой точки кривой  $\gamma$  в направлении нормали на расстояние  $\varepsilon$ ; кривую, которая получается при переносе в противоположном направлении, обозначим  $\gamma^-$ . Положим  $\alpha(x, y) = \beta(x^-, y)$ . Билинейную форму  $\alpha$  называют *формой Зейферта*.

В качестве базиса группы  $H_1(F)$  снова выберем  $f_1, \dots, f_{2g+n-1}$ . В этом базисе форме Зейферта соответствует *матрица Зейферта*  $A = (a_{ij})$ , где  $a_{ij} = \alpha(f_i, f_j) = \text{lk}(f_i^-, f_j) = \text{lk}(f_i, f_j^+)$ . Пусть  $e_1, \dots, e_{2g+n-1}$  — базис группы  $H_1(S^3 \setminus F)$ , двойственный базису  $f_1, \dots, f_{2g+n-1}$  относительно формы  $\beta$ . Тогда  $f_i^- = \sum_j a_{ij} e_j$  и  $f_j^+ = \sum_i a_{ij} e_i$ .

### 20.2. Бесконечное циклическое накрытие

Пусть  $F$  — компактная ориентируемая поверхность с краем  $\partial F = L$ , вложенная в  $S^3$ . Построим пространство  $X_\infty$ , которое является бесконечнолистным накрытием пространства  $S^3 \setminus L$ . Для этого разрежем сферу  $S^3$  по  $F$ . Под разрезанием здесь подразумевается следующее. Мы берём пространство  $S^3 \setminus F$ , добавляем к нему  $L$  и для каждой точки  $a \in F \setminus L$  добавляем точки  $a^+$  и  $a^-$ , которые являются пределами точек, сходящихся к  $a$  и локально лежащих по одну сторону от  $F$ . В результате получим трёхмерное многообразие  $M^3$  с краем  $F^+ \cup F^-$ ; каждой точке  $a \in F \setminus L$  соответствуют две точки  $a^+ \in F^+$  и  $a^- \in F^-$  (возможность выбрать знаки  $+$  и  $-$  для всех точек согласованным образом следует из ориентируемости поверхности  $F$ ). Возьмём счётное множество экземпляров  $M_i^3$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) таких многообразий и отождествим  $F_{i-1}^+$  и  $F_i^-$  (отождествляются точки  $a_{i-1}^+$  и  $a_i^-$ , соответствующие одной и той же точке  $a$ ). Схематично эта конструкция изображена на рис. 47. Полученное пространство  $X_\infty$  покрывает  $S^3 \setminus L$ . Отображения  $M_i^3 \rightarrow M_{i+1}^3$ , при которых каждая точка многообразия  $M_i^3$  переходит в соответствующую ей точку многообразия  $M_{i+1}^3 \approx M_i^3$ , индуцируют автоморфизм  $t: X_\infty \rightarrow X_\infty$  этого накрытия. Группа автоморфизмов

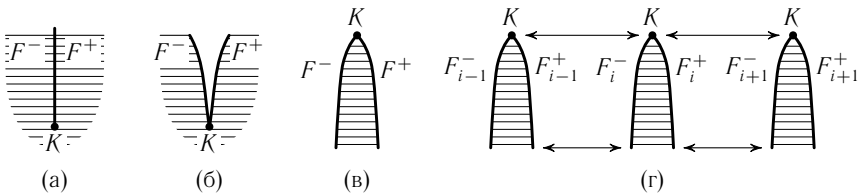


Рис. 47. Пространство  $X_\infty$

накрытия порождена элементом  $t$  и изоморфна  $\mathbb{Z}$ . Ясно также, что группа автоморфизмов действует на накрытии транзитивно.

Мы будем предполагать, что поверхность  $F$  ориентирована и точка  $a^+$  соответствует положительному направлению нормали, а точка  $a^-$  — отрицательному.

Накрытие  $X_\infty \rightarrow S^3 \setminus L$  мы построили с помощью поверхности  $F$ . Оказывается, эта конструкция не зависит от выбора поверхности  $F$ ; она зависит только от ориентированного зацепления  $L$  (края поверхности  $F$ ). Действительно, накрытие над  $S^3 \setminus L$  однозначно задаётся образом фундаментальной группы накрываемого пространства в  $\pi_1(S^3 \setminus L)$ . Покажем, что этот образ состоит из тех петель  $\gamma$ , для которых коэффициент зацепления с  $L$  равен 0 (здесь подразумевается, что если  $L$  состоит из связных компонент  $L_1, \dots, L_n$ , то  $\text{lk}(\gamma, L) = \sum \text{lk}(\gamma, L_i)$ ). Ясно, что образ состоит из тех петель  $\gamma$ , поднятия которых в  $X_\infty$  замкнуты. Иными словами, если мы выйдем из некоторой точки  $M_0^3$  и будем идти вдоль поднятия пути  $\gamma$ , то в конце концов мы должны вернуться в  $M_0^3$ . Переходы из  $M_i^3$  в  $M_{i\pm 1}^3$  соответствуют точкам пересечения кривой  $\gamma$  с поверхностью  $F$ ; знак здесь тот же самый, что и в определении индекса пересечения. Мы приходим к следующему условию: индекс пересечения кривой  $\gamma$  с поверхностью  $F$  равен 0. Согласно одному из определений коэффициента зацепления (см. [ПЗ]) это эквивалентно тому, что коэффициент зацепления кривых  $\gamma$  и  $L = \partial F = L$  равен 0.

Аutomорфизм накрытия  $t: X_\infty \rightarrow X_\infty$  тоже не зависит от выбора поверхности  $F$ . Он задаётся теми петлями в  $S^3 \setminus L$ , для которых коэффициент зацепления с  $L$  равен 1 (начало поднятия петли  $\gamma$  отображается в конец этого поднятия).

Для каждого ориентированного зацепления  $L \subset S^3$  существует связная ориентированная поверхность  $F$  с краем  $L$ , вложенная в  $S^3$  (см., например, [П1]). Эту поверхность называют *поверхностью Зейферта* зацепления  $L$ . С помощью поверхности  $F$  можно построить накрытие  $X_\infty \rightarrow S^3 \setminus L$  и автоморфизм  $t: X_\infty \rightarrow X_\infty$  этого накрытия, которые зависят только от  $L$ . Итак, зацеплению  $L$  можно сопоставить группу  $H_1(X_\infty)$ , на которой задан автоморфизм  $t_*$ . Это означает, что  $H_1(X_\infty)$  — модуль над кольцом  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ , элементами которого служат многочлены от  $t^{-1}$  и  $t$  с целыми коэффициентами. Чтобы применить эту алгебраическую структуру, нам понадобится матрица, соответствующая заданию модуля образующими и соотношениями (матрица представления модуля). Поэтому мы сейчас дадим определение этой матрицы и докажем некоторые её свойства.

Пусть  $M$  — модуль над коммутативным кольцом  $R$  с единицей; предполагается, что  $1m = t$  для всех  $m \in M$ . Модуль  $M$  называют *свободным*, если существуют элементы  $m_1, \dots, m_n \in M$ , которые обладают следующим свойством: любой элемент  $m \in M$  однозначно представляется в виде



$m = r_1 m_1 + \dots + r_n m_n$ , где  $r_i \in R$ ; элементы  $m_1, \dots, m_n$  называют при этом *базисом* модуля  $M$ . Модуль  $M$  называют *конечно порождённым*, если существует точная последовательность

$$F \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0, \quad (1)$$

где  $E$  и  $F$  — свободные модули (над тем же кольцом  $R$ ). Выберем в  $E$  и  $F$  базисы  $e_1, \dots, e_m$  и  $f_1, \dots, f_n$ . Пусть  $A = (a_{ij})$  — матрица отображения  $\alpha$  относительно этих базисов, т.е.  $\alpha(f_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} e_j$ . Матрицу  $A$  называют *матрицей представления* модуля  $M$ . Каждая из  $m$  строк матрицы  $A$  соответствует образующей модуля  $M$ , а каждый из  $n$  столбцов — соотношению между образующими. Для данного модуля  $M$  точная последовательность (1) не единственна; кроме того, базисы в  $E$  и  $F$  можно выбрать разными способами.

**Теорема 20.1.** Пусть  $A$  и  $A'$  — две матрицы представления одного и того же модуля  $M$ . Тогда они получаются друг из друга последовательностью преобразований следующего вида (и обратных к ним):

- 1) перестановка строк или столбцов;
- 2) замена матрицы  $A$  на матрицу  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- 3) добавление к матрице  $A$  столбца, состоящего из нулей;
- 4) прибавление к строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на некоторое число.

**Доказательство.** Для точных последовательностей, соответствующих матрицам  $A$  и  $A'$ , можно построить коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} F & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\varphi} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow \text{id} & & \\ F' & \xrightarrow{\alpha'} & E' & \xrightarrow{\varphi'} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Действительно, гомоморфизмы  $g$  и  $f$  можно задать на базисе, а потом продолжить по линейности. Элемент  $g(e_j) \in E'$  определим следующим образом. Отображение  $\varphi'$  — эпиморфизм, поэтому существует элемент  $e'_j \in E'$ , для которого  $\varphi'(e'_j) = \varphi(e_j)$ . Положим  $g(e_j) = e'_j$ ; тогда  $\varphi' g(e_j) = \varphi'(e'_j) = \varphi(e_j)$ . Элемент  $f(f_i) \in F'$  определим следующим образом. Равенство  $\varphi' g \alpha(f_i) = \varphi \alpha(f_i) = 0$  показывает, что существует элемент  $f'_i \in F'$ , для которого  $\alpha'(f'_i) = g \alpha(f_i)$ . Положим  $f(f_i) = f'_i$ ; тогда  $\alpha' f(f_i) = \alpha'(f'_i) = g \alpha(f_i)$ .

Пусть  $X$  и  $Y$  — матрицы отображений  $f$  и  $g$  относительно тех же самых базисов, относительно которых записаны матрицы  $A$  и  $A'$ . Равенство  $g \alpha = \alpha' f$  означает, что  $XA = A'Y$ . Аналогично строятся отображения  $f'$  и  $g'$  с матрицами  $X'$  и  $Y'$ , для которых  $X'A' = AY'$ .

Из равенств  $\varphi'g = \varphi$  и  $\varphi g' = \varphi'$  следует, что  $\varphi g'g = \varphi'g = \varphi$ . Значит,  $\text{Im}(g'g - \text{id}_E) \subset \text{Ker } \varphi = \text{Im } \alpha$ . Пользуясь этим свойством и тем, что модуль  $E$  свободный, можно построить гомоморфизм  $h: E \rightarrow F$ , для которого  $\alpha h = g'g - \text{id}_E$ . Для матриц это равенство принимает вид  $AZ = X'X - I$ , где  $Z$  — матрица отображения  $h$ .

Будем использовать обозначение  $P \sim Q$ , если матрица  $Q$  получена из матрицы  $P$  последовательностью преобразований 1)–4) или обратных к ним. Ясно, что

$$A \stackrel{2)}{\sim} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \stackrel{4)}{\sim} \begin{pmatrix} A & X' \\ 0 & I \end{pmatrix} \stackrel{3), 4)}{\sim} \begin{pmatrix} A & X' & X'A' \\ 0 & I & A' \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что  $X'A' = AY'$ , получаем

$$\begin{pmatrix} A & X' & X'A' \\ 0 & I & A' \end{pmatrix} \stackrel{4)}{\sim} \begin{pmatrix} A & X' & 0 \\ 0 & I & A' \end{pmatrix} \stackrel{3), 4)}{\sim} \begin{pmatrix} A & X' & 0 & XX' \\ 0 & I & A' & X \end{pmatrix}.$$

Далее, используя равенство  $XX' = AZ + I$ , получаем

$$\begin{pmatrix} A & X' & 0 & XX' \\ 0 & I & A' & X \end{pmatrix} \stackrel{4)}{\sim} \begin{pmatrix} A & X' & 0 & I \\ 0 & I & A' & X \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$A \sim \begin{pmatrix} A & X' & 0 & I \\ 0 & I & A' & X \end{pmatrix} \stackrel{1)}{\sim} \begin{pmatrix} A' & X & 0 & I \\ 0 & I & A & X' \end{pmatrix} \sim A',$$

что и требовалось.  $\square$

Пусть  $A$  — матрица представления модуля  $M$  над кольцом  $R$ . Если  $A$  содержит  $m$  строк и  $n$  столбцов, то идеал кольца  $R$ , порождённый всеми минорами порядка  $m - r + 1$  матрицы  $A$ , называют  $r$ -м элементарным идеалом модуля  $M$  и обозначают  $\mathcal{E}_r$ . Если воспользоваться стандартными свойствами определителей, то из теоремы 20.1 легко получить, что идеал  $\mathcal{E}_r$  не зависит от выбора матрицы  $A$ . Условимся считать, что  $\mathcal{E}_r = R$  при  $r > m$  и  $\mathcal{E}_r = 0$  при  $r \leq 0$ . Легко проверить, что  $\mathcal{E}_{r-1} \subset \mathcal{E}_r$ .

Отметим, что если  $m = n$ , то  $\mathcal{E}_1$  — идеал в кольце  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ , порождённый многочленом  $\det A$ .

**Задача 20.1.** Пусть  $G$  — конечная абелева группа. Рассмотрим её как  $\mathbb{Z}$ -модуль. Докажите, что для этого модуля идеал  $\mathcal{E}_1$  порождён числом  $|G|$ , где  $|G|$  — порядок группы  $G$ .

### 20.3. Основная теорема

Основная теорема, связывающая матрицу Зейферта  $A$  со структурой модуля  $H_1(X_\infty)$  над кольцом  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ , заключается в следующем.

**Теорема 20.2.** Матрица  $tA - A^T$  является матрицей представления модуля  $H_1(X_\infty)$  над кольцом  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ .

**Доказательство.** Воспользуемся обозначениями из п. 20.2. Представим пространство  $X_\infty$  в виде объединения подпространств  $M' = \bigcup M_{2i+1}^3$  и  $M'' = \bigcup M_{2i}^3$ . Пересечение этих подпространств представляет собой счётный набор поверхностей Зейферта. В последовательности Майера—Вьеториса

$$\dots \longrightarrow H_i(M' \cap M'') \longrightarrow H_i(M') \oplus H_i(M'') \longrightarrow H_i(X_\infty) \longrightarrow \dots$$

все группы являются модулями над кольцом  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ . Отдельно на группах  $H_i(M')$  и  $H_i(M'')$  действие  $t$  не определено;  $t$  переводит эти группы друг в друга, поэтому на  $H_i(M') \oplus H_i(M'')$  действие  $t$  определено. Отображения в последовательности Майера—Вьеториса являются гомоморфизмами модулей.

Покажем, что участок последовательности Майера—Вьеториса

$$H_1(M' \cap M'') \xrightarrow{j_*} H_1(M') \oplus H_1(M'') \xrightarrow{i_*} H_1(X_\infty)$$

задаёт представление модуля  $H_1(X_\infty)$  образующими и соотношениями. Прежде всего проверим, что  $i_*$  — эпиморфизм. Это эквивалентно тому, что  $\text{Ker } \partial_* = H_1(X_\infty)$ , т. е.  $\text{Im } \partial_* = 0$ . Последнее равенство эквивалентно тому, что отображение  $j_*: H_0(M' \cap M'') \rightarrow H_0(M') \oplus H_0(M'')$  — мономорфизм. Группы  $H_0(M' \cap M'')$  и  $H_0(M') \oplus H_0(M'')$  являются прямыми суммами групп  $H_0(M_k^3 \cap M_{k+1}^3)$  и  $H_0(M_k^3)$ , каждая из которых изоморфна  $\mathbb{Z}$ , поскольку поверхность Зейферта  $F$  связна. Поэтому модули  $H_0(M' \cap M'')$  и  $H_0(M') \oplus H_0(M'')$  изоморфны  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ ; элемент  $t^k$  соответствует элементам  $1 \in H_0(M_k^3 \cap M_{k+1}^3)$  и  $1 \in H_0(M_k^3)$ . При таком отождествлении отображение  $j_*$  переводит  $t^k$  в  $t^k + t^{k+1}$ . В частности,  $j_*(1) = 1 + t \neq 0$ , поэтому  $j_*$  — мономорфизм.

Выберем в  $H_1(F) = H_1(M_k^3 \cap M_{k+1}^3)$  базис  $\{f_i\}$ , а в  $H_1(S^3 \setminus F) = H_1(M_k^3)$  выберем базис  $\{e_i\}$ , двойственный базису  $\{f_i\}$  относительно формы  $\beta$ . Модули  $H_1(M' \cap M'')$  и  $H_1(M') \oplus H_0(M'')$  свободные. Их базисами служат элементы  $1 \otimes f_i$  и  $1 \otimes e_i$ . При этом элементам  $f_i \in H_1(M_k^3 \cap M_{k+1}^3)$  и  $e_i \in H_1(M_k^3)$  соответствуют элементы  $t^k \otimes f_i$  и  $t^k \otimes e_i$ . Легко проверить, что  $j_*(1 \otimes f_i) = t \otimes f_i^+ - 1 \otimes f_i^-$ . Действительно, рассмотрим элемент  $f_i \in H_1(M_0^3 \cap M_1^3)$ . При ограничении  $f_i$  на  $M_0^3 \subset M''$  получается  $f_i^-$  (кривая сдвигается в направлении, противоположном направлению нормали), а при ограничении  $f_i$  на  $M_1^3 \subset M'$  получается  $f_i^+$  (кривая сдвигается в направлении нормали). По определению  $j_* = (j', -j'')$ ; при этом  $j'(1 \otimes f_i) \in H_1(M_1^3) = t \otimes H_1(M_0^3)$  и  $j''(1 \otimes f_i) \in H_1(M_0^3)$ .

Воспользовавшись выражениями  $f_i^+$  и  $f_i^-$  через матрицу Зейферта  $A = (a_{ij})$ , получаем

$$j_*(1 \otimes f_i) = \sum_j a_{ji} t \otimes e_j - \sum_j a_{ij} \otimes e_j.$$

Таким образом, матрица отображения  $j_*$  в выбранных базисах равна  $tA - A^T$ . Но матрица отображения  $j_*$  — это и есть матрица представления модуля  $H_1(X_\infty)$ .  $\square$

Элементарный идеал  $\mathcal{E}_r$  модуля  $H_1(X_\infty)$  над кольцом  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$  называют  $r$ -м идеалом Александера ориентированного зацепления  $L$ . Образующую наименьшего главного идеала, содержащего  $r$ -й идеал Александера, называют  $r$ -м полиномом Александера ориентированного зацепления  $L$ . Первый полином Александера называют просто полиномом Александера; его обозначают  $\Delta_L(t)$ .

Образующая главного идеала определена с точностью до умножения на единицу (обратимый элемент) кольца. В кольце  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$  единицами являются элементы  $\pm t^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Поэтому  $r$ -й полином Александера определён с точностью до умножения на  $\pm t^n$ .

Согласно теореме 20.2 модуль  $H_1(X_\infty)$  имеет квадратную матрицу представления, а именно  $tA - A^T$ . Поэтому первый элементарный идеал этого модуля главный, а значит,  $\Delta_L(t) \doteq \det(tA - A^T)$ ; символ  $\doteq$  здесь и далее означает равенство с точностью до умножения на  $\pm t^n$ .

### 20.4. Свойства полинома Александера

Прежде всего заметим, что если  $K$  — тривиальный узел, то  $\Delta_K(t) \doteq 1$ . Действительно, в этом случае  $X_\infty = D^2 \times \mathbb{R}$ , поэтому  $H_1(X_\infty) = 0$ .

Вычисление полинома Александера сводится к вычислению матрицы Зейферта  $A = (a_{ij})$ , где  $a_{ij} = \text{lk}(f_i, f_j^+)$ . Вычислим, например, матрицу Зейферта для трилистника (рис. 48). Несложно убедиться, что кривые  $f_1^+$  и  $f_2^+$  расположены так, как показано на рис. 49. Поэтому  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $tA - A^T = \begin{pmatrix} t-1 & -t \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}$ . Значит, полином Александера для трилистника равен  $t^2 - t + 1$ .

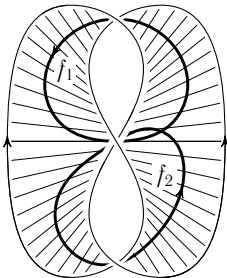


Рис. 48. Трилистник

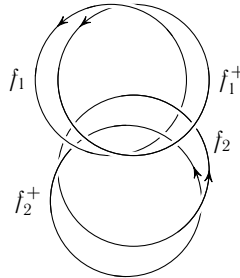


Рис. 49. Расположение кривых  $f_i, f_i^+$

Отметим, что при вычислении матрицы Зейферта очень удобно пользоваться «плоской» поверхностью Зейферта. Для трилистника такая поверхность Зейферта изображена на рис. 50. Поверхность Зейферта такого вида есть у любого зацепления. Чтобы это доказать, обратимся снова к рис. 46. Деформируем поверхность Зейферта так, чтобы ручки, приклеенные к диску, стали длинными и узкими. Если не обращать внимания на то, что ручки могут быть перекручены (рис. 51, а), то требуемое расположение поверхности Зейферта строится теперь очевидным образом. Но из ориентированности поверхности следует, что число перекручиваний каждой ручки чётно.

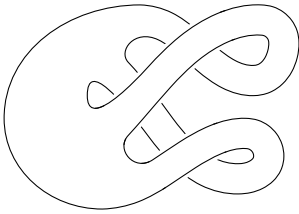


Рис. 50. Плоская поверхность Зейферта

Два перекручивания в противоположных направлениях взаимно уничтожаются, а два перекручивания в одном направлении заменяются на петлю (рис. 51, б).

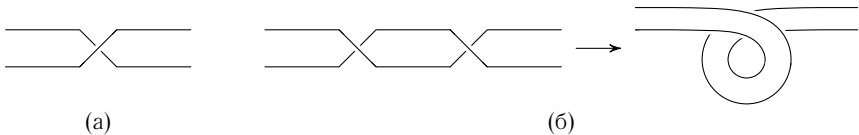


Рис. 51. Перекручивания ручки

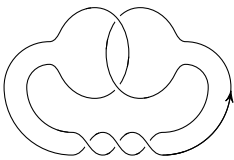


Рис. 52. Диаграмма узла к задаче 20.2

**Задача 20.2.** Вычислите полином Александера узла, изображённого на рис. 52.

**Задача 20.3.** а) Пусть  $p$ ,  $q$  и  $r$  — нечётные числа. Тогда можно построить узел  $P(p, q, r)$ , как показано на рис. 53 (числа  $p$ ,  $q$ ,  $r$  могут быть отрицательными; для каждого отрицательного числа изменяются типы перекрёстка). Вычислите полином Александера узла  $P(p, q, r)$ .

б) Докажите, что полином Александера узла  $P(-3, 5, 7)$  равен  $t$ , т. е. у этого узла полином Александера такой же, как у тривиального узла. (Этот узел называют *узлом Зейферта*.)

Докажем теперь некоторые общие свойства полинома Александера. Из свойств определителя следует, что для любого ориентированного зацепления  $L$  имеет место соотношение  $\Delta_L(t) \doteq \Delta_L(t^{-1})$ . Действительно,  $\Delta_L(t) \doteq \det(tA - A^T) = (-t)^n \det(t^{-1}A - A^T) \doteq \Delta_L(t^{-1})$ .

**Теорема 20.3.** а) Пусть  $K$  — узел. Тогда  $\Delta_K(1) \doteq 1$ .

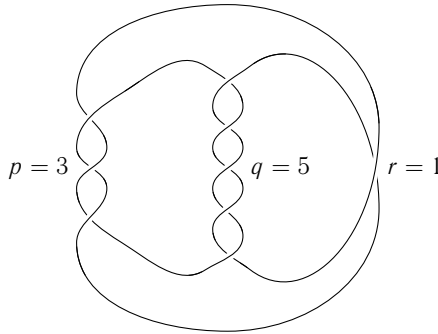


Рис. 53. Диаграмма узла к задаче 20.3

б) Пусть  $L$  — зацепление, состоящее по крайней мере из двух связных компонент. Тогда  $\Delta_L(1) \doteq 0$ .

Доказательство. Пусть  $L$  — ориентированный узел или зацепление. Выберем на его поверхности Зейферта стандартные образующие циклы  $f_1, \dots, f_{2g+n-1}$  (узел характеризуется тем, что для него  $n = 1$ ). По определению  $\Delta_L(1) \doteq \det B$ , где  $B = A - A^T$ , т.е.  $b_{ij} = a_{ij} - a_{ji} = \text{lk}(f_i, f_j^+) - \text{lk}(f_j, f_i^+) = \text{lk}(f_i^-, f_j) - \text{lk}(f_i^+, f_j)$ . Чтобы вычислить эту разность коэффициентов зацепления, натянем на кривые  $f_i^-$  и  $f_i^+$  полосу  $F_i$  и ориентируем её так, чтобы её краем служил цикл  $f_i^- f_i^+$ . Тогда рассматриваемая разность коэффициентов зацепления равна индексу пересечения  $\langle\langle F_i, f_j \rangle\rangle = \pm \langle\langle f_i, f_j \rangle\rangle$ , где последний индекс пересечения вычисляется на поверхности Зейферта. Несложно проверить, что при наших соглашениях о знаках в этом выражении получается знак минус.

При перестановке двух 1-мерных циклов их индекс пересечения меняет знак. Поэтому матрица  $B$  состоит из  $g$  диагональных блоков  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  и ещё  $n - 1$  нулей на диагонали. Если  $n = 1$ , то  $\det B = 1$ , а если  $n > 1$ , то  $\det B = 0$ . □

### Полином Александера от многих переменных

При построении полинома Александера  $\Delta_L(t)$  мы использовали бесконечное циклическое накрытие  $X_\infty \rightarrow S^3 \setminus L$ . Оно строится по подгруппе в  $\pi_1(S^3 \setminus L)$ , состоящей из петель, для которых коэффициент зацепления с  $L$  равен 0. Для узлов это будет подгруппа  $[\pi_1, \pi_1]$  — коммутант. Для зацеплений тоже можно рассмотреть накрытие, построенное по подгруппе  $[\pi_1, \pi_1]$ . Эта подгруппа нормальная, поэтому мы получим регулярное накрытие  $X \rightarrow S^3 \setminus L$  с группой автоморфизмов  $\pi_1/[\pi_1, \pi_1] \cong H_1(S^3 \setminus L) \cong \mathbb{Z}^r$ ,

где  $r$  — количество компонент зацепления  $L$ . Группа автоморфизмов этого накрытия — свободная абелева группа с образующими  $t_1, \dots, t_r$ , которые соответствуют маленьким окружностям, надетым на компоненты зацепления  $L$ . Поэтому теперь  $H_1(X; \mathbb{Z})$  — модуль над кольцом  $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}]$ , и мы можем использовать этот модуль для построения полинома Александра  $\Delta_L(t_1, \dots, t_r)$  от переменных  $t_1, \dots, t_r$ .

## 20.5. Полином Конвея

Полином Александра определён с точностью до умножения на  $\pm t^r$ , т. е. фактически это не полином, а целый класс полиномов. Полином Конвея — это (с точностью до замены переменных) однозначно определённый полином, который выбирается в каждом классе полиномов Александра. Полиномы Конвея разных зацеплений можно складывать, в отличие от полиномов Александра (суммы разных представителей двух полиномов Александра могут принадлежать разным полиномам Александра). Более того, между полиномами Конвея зацеплений, определённым образом друг с другом связанных, есть замечательное соотношение, позволяющее вычислить полином Конвея любого зацепления исходя непосредственно из диаграммы зацепления.

Для проверки корректности определения Конвея нам понадобится одно вспомогательное утверждение о взаимосвязях различных поверхностей Зейферта одного и того же ориентированного зацепления  $L$ . Это же утверждение понадобится нам впоследствии для проверки корректности определения инварианта Арфа зацепления.

Пусть  $F$  — поверхность Зейферта ориентированного зацепления  $L \subset S^3$ . Предположим, что цилиндр  $I \times D^2$  вложен в  $S^3$  так, что его пересечение с  $F$  состоит в точности из оснований цилиндра, т. е.  $F \cap (I \times D^2) = \partial I \times D^2$ ; кроме того, в малой окрестности оснований цилиндр лежит по одну сторону от поверхности  $F$ . Вырежем из  $F$  основания цилиндра и вместо них вклеим  $I \times \partial D^2$ . В результате снова получим некоторую поверхность Зейферта  $F'$  зацепления  $L$ . Будем говорить, что поверхность Зейферта  $F'$  получена из поверхности Зейферта  $F$  *приклеиванием ручки*.

**Теорема 20.4.** *Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — поверхности Зейферта ориентированного зацепления  $L$ . Тогда существует последовательность поверхностей Зейферта  $S_1, \dots, S_k$ , где  $S_1 = F_1$  и  $S_k = F_2$ , причём для любого  $i = 1, \dots, k-1$  одна из поверхностей  $S_i$  и  $S_{i+1}$  получена из другой либо приклеиванием ручки, либо изотопией (неподвижной на  $L$ ).*

**Доказательство.** После малого шевеления (неподвижного на  $L$ ) можно считать, что поверхности  $F_1$  и  $F_2$  трансверсально пересекаются по конечному числу замкнутых несамопересекающихся кривых (пересечение

по  $L$  тоже трансверсальное). Пусть  $M^3$  — одно из замыканий областей, на которые поверхности  $F_1$  и  $F_2$  разбивают  $S^3$ . Предположим, что  $M^3$  лежит по одну сторону от каждой из поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ , т. е. если разные части  $M^3$  примыкают к  $F_1$  (или к  $F_2$ ), то все они лежат по одну сторону от  $F_1$  (или от  $F_2$ ); ниже мы покажем, что такое  $M^3$  всегда можно выбрать. Пусть  $\partial M^3 = \partial_1 M^3 \cup \partial_2 M^3$ , где  $\partial_i M^3 = \partial M^3 \cap F_i$ . Любую триангуляцию сферы  $S^3$ , для которой  $F_1$  и  $F_2$  — подкомплексы, можно ограничить на  $M^3$ . Пусть  $A^3$  — объединение всех симплексов второго барицентрического подразделения этой триангуляции многообразия  $M^3$ , которые пересекаются с  $\partial_1 M^3$  или с одномерными симплексами исходной триангуляции. Неформально можно сказать, что  $A^3$  — объединение  $\varepsilon$ -окрестности (воротника) края  $\partial_1 M^3$  в  $M^3$  и  $\varepsilon$ -окрестности одномерного остова исходной триангуляции. Заменяем  $F_1$  на  $F'_1$ , вырезав  $\partial_1 M^3$  и вклеив вместо него замыкание многообразия  $\partial A^3 \setminus \partial_1 M^3$ . Эта операция сводится к последовательным изотопиям и приклеиваниям ручек. Действительно, мы имеем дело с операцией следующего вида. К поверхности приклеено несколько рёбер графа, причём все они приклеены с одной стороны поверхности. Затем рассматривается  $\varepsilon$ -окрестность графа и берётся её граница. К исходной поверхности добавляется та часть этой границы, которая лежит по ту же сторону от поверхности, что и граф; участки исходной поверхности, лежащие в  $\varepsilon$ -окрестности графа, удаляются. Такая операция сводится к последовательным изотопиям и приклеиваниям ручек.

Поверхность  $F_2$  мы изменим следующим образом. Пусть  $B^3$  — замыкание множества  $M^3 \setminus A^3$ . Другими словами,  $B^3$  — объединение конусов с вершинами в центрах трёхмерных симплексов исходной триангуляции, основаниями которых служат звёзды (во втором барицентрическом подразделении) центров двумерных граней этих симплексов, не лежащих в  $\partial_1 M^3$ . Заменяем  $F_2$  на  $F'_2$ , вырезав  $B^3 \cap F_2$  и вклеив вместо него замыкание множества  $\partial B^3 \setminus (B^3 \cap F_2)$ . Это снова операция того же самого вида. Действительно, пусть некоторый трёхмерный симплекс имеет  $n$  двумерных граней, не лежащих в  $\partial_1 M^3$ . Тогда для этого симплекса вклеивается граница  $\varepsilon$ -окрестности графа, состоящего из  $n$  рёбер, выходящих из одной вершины.

Теперь  $F'_1$  и  $F'_2$  совпадают внутри  $M^3$  и  $F'_1 \cap F'_2 = (F_1 \cap F_2) \cup (\partial A^3 \setminus \partial_1 M^3)$ . Но, сдвигая  $F_1$  по воротнику  $\partial_1 M^3$ , мы могли нарушить необходимое свойство  $\partial F_1 = L$ . Это нужно исправить. Каждая связная компонента множества  $F_1 \cap F_2$  либо целиком лежит на границе многообразия  $M^3$ , либо не пересекается с ним. Если какая-то компонента  $K$  зацепления  $L$  лежит на границе многообразия  $M^3$ , то мы изменим  $F'_1$ , посредством изотопии, сдвигая  $\partial F'_1$  назад по воротнику до тех пор, пока  $\partial F'_1$  не совпадёт с  $K$ .

Эти преобразования поверхностей Зейферта  $F_1$  и  $F_2$  каждый раз уменьшают число областей, на которые поверхности  $F_1$  и  $F_2$  разбивают сферу  $S^3$ .



Поэтому мы можем добиться, чтобы  $F_1$  и  $F_2$  не разбивали  $S^3$ , т. е. совпали.

Остаётся доказать, что всегда можно выбрать многообразие  $M^3$  так, чтобы оно лежало по одну сторону как относительно  $F_1$ , так и относительно  $F_2$ . Для этого воспользуемся бесконечным циклическим накрытием  $p: X_\infty \rightarrow S^3 \setminus L$ , построенным в п. 20.2. Пространство  $X_\infty$  можно строить как с помощью поверхности  $F_1$ , так и с помощью поверхности  $F_2$ . Поэтому в  $X_\infty$  есть два семейства поверхностей  $t^i \tilde{F}_1$  и  $t^j \tilde{F}_2$  (края трёхмерных многообразий, из которых двумя способами склеивается  $X_\infty$ ). Нас интересует случай, когда  $F_1$  и  $F_2$  пересекаются не только по  $L$ . Основная идея состоит в том, чтобы рассмотреть максимальное целое число  $n$ , для которого  $\tilde{F}_2 \cap t^n \tilde{F}_1 \neq \emptyset$  (рис. 54). Чтобы это можно было сделать, будем считать,

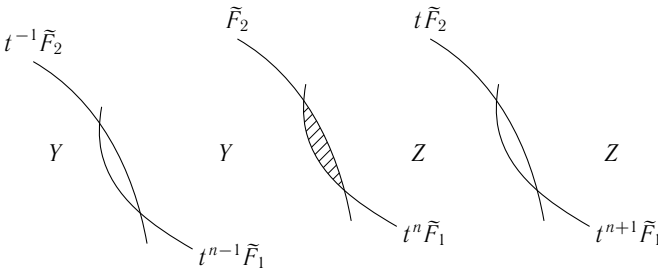


Рис. 54. Выбор многообразия  $M^3$

что из  $S^3$  вырезано не множество  $L$ , а его открытая  $\varepsilon$ -окрестность, так что в результате мы получаем компактное пространство. Теперь мы имеем дело с компактными множествами, поэтому требуемое число  $n$  действительно существует.

Поверхность  $\tilde{F}_2$  разрезает  $X_\infty$  на две части; пусть  $Y$  — та из них, в которой лежат поверхности  $t^r \tilde{F}_2$  при  $r < 0$ . Поверхность  $t^n \tilde{F}_1$  тоже разрезает  $X_\infty$ ; пусть  $Z$  — та часть, в которой лежат поверхности  $t^{n+r} \tilde{F}_1$  при  $r > 0$ . Нетрудно видеть, что проекция  $p(Y \cap Z)$  — требуемое многообразие.  $\square$

Две квадратные матрицы называют  $S$ -эквивалентными, если одну из них можно получить из другой с помощью нескольких операций следующих двух типов:

- 1)  $A \mapsto PAP^T$ , где  $P$  — целочисленная матрица с определителем  $\pm 1$ ;
- 2)  $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  или  $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , где  $\alpha$  — столбец,  $\beta$  — строка.

**Теорема 20.5.** *Любые две матрицы Зейферта одного и того же ориентированного зацепления  $S$ -эквивалентны.*

**Доказательство.** Если в  $H_1(F; \mathbb{Z})$  заменить базис, то для матрицы Зейферта получим преобразование 1). Поэтому согласно теореме 20.4 остаётся посмотреть, что происходит с матрицей Зейферта при приклеивании ручки. Можно считать, что при этом к базису в  $H_1(F; \mathbb{Z})$  добавляются образующие  $f_{n+1}$  и  $f_{n+2}$ , изображённые на рис. 55. Если

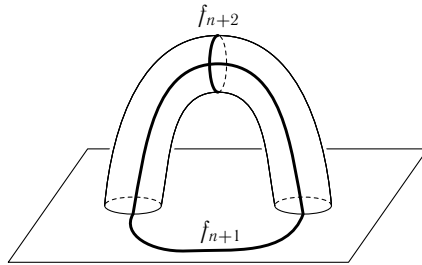


Рис. 55. Дополнительные образующие

$i \leq n$ , то  $\text{lk}(f_{n+2}^\pm, f_i) = 0$ . Позабывшись о выборе ориентаций кривых  $f_{n+1}$  и  $f_{n+2}$ , можно считать, что либо  $\text{lk}(f_{n+1}^+, f_{n+2}) = 0$  и  $\text{lk}(f_{n+1}^-, f_{n+2}) = 1$ , либо  $\text{lk}(f_{n+1}^+, f_{n+2}) = 1$  и  $\text{lk}(f_{n+1}^-, f_{n+2}) = 0$ . В первом случае новая матрица

Зейферта имеет вид  $\begin{pmatrix} A & \alpha & 0 \\ * & * & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Преобразованиями типа 1) эта матрица

приводится к виду  $\begin{pmatrix} A & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Аналогично во втором случае матрица

приводится к виду  $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . □

Введём формальную переменную  $t^{1/2}$ , для которой  $(t^{1/2})^2 = t$ , и определим *полином Александера в нормализации Конвея*  $\Delta_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}]$  следующим образом:  $\Delta_L(t) = \det(t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T)$ , где  $A$  — матрица Зейферта зацепления  $L$ . Если  $A$  — матрица порядка  $r$ , то  $\Delta_L(t) = t^{-r/2} \det(tA - A^T)$ , поэтому с точностью до умножения на единицу кольца  $\mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}]$  полином Александера в нормализации Конвея совпадает с полиномом Александера.

**Теорема 20.6.** *Для ориентированного зацепления  $L$  полином Александера в нормализации Конвея определён однозначно: он не зависит от выбора матрицы Зейферта  $A$ .*

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} \det(t^{1/2}P^TAP - t^{-1/2}P^TA^TP) &= \det(P^T(t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T)P) = \\ &= (\det P)^2 \det(t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T). \end{aligned}$$

Пусть теперь  $B = \begin{pmatrix} A & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$t^{1/2}B - t^{-1/2}B^T = \begin{pmatrix} t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T & t^{1/2}\alpha & 0 \\ -t^{-1/2}\alpha^T & 0 & t^{1/2} \\ 0 & -t^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножая последнюю строку этой матрицы на подходящие элементы кольца  $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$  и прибавляя результат к остальным строкам, можно уничтожить столбец  $t^{1/2}\alpha$ . Аналогично уничтожается строка  $-t^{-1/2}\alpha^T$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \det(t^{1/2}B - t^{-1/2}B^T) &= \det(t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T) \det \begin{pmatrix} 0 & t^{1/2} \\ -t^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \det(t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T), \end{aligned}$$

поскольку  $\det \begin{pmatrix} 0 & t^{1/2} \\ -t^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = 1$ . Для преобразования типа 2) доказательство аналогично.  $\square$

Из доказательства теоремы 20.3 вытекают следующие свойства полинома Александра в нормализации Конвея:

- 1) если  $K$  — узел, то  $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ ,  $\Delta_K(1) = 1$  и  $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$ ;
- 2) если  $L$  — зацепление, состоящее по крайней мере из двух связных компонент, то  $\Delta_L(1) = 0$ .

Теорема 20.7. Пусть  $L_+$ ,  $L_-$  и  $L_0$  — ориентированные зацепления, диаграммы которых совпадают всюду, кроме малого диска, а в этом диске устроены так, как показано на рис. 56. Тогда их полиномы Александра в нормализации Конвея связаны соотношением

$$\Delta_{L_+} - \Delta_{L_-} = (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta_{L_0}. \quad (1)$$

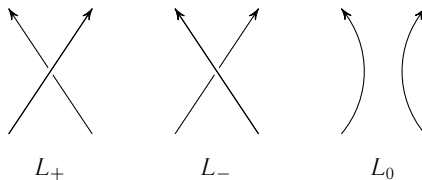


Рис. 56. Три зацепления

**Доказательство.** Построим для зацепления  $L_0$  поверхность Зейфerta  $F_0$  так, чтобы в рассматриваемом диске она была устроена так, как показано на рис. 57. Приклеивая к  $L_0$  перекрученную полоску, можно

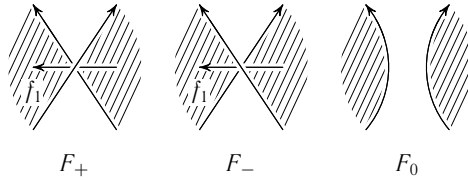


Рис. 57. Три поверхности Зейфerta

получить поверхности Зейфerta  $F_+$  и  $F_-$  для зацеплений  $L_+$  и  $L_-$ . В качестве базиса в  $H_1(F_{\pm})$  выберем класс замкнутой кривой  $f_1$ , проходящей по полоске, к которому добавлен базис в  $H_1(F_0)$ . Если  $A_0$  — матрица Зейфerta для  $L_0$ , то матрицы Зейфerta для  $L_-$  и  $L_+$  имеют вид  $\begin{pmatrix} n & \alpha \\ \beta & A_0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} n-1 & \alpha \\ \beta & A_0 \end{pmatrix}$ , где  $n$  — некоторое целое число. Рассматривая теперь определители матриц  $t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T$  для трёх матриц Зейфerta, получаем требуемое. При этом нужно лишь учесть, что  $\det \begin{pmatrix} a & x \\ y & A_0 \end{pmatrix} = a \det A_0 + c$ , где  $c$  не зависит от  $a$ . □

Соотношение (1) вместе с условием, что для тривиального узла полином Александера в нормализации Конвея равен 1, позволяет вычислить  $\Delta_L$  для любого ориентированного зацепления  $L$  (подробности см. в [ПЗ]). Поэтому  $\Delta_L$  — полином от переменной  $z = t^{-1/2} - t^{1/2}$ . Полином  $\nabla_L(z)$ , для которого  $\nabla_L(t^{-1/2} - t^{1/2}) = \Delta_L(t)$ , где  $\Delta_L$  — полином Александера в нормализации Конвея, называют *полиномом Конвея*. Полином Конвея удовлетворяет соотношению

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z \nabla_{L_0}(z). \tag{2}$$

**Задача 20.4.** Докажите, что если зацепление  $L$  расположено по обе стороны от плоскости, не пересекающей это зацепление, то  $\nabla_L(z) = 0$ .

Запишем полином Конвея в виде  $\nabla_L(z) = a_0(L) + a_1(L)z + a_2(L)z^2 + \dots$

**Задача 20.5.** Пусть число компонент зацепления  $L$  равно  $n(L)$ . Докажите, что  $a_i(L) = 0$  при  $i \equiv n(L) \pmod{2}$ .

**Задача 20.6.** а) Докажите, что если  $K$  — узел, то  $a_0(K) = 1$ .

б) Докажите, что если  $L$  — зацепление, содержащее более одной компоненты, то  $a_0(L) = 0$ .

**Задача 20.7.** Пусть число компонент зацепления  $L$  равно  $n(L)$ . Докажите, что  $a_i(L) = 0$  при  $i < n(L) - 1$ .

**Задача 20.8.** Докажите, что если  $L$  — зацепление, состоящее ровно из двух компонент  $L_1$  и  $L_2$ , то  $a_1(L) = \text{lk}(L_1, L_2)$ .

**Задача 20.9.** Предположим, что  $L_+$  и  $L_-$  — узлы, а  $L_0$  — зацепление, состоящее из компонент  $L_1$  и  $L_2$ . Докажите, что тогда  $a_2(L_+) - a_2(L_-) = \text{lk}(L_1, L_2)$ .

## 20.6. Свободное дифференциальное исчисление

При построении полинома Александра зацепления  $L$  мы использовали бесконечное циклическое накрытие  $X_\infty \rightarrow S^3 \setminus L$ . Из этой конструкции сразу не видно, что гомологии пространства  $X_\infty$  полностью определяются группой  $\pi = \pi_1(S^3 \setminus L)$ . (Для узлов это можно понять, применив довольно трудную теорему о том, что дополнение узла является пространством типа  $K(\pi, 1)$ , а потому его гомотопический тип полностью определяется группой  $\pi$ .) Фокс [Fo1], [Fo2], [Кр] предложил удобный способ вычисления полинома Александра непосредственно по списку образующих и соотношений группы  $\pi$ , причём с помощью конструкции Фокса несложно доказать, что полином Александра не зависит от того, какое именно задание группы  $\pi$  образующими и соотношениями выбрано. Этот подход к вычислению полинома Александра называют *свободным дифференциальным исчислением* или *исчислением Фокса*.

Исчисление Фокса основано на следующих соображениях. Пусть есть двумерный  $CW$ -комплекс  $W$  с одной нульмерной клеткой, причём фактор группы  $\pi = \pi_1(W)$  по коммутанту  $\pi' = [\pi, \pi]$  — свободная абелева группа с  $r$  образующими. Тогда универсальное абелево накрытие  $W_{\text{ab}} \rightarrow W$ , соответствующее подгруппе  $\pi' \subset \pi$ , эффективно выражается через одномерные клетки  $x_1, \dots, x_m$  (соответствующие образующим группы  $\pi$ ) и двумерные клетки  $r_1, \dots, r_n$  (соответствующие соотношениям между образующими).

Поясним это на конкретном примере зацепления, изображённого на рис. 58. На перекрёстках мы имеем следующие соотношения: 1)  $a = yxy^{-1}$ , 2)  $b = xyx^{-1}$ , 3)  $x = sac^{-1}$ , 4)  $y = xcx^{-1}$ , 5)  $c = yby^{-1}$ . Образующие  $a$ ,  $b$  и  $c$  выражаются через  $x$  и  $y$  с помощью соотношений 1), 2) и 3). Подставляя эти выражения в 4) и 5), получаем в обоих случаях одно и то же соотношение  $yxyx = xuyx$ , т. е.  $yxyx^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1} = 1$ .

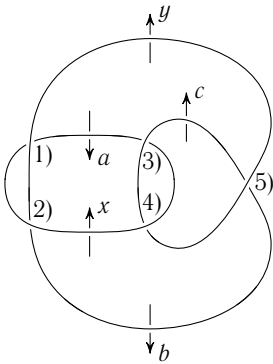


Рис. 58. Диаграмма зацепления

Рассмотрим двумерный комплекс  $W$  с одной нульмерной клеткой  $s_0$ , двумя одномерными клетками  $x$  и  $y$  и одной двумерной клеткой  $r$ , соответствующей соотношению  $yxxy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1} = 1$  (рис. 59). Пусть

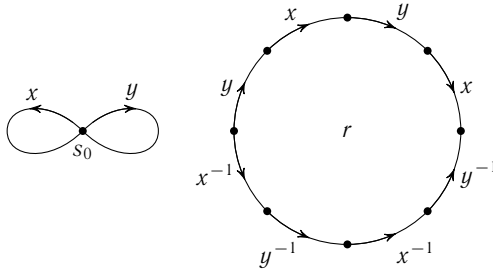


Рис. 59. Комплекс  $W$

$\tilde{s}_0$  — некоторая точка комплекса  $W_{ab}$ , отображающаяся в  $s_0$ ,  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$  — поднятия петель  $x$  и  $y$  с началом в отмеченной точке  $\tilde{s}_0$ ,  $\tilde{r}$  — поднятие клетки  $r$ , которое начинается в точке  $\tilde{s}_0$  и соответствует обходу  $yxxy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}$  (рис. 60). Пусть  $t_1$  и  $t_2$  — образующие группы автоморфизмов накрытия

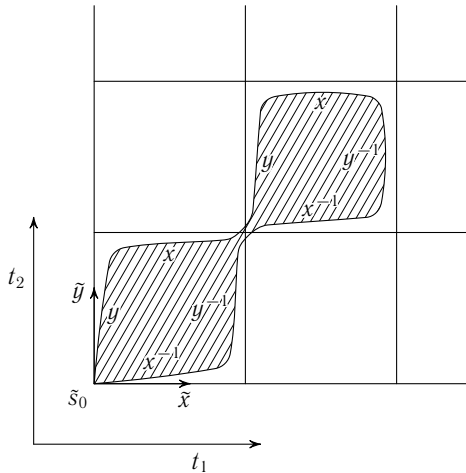


Рис. 60. Комплекс  $W_{ab}$

$W_{ab} \rightarrow W$ , соответствующие маленьким окружностям, надетым на компоненты зацепления (в рассматриваемой ситуации  $t_1$  и  $t_2$  соответствуют  $x$  и  $y$ , но в общей ситуации они соответствуют некоторым элементам группы  $\pi/[\pi, \pi]$ ). Пусть, далее,  $\Lambda = \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ . Как модули над  $\Lambda$ , группы

нульмерных, одномерных и двумерных цепей являются свободными модулями  $\Lambda[\tilde{s}_0]$ ,  $\Lambda[\tilde{x}, \tilde{y}]$  и  $\Lambda[\tilde{r}]$ , поскольку все клетки в  $W_{ab}$  получаются из клеток  $\tilde{s}_0$ ,  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  и  $\tilde{r}$  действием автоморфизмов. Поэтому, чтобы вычислить гомологии комплекса  $W_{ab}$  как  $\Lambda$ -модуль, достаточно вычислить  $\partial_1 \tilde{x}$ ,  $\partial_1 \tilde{y}$  и  $\partial_2 \tilde{r}$  (здесь  $\partial_1$  — граница одномерной клетки, а  $\partial_2$  — граница двумерной клетки). Ясно, что  $\partial_1 \tilde{x} = (t_1 - 1)\tilde{s}_0$ ,  $\partial_1 \tilde{y} = (t_2 - 1)\tilde{s}_0$ , а  $\partial_2 \tilde{r}$  — это поднятие пути, представляющего слово  $yxxy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}$ . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \partial_2 \tilde{r} &= \tilde{y} + t_2 \tilde{x} + t_1 t_2 \tilde{y} + t_1 t_2^2 \tilde{x} - t_1^2 t_2 \tilde{y} - t_1 t_2 \tilde{x} - t_1 \tilde{y} - \tilde{x} = \\ &= (-1 + t_2)(1 + t_1 t_2) \tilde{x} + (1 - t_1)(1 + t_1 t_2) \tilde{y}. \end{aligned}$$

Таким образом, базисом  $\text{Ker } \partial_1$  как  $\Lambda$ -модуля служит элемент  $\varepsilon = (-1 + t_2)\tilde{x} + (1 - t_1)\tilde{y}$ , и при этом  $\partial_2 \tilde{r} = (1 + t_1 t_2)\varepsilon$ . Следовательно,  $H_1(W) = \Lambda/(1 + t_1 t_2)\Lambda$ , т. е. многочлен Александра данного зацепления равен  $1 + t_1 t_2$ .

Конечно, наиболее трудную часть этих вычислений составляют вычисления  $\partial_2 \tilde{r}$ . Эти вычисления нужно формализовать и понять, как они производятся в общем случае.

Начнём с того, что сделаем два замечания. Пусть  $h: \pi_1(W, s_0) \rightarrow H_1(W)$  — гомоморфизм Гуревича,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega$  — слова в алфавите  $\{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$ , которые мы рассматриваем как петли в  $W$  с началом и концом  $s_0$ , а  $\tilde{\omega}_1$ ,  $\tilde{\omega}_2$  и  $\tilde{\omega}$  — поднятия этих петель с началом  $\tilde{s}_0$ . Тогда

- 1) поднятием петли  $\omega_1 \omega_2$  с началом  $\tilde{s}_0$  является путь  $\tilde{\omega}_1 + h(\omega_1)\tilde{\omega}_2$  (рис. 61);
- 2) поднятием петли  $\omega^{-1}$  с началом  $\tilde{s}_0$  является путь  $-h(\omega)\tilde{\omega}$  (рис. 62).

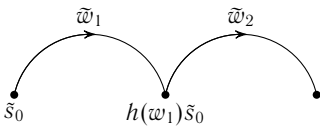


Рис. 61. Поднятие пути  $\omega_1 \omega_2$

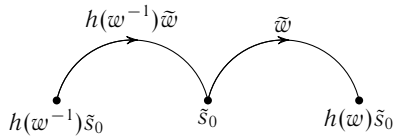


Рис. 62. Поднятие пути  $\omega^{-1}$

Аналогичные формулы имеют место и в общем случае.

Чтобы перевести эти геометрические формулы на язык алгебры, нам понадобится следующая конструкция, относящаяся к свободным группам.

Пусть  $F_m$  — свободная группа с образующими  $x_1, \dots, x_m$ . Групповое кольцо группы  $F_m$  над кольцом  $\mathbb{Z}$  состоит из конечных сумм вида  $\sum k_g g$ , где  $g \in F_m$  и  $k_g \in \mathbb{Z}$ . Сложение в групповом кольце покомпонентное, а умножение задаётся формулой  $(\sum k_g g)(\sum l_h h) = \sum k_g l_h gh$ , причём коэффициенты при одном и том же элементе суммируются. Это групповое кольцо мы будем обозначать  $\mathbb{Z}[F_m]$ .

Для каждого  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , существует единственное отображение  $\frac{\partial}{\partial x_i}: F_m \rightarrow \mathbb{Z}[F_m]$ , обладающее следующими свойствами:

- 1)  $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$ ;
- 2)  $\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial v}{\partial x_i}$ .

Отображение  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  задано на образующих группы  $F_m$  и на произведениях любых элементов этой группы, поэтому его единственность очевидна. Но существование отображения  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  не очевидно: представляя один и тот же элемент в виде произведения разными способами, мы, вообще говоря, могли бы получить для него разные результаты. Чтобы доказать существование отображения  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , мы определим его на полугруппе слов в алфавите  $x_1, \dots, x_m$  (каждое слово состоит из слогов вида  $x_i^k$ , где  $k$  — целое число; слова  $\omega_1 x_i^0 \omega_2$  и  $\omega_1 \omega_2$  считаются эквивалентными; слова  $\omega_1 x_i^k x_i^l \omega_2$  и  $\omega_1 x_i^{k+l} \omega_2$  тоже считаются эквивалентными; есть также пустое слово, которое обозначается 1). Для слов задача несколько проще, потому что для них нет сокращений. Но сначала выведем из условий 1) и 2) некоторые следствия.

*Лемма 1. Отображение  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  обладает следующими свойствами:* а)  $\frac{\partial 1}{\partial x_i} = 0$ ; б)  $\frac{\partial(u^{-1})}{\partial x_i} = -u^{-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ .

*Доказательство.* а) Ясно, что  $\delta_{ij} = \frac{\partial(1 \cdot x_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial 1}{\partial x_i} + 1 \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \frac{\partial 1}{\partial x_i} + \delta_{ij}$ . Поэтому  $\frac{\partial 1}{\partial x_i} = 0$ .

б) Из а) получаем, что  $0 = \frac{\partial(uu^{-1})}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial u^{-1}}{\partial x_i}$ , поэтому  $\frac{\partial(u^{-1})}{\partial x_i} = -u^{-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ .  $\square$

Для каждого  $g \in F_m$  и целого числа  $k$  определим элемент  $\frac{g^k - 1}{g - 1} \in \mathbb{Z}[F_m]$  следующим образом:

$$\frac{g^k - 1}{g - 1} = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0; \\ 1 + g + g^2 + \dots + g^{k-1} & \text{при } k > 0; \\ -(g^k + g^{k-1} + \dots + g^{-1} + 1 + g) & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

*Лемма 2. Справедливо равенство  $\frac{\partial g^k}{\partial x_i} = \frac{g^k - 1}{g - 1} \frac{\partial g}{\partial x_i}$ .*

*Доказательство.* Применим индукцию по  $|k|$ . При  $k = 0, 1, -1$  получаем равенства  $\frac{\partial 1}{\partial x_i} = 0$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i}$  и  $\frac{\partial(g^{-1})}{\partial x_i} = -g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}$ . Первое



и последнее из этих равенств доказаны в лемме 1. При  $k \geq 1$ , воспользовавшись предположением индукции, получаем

$$\frac{\partial g^{k+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial g^k}{\partial x_i} + g^k \frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^k g^j \frac{\partial g}{\partial x_i} + g^k \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{g^{k+1} - 1}{g - 1} \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

При  $k \leq -1$  получаем

$$\frac{\partial g^{k-1}}{\partial x_i} = \frac{\partial g^k}{\partial x_i} + g^k \frac{\partial g^{-1}}{\partial x_i} = - \sum_{j=k}^1 g^j \frac{\partial g}{\partial x_i} - g^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{g^{k-1} - 1}{g - 1} \frac{\partial g}{\partial x_i}. \quad \square$$

Пусть  $A_m$  — полугруппа слов в алфавите  $x_1, \dots, x_m$ ,  $p: A_m \rightarrow F_m$  — отображение, сопоставляющее слову соответствующий элемент свободной группы. Определим отображение  $\Lambda_i: A_m \rightarrow \mathbb{Z}[F_m]$  индукцией по числу слогов в слове с помощью следующих соотношений:

- 1)  $\Lambda_i 1 = 0$ , где  $1$  — пустое слово;
- 2)  $\Lambda_i x_j^k = \frac{x_j^k - 1}{x_j - 1} \delta_{ij}$ ;
- 3)  $\Lambda_i(x_j^k a) = \Lambda_i x_j^k + x_j^k \Lambda_i a$  для произвольного слова  $a$ .

Эти соотношения однозначно определяют отображение  $\Lambda_i$ , причём это отображение определено корректно, поскольку в полугруппе  $A_m$  нет сокращений. Покажем, что отображение  $\Lambda_i$  индуцирует в  $F_m$  требуемое отображение  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ .

**Шаг 1.** Для любых двух слов  $a, b \in A_m$  имеет место равенство

$$\Lambda_i(ab) = \Lambda_i a + p(a) \Lambda_i b. \quad (1)$$

Применим индукцию по числу слогов в слове  $ab$ . Если слово  $a$  пустое, то требуемое равенство очевидно. Поэтому будем считать, что  $a = x_j^k c$ , где  $x_j^k$  — непустое слово. Тогда согласно определяющим соотношениям для  $\Lambda_i$  имеем

$$\Lambda_i(ab) = \Lambda_i(x_j^k cb) = \Lambda_i x_j^k + x_j^k \Lambda_i(cb).$$

Поэтому по предположению индукции

$$\Lambda_i(ab) = \Lambda_i x_j^k + x_j^k \Lambda_i c + x_j^k p(c) \Lambda_i b = \Lambda_i a + p(a) \Lambda_i b.$$

**Шаг 2.** Если два слова эквивалентны, т. е. они соответствуют одному и тому же элементу группы  $F_m$ , то их образы при отображении  $\Lambda_i$  равны.

Требуется проверить равенства

$$\begin{aligned} \Lambda_i(ax_j^0 b) &= \Lambda_i(ab), \\ \Lambda_i(ax_j^{m+n} b) &= \Lambda_i(ax_j^m x_j^n b). \end{aligned}$$

Воспользуемся для этого равенством (1). Первое равенство доказывается так:

$$\Lambda_i(ax_j^0b) = \Lambda_i(ax_j^0) + p(ax_j^0)\Lambda_ib = \Lambda_ia + p(a)\Lambda_ib = \Lambda_i(ab).$$

Чтобы доказать второе равенство, заметим, что

$$\frac{x_j^{m+n} - 1}{x_j - 1} = \frac{x_j^m - 1}{x_j - 1} + x_j^m \frac{x_j^n - 1}{x_j - 1},$$

а значит,  $\Lambda_i(x_j^{m+n}) = \Lambda_i(x_j^m x_j^n)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \Lambda_i(ax_j^{m+n}b) &= \Lambda_i(ax_j^{m+n}) + p(ax_j^{m+n})\Lambda_ib = \\ &= \Lambda_ia + p(a)\Lambda_i(x_j^m x_j^n) + p(ax_j^m x_j^n)\Lambda_ib = \\ &= \Lambda_i(ax_j^m x_j^n b), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Теперь мы можем определить отображение  $\frac{\partial}{\partial x_i}: F_m \rightarrow \mathbb{Z}[F_m]$  равенством  $\frac{\partial}{\partial x_i} p(a) = \Lambda_ia$  для любого слова  $a \in A_m$ . Шаг 2 доказывает корректность этого определения. Непосредственно из определения отображения  $\Lambda_i$  видно, что  $\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij}$ . Поэтому нужно лишь проверить равенство  $\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial v}{\partial x_i}$ . Пусть  $u = p(a)$  и  $v = p(b)$  для некоторых слов  $a, b \in A_m$ . Тогда

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} p(ab) = \Lambda_i(ab) = \Lambda_ia + u\Lambda_ib = \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Существование отображения  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  доказано.

Перейдём к геометрическим приложениям этой алгебраической конструкции. Пусть группа  $\pi = \pi_1(S^3 \setminus L)$  задана образующими  $x_1, \dots, x_{m+1}$  и соотношениями  $r_1, \dots, r_n$ , т. е.  $\pi = F_{m+1}/N$ , где  $N$  — минимальная нормальная подгруппа в  $F_{m+1}$ , содержащая слова  $r_1, \dots, r_n$ . Для любого гомоморфизма  $\varphi: \pi \rightarrow G$  можно рассмотреть композицию  $F_{m+1} \rightarrow \pi \xrightarrow{\varphi} G$  и построить  $\mathbb{Z}$ -линейное отображение  $\Phi: \mathbb{Z}[F_{m+1}] \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ . Нас будут интересовать два случая, соответствующие полиному Александра от многих переменных и от одной переменной. Для полинома Александра от многих переменных  $\varphi$  — гомоморфизм Гуревича и  $G = \pi/[\pi, \pi] \cong \mathbb{Z}^f$ . Для полинома Александра от одной переменной  $G = \mathbb{Z}$ , а  $\varphi$  сопоставляет петле её коэффициент зацепления с  $L$ .



Доказательство того, что наибольший общий делитель миноров порядка  $m$  матрицы  $\left\| \Phi \left( \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right) \right\|_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m+1}}$  не зависит от задания группы  $\pi$  образующими и соотношениями, основано на теореме Титце, описывающей преобразования образующих и соотношений, соответствующие изоморфизмам групп. Следующие два преобразования образующих  $\mathbf{x}$  и соотношений  $\mathbf{r}$  дают изоморфные группы.

I.  $\langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \rangle \leftrightarrow \langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \cup s \rangle$ , где  $s$  — некоторое соотношение, вытекающее из соотношений  $\mathbf{r}$ , т.е. лежащее в нормальной подгруппе, порождённой словами  $\mathbf{r}$ .

II.  $\langle \mathbf{x} \cup \mathbf{y} : \mathbf{r} \rangle \leftrightarrow \langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \cup \mathbf{y}\xi^{-1} \rangle$ , где  $\mathbf{y} \notin \mathbf{x}$ , а  $\xi$  — произвольный элемент свободной группы с образующими  $\mathbf{x}$ . (Добавление соотношения  $\mathbf{y} = \xi$ .)

Эти два преобразования называют преобразованиями Титце.

**Теорема 20.8 (Титце).** *Наборы образующих и соотношений  $\langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \rangle$  и  $\langle \mathbf{y} : \mathbf{s} \rangle$  задают изоморфные группы тогда и только тогда, когда от одного из них можно перейти к другому посредством преобразований Титце.*

**Доказательство.** Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма.** *Пусть  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  — непересекающиеся множества образующих,  $f: F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \rightarrow F(\mathbf{x})$  — ретракция свободных групп с образующими  $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$  и  $\mathbf{x}$  (т.е.  $f(a) = a$  для всех  $a \in F(\mathbf{x})$ ). Пусть, далее, образующие и соотношения  $\langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \rangle$  задают группу  $G$ . Тогда ядро композиции гомоморфизмов*

$$F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \xrightarrow{f} F(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varphi} G$$

*представляет собой наименьшую нормальную группу  $N$ , содержащую  $\mathbf{r}$  и все элементы вида  $\mathbf{y}f(\mathbf{y})^{-1}$ , где  $\mathbf{y} \in \mathbf{y}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $r \in \mathbf{r}$ . Тогда  $f(r) = r$ , поскольку  $r \in F(\mathbf{x})$  и  $f$  — ретракция. Следовательно,  $\varphi f(r) = \varphi(r) = 1$ . Кроме того,  $f^2 = f$ , поскольку  $f$  — ретракция. Значит,  $\varphi f(\mathbf{y}f(\mathbf{y})^{-1}) = \varphi(f(\mathbf{y})f(\mathbf{y})^{-1}) = \varphi(1) = 1$ . Таким образом,  $N \subset \text{Ker } \varphi f$ .

Докажем теперь, что  $\text{Ker } \varphi f \subset N$ . Рассмотрим каноническую проекцию  $p: F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \rightarrow F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y})/N$  и её ограничение  $p'$  на  $F(\mathbf{x})$ :

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) & \xrightarrow{f} & F(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varphi} G \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y})/N. \end{array}$$

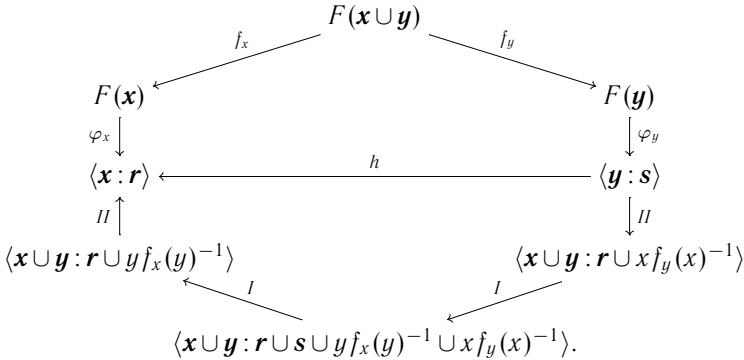
Если  $x \in \mathbf{x}$ , то  $p'f(x) = p'(x) = p(x)$ . Если  $\mathbf{y} \in \mathbf{y}$ , то  $p(\mathbf{y})p'f(\mathbf{y})^{-1} = p(\mathbf{y})p'f(\mathbf{y})^{-1} = p(\mathbf{y}f(\mathbf{y})^{-1}) = 1$ , поэтому  $p'f(\mathbf{y}) = p(\mathbf{y})$ . Таким образом, рассматриваемая диаграмма коммутативна, т.е.  $p'f = p$ .

Для любого  $u \in F(\mathbf{x} \cup \mathbf{y})$  имеем

$$p(uf(u)^{-1}) = p'f(uf(u)^{-1}) = p'(f(u)f(u)^{-1}) = p'(1) = 1.$$

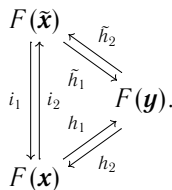
Поэтому  $uf(u)^{-1} \in N$ . Если же  $u \in \text{Ker } \varphi$ , то  $f(u)$  является следствием соотношений  $\mathbf{r}$ , поэтому  $f(u) \in N$ . В таком случае  $u = uf(u)^{-1}f(u) \in N$ .  $\square$

Теперь можно приступить непосредственно к доказательству теоремы Титце. Сначала мы рассмотрим случай, когда множества образующих  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  не пересекаются. Займёмся построением следующей диаграммы:



Здесь  $f_x$  и  $f_y$  — ретракции,  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  — проекции свободной группы на группу, заданную образующими и соотношениями,  $h$  — изоморфизм групп. Согласно лемме ядро гомоморфизма  $\varphi_x f_x$  содержится в нормальной подгруппе, порождённой  $\mathbf{r} \cup \mathbf{y} f_x(\mathbf{y})^{-1}$ . С другой стороны,  $\varphi_x f_x = h \varphi_y f_y$  и ядро гомоморфизма  $\varphi_y f_y$  содержит  $\mathbf{s} \cup \mathbf{x} f_y(\mathbf{x})^{-1}$ , поэтому  $\mathbf{s} \cup \mathbf{x} f_y(\mathbf{x})^{-1}$  содержится в нормальной подгруппе, порождённой  $\mathbf{r} \cup \mathbf{y} f_x(\mathbf{y})^{-1}$ . Аналогично (используя изоморфизм  $h^{-1}$ ) получаем, что  $\mathbf{r} \cup \mathbf{y} f_x(\mathbf{y})^{-1}$  содержится в подгруппе, порождённой  $\mathbf{s} \cup \mathbf{x} f_y(\mathbf{x})^{-1}$ . Это позволяет построить требуемую диаграмму, а вместе с ней и требуемый набор преобразований Титце.

Если множества  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  пересекаются, то выберем множество  $\tilde{\mathbf{x}}$ , не пересекающееся с  $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ , так, чтобы его элементы находились во взаимно однозначном соответствии с элементами множества  $\mathbf{x}$ . Это взаимно однозначное соответствие определяет изоморфизмы  $i_1$  и  $i_2$  в диаграмме



По условию существуют гомоморфизмы  $h_1$  и  $h_2$ , индуцирующие изоморфизм групп  $\langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \rangle$  и  $\langle \mathbf{y} : \mathbf{s} \rangle$ . Им соответствуют гомоморфизмы  $\tilde{h}_1 = h_1 i_1$  и  $\tilde{h}_2 = h_2 i_2$ . Пусть  $R, \tilde{R}$  и  $S$  — нормальные подгруппы, порождённые наборами слов  $\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}$  и  $\mathbf{s}$ . Тогда  $\tilde{h}_1(\tilde{\mathbf{r}}) = h_1 i_1(\mathbf{r}) = h_1(\mathbf{r}) \subset S$  и  $\tilde{h}_2(\mathbf{s}) = i_2 h_2(\mathbf{s}) \subset \subset i_2(R) = \tilde{R}$ . Поэтому гомоморфизмы  $\tilde{h}_1$  и  $\tilde{h}_2$  индуцируют гомоморфизмы групп  $\langle \mathbf{y} : \mathbf{s} \rangle$  и  $\langle \tilde{\mathbf{x}} : \tilde{\mathbf{r}} \rangle$ . При этом  $\tilde{h}_1 \tilde{h}_2 = h_1 i_1 i_2 h_2 = h_1 h_2$  и  $\tilde{h}_2 \tilde{h}_1 = i_2 h_2 h_1 i_1$ . Гомоморфизмы  $h_1 h_2$  и  $h_2 h_1$  индуцируют изоморфизмы групп  $\langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \rangle$  и  $\langle \mathbf{y} : \mathbf{s} \rangle$ , поэтому гомоморфизмы  $\tilde{h}_1$  и  $\tilde{h}_2$  индуцируют изоморфизмы групп  $\langle \tilde{\mathbf{x}} : \tilde{\mathbf{r}} \rangle$  и  $\langle \mathbf{y} : \mathbf{s} \rangle$ .

Теорему Титце для непересекающихся наборов образующих мы уже доказали. Применив её дважды, перейдём с помощью преобразований Титце сначала от  $\langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \rangle$  к  $\langle \tilde{\mathbf{x}} : \tilde{\mathbf{r}} \rangle$ , а затем от  $\langle \tilde{\mathbf{x}} : \tilde{\mathbf{r}} \rangle$  к  $\langle \mathbf{y} : \mathbf{s} \rangle$ . Теорема Титце доказана.  $\square$

Теперь, чтобы доказать требуемую инвариантность наибольшего общего делителя миноров, остаётся доказать, что преобразования Титце приводят к матрицам, эквивалентным в смысле теоремы 20.1.

Рассмотрим первое преобразование Титце  $\langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \cup s \rangle$ , где элемент  $s$  лежит в нормальной подгруппе, порождённой элементами  $\mathbf{r}$ , т. е.  $s =$

$$= \prod_{k=1}^p u_k r_{i_k}^{a_k} u_k^{-1}. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (u_1 r_{i_1}^{a_1} u_1^{-1}) + u_1 r_{i_1}^{a_1} u_1^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_2 r_{i_2}^{a_2} u_2^{-1}) + \dots \\ &\dots + \prod_{k=1}^{p-1} (u_k r_{i_k}^{a_k} u_k^{-1}) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_p r_{i_p}^{a_p} u_p^{-1}). \end{aligned}$$

По условию  $\Phi(r_i) = 1$ , поэтому

$$\Phi\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^p \Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_k r_{i_k}^{a_k} u_k^{-1})\right).$$

При этом

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_k r_{i_k}^{a_k} u_k^{-1}) = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + u_k \frac{r_{i_k}^{a_k} - 1}{r_{i_k} - 1} \frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j} - u_k r_{i_k}^{a_k} u_k^{-1} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

и  $\Phi\left(\frac{r_{i_k}^{a_k} - 1}{r_{i_k} - 1}\right) = a_k$ . Следовательно,

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_k r_{i_k}^{a_k} u_k^{-1})\right) = a_k \Phi(u_k) \Phi\left(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\right).$$

Таким образом,

$$\Phi\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^p c_k \Phi\left(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\right),$$

где  $c_k = a_k \Phi(u_k)$ . Это означает, что матрица Александра для  $\langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \cup s \rangle$  получается из матрицы Александра для  $\langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \rangle$  добавлением одной строки, которая является линейной комбинацией других строк.

Рассмотрим второе преобразование Титце  $\langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{x} \cup y : \mathbf{r} \cup y \xi^{-1} \rangle$ , где  $y \notin \mathbf{x}$  и  $\xi \in F(\mathbf{x})$ . Ясно, что  $\frac{\partial r_i}{\partial y} = 0$  и  $\frac{\partial}{\partial y}(y \xi^{-1}) = 1$ . Матрица Александра для  $\langle \mathbf{x} \cup y : \mathbf{r} \cup y \xi^{-1} \rangle$  равна  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ , где  $A$  — матрица Александра для  $\langle \mathbf{x} : \mathbf{r} \rangle$ , а  $a$  — строка элементов  $\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(y \xi^{-1})\right)$ . Остаётся заметить, что  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , поскольку первую матрицу можно преобразовать во вторую, вычитая из всех столбцов, кроме последнего, кратные последнего столбца.

## § 21. Инвариант Арфа

### 21.1. Инвариант Арфа квадратичной формы

С каждой вещественной квадратичной формой  $q(x)$  связана симметрическая билинейная форма  $B(x, y)$ , для которой  $B(x, x) = q(x)$ . Тождество  $q(x + y) - q(x) - q(y) = 2B(x, y)$  позволяет восстановить  $B$  по  $q$ . Для поля  $\mathbb{Z}_2$  определение квадратичной формы и связанной с ней билинейной формы изменяется следующим образом. Пусть  $V$  — конечномерное пространство над полем  $\mathbb{Z}_2$ . Отображение  $q: V \rightarrow \mathbb{Z}_2$  называют *квадратичной формой*, если существует билинейная форма  $B(x, y)$ , для которой  $q(x + y) + q(x) + q(y) = B(x, y)$ ; знаки здесь, конечно, несущественны; существенно лишь то, что  $2B(x, y)$  заменяется на  $B(x, y)$ , поскольку над полем  $\mathbb{Z}_2$  нельзя делить на 2. Заметим, что  $q(x)$  уже не равно  $B(x, x)$ , как это было в вещественном случае. Квадратичную форму  $q$  называют *невырожденной*, если билинейная форма  $B$  невырожденна.

Из определения ясно, что  $B(x, y) = B(y, x)$  и  $B(x, x) = q(2x) + 2q(x) = 0$ . Поэтому точно такие же рассуждения, как для вещественных кососимметрических матриц, показывают, что если  $q$  — невырожденная квадратичная форма, то в пространстве  $V$  можно выбрать базис  $e_1, f_1, \dots, e_n, f_n$  так, что  $B(e_i, e_j) = B(f_i, f_j) = 0$  и  $B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ ; такой базис называют *симплектическим*.

Для невырожденной квадратичной формы  $q$  рассмотрим элемент  $c(q) = \sum_{i=1}^n q(e_i)q(f_i) \in \mathbb{Z}_2$ , где  $e_1, \dots, f_n$  — симплектический базис. Этот элемент группы  $\mathbb{Z}_2$  называют *инвариантом Арфа*.

**Теорема 21.1** (Арф [Ar]). *Любую невырожденную квадратичную форму  $q$  можно привести к виду  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n + c(q)(x_n^2 + y_n^2)$ , где  $c(q)$  — инвариант Арфа. При этом инвариант Арфа  $c(q)$  не зависит от выбора симплектического базиса.*

**Доказательство.** Рассмотрим сначала случай  $n = 1$ . Равенство  $q(e_1) + q(f_1) + q(e_1 + f_1) = 1$  показывает, что либо один из элементов  $q(e_1)$ ,  $q(f_1)$ ,  $q(e_1 + f_1)$  равен 1, а два других равны 0, либо все три элемента равны 1. Элементы  $e_1$ ,  $f_1$  и  $e_1 + f_1$  равноправны в том смысле, что любые два из них можно взять в качестве симплектического базиса, поскольку  $B(e_1 + f_1, e_1 + f_1) = 0$  и  $B(e_1 + f_1, e_1) = 1$ . Поэтому можно считать, что  $q(e_1 + f_1) = 1$ . Итак, в случае  $n = 1$  мы получаем две невырожденные квадратичные формы  $q_0$  и  $q_1$ ; здесь  $q_0(e_1) = q_0(f_1) = 0$  и  $q_1(e_1) = q_1(f_1) = 1$ . В координатах эти формы можно записать так:  $q_0 = x_1y_1$  и  $q_1 = x_1y_1 + x_1^2 + y_1^2$ . Ясно, что  $c(q_0) = 0$  и  $c(q_1) = 1$ .

Чтобы доказать, что инвариант Арфа не зависит от выбора симплектического базиса, нужно доказать, что формы  $q_0$  и  $q_1$  не эквивалентны, т. е. не получаются друг из друга заменой базиса. Для этого достаточно заметить, что форма  $q_0$  принимает значение 1 ровно один раз, а форма  $q_1$  — три раза.

Рассмотрим теперь произвольную невырожденную квадратичную форму  $q$ . Выберем симплектический базис  $e_1, \dots, f_n$ . Пусть  $\varphi_i$  — ограниченные формы  $q$  на подпространство, натянутое на векторы  $e_i$  и  $f_i$ . Тогда  $q = \varphi_1 \oplus \dots \oplus \varphi_n$ . Каждая форма  $\varphi_i$  эквивалентна  $q_0$  или  $q_1$ .

**Л е м м а 1.** *Квадратичные формы  $\psi_0 = q_0 \oplus q_0$  и  $\psi_1 = q_1 \oplus q_1$  эквивалентны.*

**Доказательство.** Пусть  $e_1, f_1, e_2, f_2$  — симплектический базис, для которого  $\psi_0(e_i) = \psi_0(f_i) = 0$  и  $\psi_1(e_i) = \psi_1(f_i) = 1$ . Рассмотрим базис  $e'_1 = e_1 + e_2$ ,  $f'_1 = e_1 + f_2$ ,  $e'_2 = e_1 + f_1 + e_2 + f_2$ ,  $f'_2 = e_1 + f_1 + f_2$ . Легко проверить, что этот базис симплектический. Проверим, что  $\psi_1(e'_i) = \psi_1(f'_i) = 0$ , т. е.  $\psi_1(e'_i) = \psi_0(e_i)$  и  $\psi_1(f'_i) = \psi_0(f_i)$ . Действительно,  $\psi_1(e_1 + e_2) = \psi_1(e_1) + \psi_1(e_2) + B(e_1, e_2) = 1 + 1 + 0 = 0$ ,  $\psi_1(e_1 + f_2) = \psi_1(e_1) + \psi_1(f_2) + B(e_1, f_2) = 1 + 1 + 0 = 0$ ,  $\psi_1(e_1 + f_1 + e_2 + f_2) = \psi_1(e_1 + e_2) + \psi_1(f_1 + f_2) + B(e_1 + e_2, f_1 + f_2) = 0 + 0 + 0 = 0$ ,  $\psi_1(e_1 + f_1 + f_2) = \psi_1(e_1 + f_2) + \psi_1(f_1) + B(e_1 + f_2, f_1) = 0 + 1 + 1 = 0$ .  $\square$

Введём следующее обозначение:  $\underbrace{q \oplus \dots \oplus q}_{n \text{ раз}} = nq$ . Из леммы 1 следует,

что форма  $q$  эквивалентна либо форме  $nq_0$ , либо форме  $(n - 1)q_0 \oplus q_1$ . В координатах эти формы записываются так:  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$  и  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n + x_n^2 + y_n^2$ . Ясно также, что  $c(nq_0) = 0$  и  $c((n - 1)q_0 \oplus q_1) = 1$ .



Чтобы доказать, что инвариант Арфа не зависит от выбора симплектического базиса, нужно доказать, что формы  $nq_0$  и  $(n-1)q_0 \oplus q_1$  не эквивалентны.

**Л е м м а 2.** *Значение 1 форма  $nq_0$  принимает ровно  $2^{2n-1} - 2^{n-1}$  раз, а форма  $(n-1)q_0 \oplus q_1$  — ровно  $2^{2n-1} + 2^{n-1}$  раз.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Применим индукцию по  $n$ . При  $n = 1$  утверждение легко проверяется. Предположим, что мы уже доказали, что форма  $nq_0$  принимает значение 1 ровно  $2^{2n-1} - 2^{n-1}$  раз. Форма  $q_0$  принимает значение 1 ровно 1 раз, а значение 0 ровно 3 раза. Поэтому форма  $(n+1)q_0$  принимает значение 1 ровно  $3(2^{2n-1} - 2^{n-1}) + 2^{2n-1} + 2^{n-1} = 2^{2n+1} - 2^n$  раз (мы воспользовались тем, что форма  $nq_0$  принимает значение 0 ровно  $2^{2n-1} + 2^{n-1}$  раз). Форма  $q_1$  принимает значение 1 ровно 3 раза, а значение 0 ровно 1 раз. Поэтому форма  $nq_0 \oplus q_1$  принимает значение 1 ровно  $3(2^{2n-1} + 2^{n-1}) + 2^{2n-1} - 2^{n-1}$  раз. □

Тем самым теорема полностью доказана. □

## 21.2. Инвариант Арфа ориентированного зацепления

Пусть  $L \subset S^3$  — ориентированное зацепление,  $F$  — его поверхность Зейферта. Определим отображение  $q: H_1(F; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , положив  $q(x) = \alpha_2(x, x)$ , где  $\alpha_2$  — это форма Зейферта  $\alpha$ , приведённая по модулю 2. Например, если гомологический класс  $x$  представлен замкнутой несамопересекающейся кривой на поверхности  $F$ , то  $q(x)$  — число полных оборотов (по модулю 2) полосы, которая получается, если взять на поверхности  $F$   $\varepsilon$ -окрестность этой кривой. Ясно, что  $q(x+y) = \alpha_2(x, x) + \alpha_2(x, y) + \alpha_2(y, x) + \alpha_2(y, y)$ , поэтому  $q(x+y) + q(x) + q(y) = \alpha_2(x, y) + \alpha_2(y, x)$ . Покажем, что последнее выражение равно  $f(x, y)$ , где  $f(x, y)$  — форма пересечения, приведённая по модулю 2. Действительно,  $\alpha(x, y) + \alpha(y, x) = \text{lk}(x^-, y) + \text{lk}(y^-, x) = \text{lk}(x^-, y) + \text{lk}(y, x^+)$ . Непосредственно из определения коэффициента зацепления видно, что чётность числа  $\text{lk}(x^-, y) + \text{lk}(y, x^+)$  совпадает с чётностью числа точек пересечения кривых, представляющих  $y$  и  $x$ .

Итак,  $q$  — квадратичная форма, соответствующая билинейной форме  $f$ . Обратимся к рис. 46 на с. 325. Этот рисунок показывает, что форма пересечения невырождена тогда и только тогда, когда край поверхности Зейферта связан, т. е. мы имеем дело с узлом. В связи с этим определение инварианта Арфа для узла проще, чем для зацеплений с несколькими компонентами: *инвариант Арфа узла* — это инвариант Арфа квадратичной формы  $q$ . Для зацеплений с несколькими компонентами определение инварианта Арфа не столь просто; более того, инвариант Арфа определён не для всех зацеплений.

Чтобы из формы пересечения получить невырожденную форму, нужно профакторизовать пространство  $H_1(F; \mathbb{Z}_2)$  по подпространству, порождённому циклами  $f_{2g+1}, \dots, f_{2g+n-1}$ , соответствующими  $n - 1$  компоненте края. Цикл, соответствующий оставшейся компоненте края, гомологичен сумме этих циклов. Таким образом, нужно рассмотреть факторпространство  $H_1(F; \mathbb{Z}_2)/i_*H_1(\partial F; \mathbb{Z}_2)$ , где  $i: \partial F \rightarrow F$  — естественное включение.

Форма  $q$  на этом факторпространстве должна быть корректно определена. Для этого нужно, чтобы для каждой компоненты  $L_i$  имело место равенство  $q(L_i) = 0$ , т. е.  $\text{lk}(L_i^-, L_i) = 0$ . Поверхность Зейферта не пересекает  $L_i^-$ , поэтому по модулю 2 коэффициент зацепления  $L_i^-$  и  $L_i$  равен коэффициенту зацепления  $L_i^-$  и  $L - L_i$ , а он, в свою очередь, равен коэффициенту зацепления  $L_i$  и  $L - L_i$ . Поэтому мы будем предполагать, что зацепление  $L$  обладает следующим свойством:

$$\text{lk}(L_i^-, L_i) \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{для всех } i. \quad (1)$$

Тогда форма  $q$  на факторпространстве корректно определена. *Инвариант Арфа*  $\mathcal{A}(L)$  зацепления  $L$ , обладающего свойством (1), — это по определению инвариант Арфа квадратичной формы  $q$  на факторпространстве  $H_1(F; \mathbb{Z}_2)/i_*H_1(\partial F; \mathbb{Z}_2)$ .

**Теорема 21.2.** *Инвариант Арфа  $\mathcal{A}(L)$  ориентированного зацепления  $L$  определён корректно, т. е. он не зависит от выбора поверхности  $F$ .*

**Доказательство.** Согласно теореме 20.4 достаточно проверить, что инвариант Арфа не изменяется при приклеивании к  $F$  ручки. В качестве симплектического базиса  $e_1, f_1, \dots, e_g, f_g$  для формы  $q$  на пространстве  $H_1(F)/i_*H_1(\partial F)$  возьмём первые  $2g$  кривых на рис. 46. После приклеивания ручки к ним можно добавить кривые  $e_{g+1}$  и  $f_{g+1}$ , которые выбираются так, как показано на рис. 55 на с. 337. Если  $e_{g+1}$  — это кривая  $f_{n+2}$  на этом рисунке, то  $q(e_{g+1}) = 0$ . Поэтому  $\sum_{k=1}^g q(e_k)q(f_k) = \sum_{k=1}^{g+1} q(e_k)q(f_k)$ .  $\square$

Ясно, что если  $K$  — тривиальный узел, то  $\mathcal{A}(K) = 0$ . Легко также проверить, что если  $K$  — трилистник, то  $\mathcal{A}(K) = 1$ . Действительно, при вычислении полинома Александра трилистника (см. с. 331) мы построили базис  $f_1, f_2$ . Непосредственно из определения формы  $f(x, y)$  видно, что  $f(x, x) = 0$ . Кроме того,  $f(f_1, f_2) = 1$ , поскольку  $f_1$  и  $f_2$  пересекаются в одной точке. Следовательно,  $\mathcal{A}(K) = q(f_1)q(f_2) = 1$ .

**Теорема 21.3.** *Пусть  $K_+$  и  $K_-$  — два узла, а  $L$  — двухкомпонентное зацепление, диаграммы которых совпадают всюду, кроме*

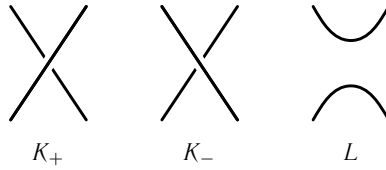


Рис. 63. Диаграммы двух узлов и зацепления

малого диска, а в этом диске устроены так, как показано на рис. 63. Тогда

$$\mathcal{A}(K_+) \equiv \mathcal{A}(K_-) + \text{lk}(L_1, L_2) \pmod{2},$$

где  $L_1$  и  $L_2$  — компоненты зацепления  $L$ .

Доказательство. Для  $K_+$  и  $K_-$  можно построить поверхности Зейферта  $F_+$  и  $F_-$ , которые над рассматриваемым малым диском устроены так, как показано на рис. 64, а в остальном совпадают. С их помощью можно построить поверхность  $F_0$  для зацепления  $L$ . Если эта поверхность окажется несвязной, то мы, чтобы получить поверхность Зейферта для  $L$ , ко всем трём поверхностям приклеим ручку, которая сделает поверхность  $F_0$  связной.

Пусть  $e_1, f_1, \dots, e_n, f_n$  — симплектический базис для формы  $q$  на пространстве  $H_1(F_0; \mathbb{Z}_2)$ . Дополним его до симплектического базиса циклами  $e_{n+1}$  и  $f_{n+1, \pm}$  (рис. 64); здесь цикл  $e_{n+1}$  представлен кривой  $L_1$ . Полоски,

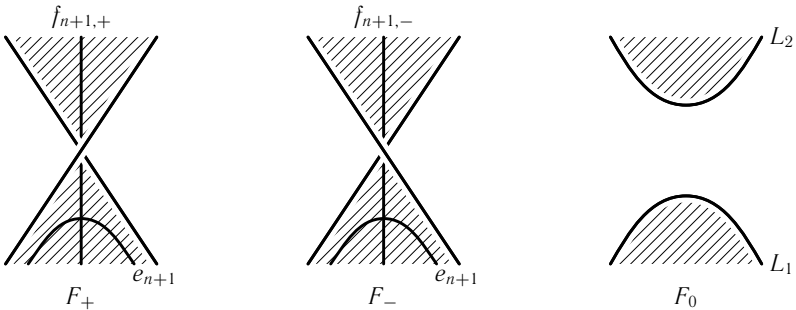


Рис. 64. Три поверхности Зейферта

соответствующие кривым  $f_{n+1,+}$  и  $f_{n+1,-}$ , отличаются ровно одним оборотом, поэтому  $q(f_{n+1,+}) - q(f_{n+1,-}) = 1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(K_+) - \mathcal{A}(K_-) &= q(e_{n+1})(q(f_{n+1,+}) - q(f_{n+1,-})) = \\ &= q(e_{n+1}) = \text{lk}(L_1^-, L_1) = \text{lk}(L_1, L - L_1) = \text{lk}(L_1, L_2). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 21.4. а) Для любого узла  $K$  имеет место сравнение  $\mathcal{A}(K) \equiv a_2(K) \pmod{2}$ , где  $a_2(K)$  — коэффициент при  $z^2$  полинома Конвея  $\nabla_K(z)$ ;

б) Для любого узла  $K$  имеет место равенство

$$\mathcal{A}(K) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Delta_K(-1) \equiv \pm 1 \pmod{8}; \\ 1, & \text{если } \Delta_K(-1) \equiv \pm 3 \pmod{8}, \end{cases}$$

где  $\Delta_K(t)$  — полином Александра в нормализации Конвея.

Доказательство. а) Если  $L_+$  и  $L_-$  — узлы, то  $L_0$  — двухкомпонентное зацепление. Согласно задаче 20.9 мы имеем  $a_2(L_+) - a_2(L_-) = \text{lk}(L_1, L_2)$ , где  $L_1$  и  $L_2$  — компоненты зацепления  $L$ . Согласно теореме 21.3 получаем  $\mathcal{A}(L_+) \equiv \mathcal{A}(L_-) + \text{lk}(L_1, L_2) \pmod{2}$ . Кроме того, если  $K$  — тривиальный узел, то  $a_2(K) = 0 = \mathcal{A}(K)$ . Следовательно,  $\mathcal{A}(K) \equiv a_2(K) \pmod{2}$  для любого узла  $K$ .

б) По определению  $\Delta_K(t) = \nabla_K(t^{-1/2} - t^{1/2})$ , поэтому  $\Delta_K(-1) = \nabla_K(-2i)$ . Согласно задаче 20.5 мы имеем  $\nabla_K(z) = 1 + a_2(K)z^2 + a_4(K)z^4 + \dots$ . Поэтому  $\nabla_K(-2i) \equiv 1 - 4a_2(K) \pmod{8}$ . Если  $a_2(K)$  чётно, то  $\nabla_K(-2i) \equiv 1 \pmod{8}$ , а если  $a_2(K)$  нечётно, то  $\nabla_K(-2i) \equiv -3 \pmod{8}$ . □

### 21.3. Заузленность вложений графа $K_7$

С помощью свойств инварианта Арфа Конвей и Гордон [СоЗ] доказали следующее утверждение.

Теорема 21.5. Любое вложение графа  $K_7$  в  $\mathbb{R}^3$  содержит нетривиальный узел.

Доказательство. Для каждого вложения графа  $K_7$  в  $\mathbb{R}^3$  определим  $\sigma \in \mathbb{Z}_2$  следующим образом:  $\sigma = \sum \mathcal{A}(C)$ , где суммирование ведётся по всем  $360 = \frac{6!}{2}$  циклам  $C$  длины 7, проходящим через все вершины графа  $K_7$ . Любое вложение графа  $K_7$  в  $\mathbb{R}^3$  можно преобразовать в данное вложение, если допускаются преобразования рёбер, изображённые на рис. 65. Покажем, что при таких преобразованиях  $\sigma$  не изменяется.

Вообще говоря, нужно рассмотреть три типа преобразований перекрёстков: пересечение ребра с самим собой, пересечение двух смежных

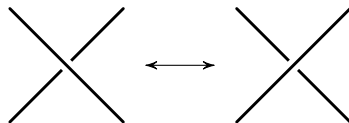


Рис. 65. Преобразование рёбер

рёбер, пересечение двух несмежных рёбер. Но рис. 66 показывает, что одно пересечение ребра с самим собой можно заменить на пять пересечений различных рёбер, поэтому достаточно рассмотреть только пересечения различных рёбер (смежных или несмежных).

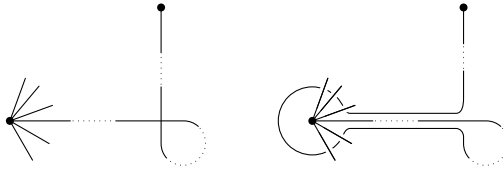


Рис. 66. Пересечение ребра с самим собой

Подтаскивая вершины рёбер\*), проекции которых пересекаются, к рассматриваемому перекрёстку, можно получить диаграмму такого вида, как на рис. 67. Здесь рис. 67 (а) относится к пересечению смежных рёбер, а рис. 67 (б) относится к пересечению несмежных рёбер (сам перекрёсток, конечно, может при этом быть и противоположного типа).

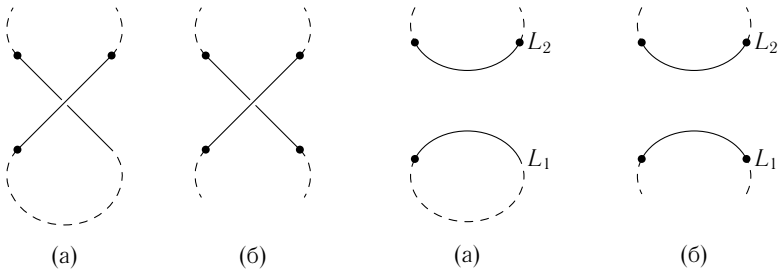


Рис. 67. Упрощение перекрёстка      Рис. 68. Две компоненты зацепления

Посмотрим, как изменяется  $\mathcal{A}(C)$  при изменении типа перекрёстка. Обозначим соответствующее изменение через  $\varepsilon(C)$ . Если цикл  $C$  не содержит хотя бы одного из двух рёбер на рассматриваемом перекрёстке, то  $\varepsilon(C) = 0$ . Пусть цикл  $C$  содержит оба эти ребра. Тогда согласно теореме 21.3 мы имеем  $\varepsilon(C) \equiv \text{lk}(L_1, L_2) \pmod{2}$ , где  $L_1$  и  $L_2$  — компоненты зацепления  $L$ , построение которого изображено на рис. 63 (см. с. 354).

Рассмотрим сначала случай, когда пересекаются смежные рёбра. В этом случае построение зацепления  $L = L_1 \cup L_2$  изображено на рис. 68 (а). Заметим, что при этом компонента  $L_1$  будет одной и той же для всех циклов  $C$ , содержащих рассматриваемые рёбра. Значит,

\*) Вместе с выходящими из них рёбрами.

$lk(L_1, L_2) = \sum_e \omega(L_1, e)$ , где суммирование ведётся по всем рёбрам  $e$  цикла  $C$ , отличным от двух рассматриваемых рёбер, а  $\omega(L_1, e)$  — это количество перекрёстков, на которых  $L_1$  проходит над  $e$ , с учётом их знаков. Далее, изменение  $\sigma$  равно  $\sum_C \sum_e \omega(L_1, e) \pmod{2}$ , где первая сумма берётся по циклам  $C$ , содержащим оба рассматриваемых ребра. Поэтому достаточно доказать, что каждое ребро  $e$  графа  $K_7$ , отличное от двух рассматриваемых рёбер, входит в чётное число циклов  $C$ . Возможны следующие случаи.

1. Ребро  $e$  и два рассматриваемых ребра либо выходят из одной вершины, либо образуют цикл. Тогда требуемых циклов  $C$  нет.
2. Ребро  $e$  имеет общую вершину ровно с одним из рассматриваемых рёбер. Тогда есть ровно 6 требуемых циклов  $C$ .
3. Ребро  $e$  не имеет общих вершин с рассматриваемыми рёбрами. Тогда есть ровно 12 требуемых циклов  $C$ .

Рассмотрим теперь случай, когда пересекаются несмежные рёбра. В этом случае построение зацепления  $L = L_1 \cup L_2$  изображено на рис. 68 (б). Теперь  $lk(L_1, L_2) = \sum \omega(e_1, e_2)$ , где суммирование ведётся по всем парам рёбер  $e_1 \subset L_1$  и  $e_2 \subset L_2$ .

Начнём нумерацию вершин графа  $K_7$  с концов двух рассматриваемых рёбер, причём так, как показано на рис. 69; стрелки указывают направление обхода цикла  $C$ . С точностью до перенумерации вершин рёбра  $e_1$  и  $e_2$ , принадлежащие  $L_1$  и  $L_2$ , могут быть следующими: а) (23), (45); б) (23), (56); в) (27), (45); г) (27), (56). Легко проверить, что в этих случаях циклы  $C$  могут быть следующими:

- а) (1234567), (1234576);
- б) (1234567), (1234657), (1234756), (1234765);
- в) (1273456), (1276345);
- г) (1273456), (1273465).

В каждом случае получается чётное число циклов  $C$ , поэтому  $\sigma$  не изменяется.

Несложная проверка показывает, что для вложения графа  $K_7$  в  $\mathbb{R}^3$ , изображённого на рис. 70, все циклы  $C$ , кроме одного, незаузлены. При этом заузленный цикл — трилистник, а для трилистника инвариант Арфа равен 1. Таким образом, для любого вложения  $\sigma = 1$ , поэтому обязательно найдётся заузленный цикл  $C$ .  $\square$

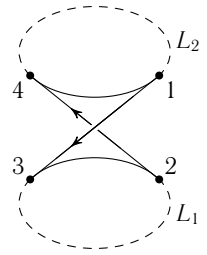


Рис. 69. Нумерация вершин графа

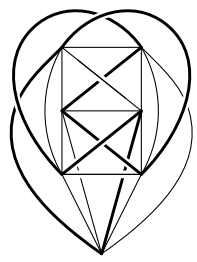


Рис. 70. Пример вложения

**З а м е ч а н и е.** В части I доказана теорема о том, что для любого вложения графа  $K_6$  в пространство  $\mathbb{R}^3$  найдётся пара зацепленных циклов (теорема 1.10). Она доказывается гораздо более просто, чем теорема 21.5 о заузленности цикла. Известно, что для любого зацепления можно выбрать натуральное число  $N$  так, что в любое множество из  $N$  точек в общем положении в пространстве  $\mathbb{R}^3$  можно вписать данное зацепление; простое доказательство этого факта приведено в [П5].

## § 22. Вложения и погружения

### 22.1. Сильная теорема Уитни о вложениях

В части I мы доказали слабые теоремы Уитни о вложениях и погружениях, а именно: любое  $n$ -мерное многообразие без края при  $n \geq 2$  можно погрузить в  $\mathbb{R}^{2n}$  и вложить в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Здесь мы докажем сильную теорему Уитни о вложениях: замкнутое многообразие  $M^n$  можно вложить в  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Доказательство сильной теоремы Уитни основано на том, что сначала строится *регулярное* погружение (погружение *общего положения*)  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , т. е. погружение, у которого нет тройных точек (иными словами, никакие три различные точки не отображаются в одну точку) и в каждой *двойной точке* (*точке самопересечения*)  $a = f(x) = f(y)$ , где  $x \neq y$ , выполняется равенство  $df(T_x M^n) \oplus df(T_y M^n) = T_a \mathbb{R}^{2n}$ .

Так называемый трюк Уитни позволяет уничтожить пару двойных точек. Если многообразие  $M^n$  ориентируемо и  $n$  чётно, то уничтожаемая пара точек должна быть определённым образом согласованной. Поэтому, чтобы уничтожить все двойные точки, иногда бывает нужно предварительно добавить несколько двойных точек.

#### Регулярные погружения

**Теорема 22.1.** Пусть  $M^n$  — замкнутое многообразие,  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  — погружение. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует регулярное погружение  $g: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , для которого  $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$  при всех  $x \in M^n$ .

**Доказательство.** Мы воспользуемся той же самой конструкцией, что и при доказательстве существования погружений (часть I, теорема 17.5), но теперь вместо замены  $\hat{f}_i(y) = \hat{f}_{i-1}(y) + Ay$  используется замена  $\hat{f}_i(y) = \hat{f}_{i-1}(y) + v$ , где  $v$  — достаточно малый постоянный вектор. Посмотрим сначала, что происходит в малой окрестности образа точки  $x \in M^n$ . Можно считать, что  $f(x) = 0$  и образ в  $\mathbb{R}^{2n}$  окрестности  $U_{i,1} \ni x$  локально, т. е. в некоторой окрестности  $V$ , задаётся уравнениями

$y_1 = 0, \dots, y_n = 0$ . Для многообразия  $f^{-1}(V)$  рассмотрим композицию отображений  $f^{-1}(V) \xrightarrow{f} V \xrightarrow{p} \mathbb{R}^n$ , где  $p(y_1, \dots, y_{2n}) = (y_1, \dots, y_n)$ . Пусть  $v' = (v_1, \dots, v_n)$  — регулярное значение этой композиции отображений, отличное от образов двойных точек, лежащих в  $V$ . Тогда  $n$ -мерное подпространство  $\Pi^n$ , заданное уравнениями  $y_1 = v_1, \dots, y_n = v_n$ , не проходит через двойные точки образа многообразия  $M^n$ , лежащие в  $V$ , и в каждой точке  $a \in \Pi^n \cap f(M^n) \cap V$  касательное пространство  $df(T_{f^{-1}(a)}M^n)$  дополнительно к  $\Pi^n$ , т. е. их прямая сумма имеет размерность  $2n$ . Это, в частности, означает, что  $\Pi^n$  и  $f(M^n) \cap V$  пересекаются в изолированных точках.

Таким образом, если добавить к каждой точке образа  $U_{i,1}$  вектор  $(v_1, \dots, v_n, 0, \dots, 0)$ , а все остальные части пересечения  $f(M^n) \cap V$  оставить на месте, то мы сможем распространить регулярное погружение на  $U_{i,1}$ .

Мы объяснили, что делается в  $U_{i,1}$ . Глобальное отображение, которое вне  $U_{i,2}$  остаётся прежним, строится с помощью колоколообразной функции  $\lambda$ , как это делалось при доказательстве слабой теоремы Уитни. Нужно только выбрать вектор  $v'$  достаточно малым, чтобы полученное отображение было погружением.  $\square$

Если замкнутое многообразие  $M^n$  регулярно погружено в  $\mathbb{R}^{2n}$ , то число двойных точек конечно. Действительно, предположим, что число двойных точек бесконечно. Пусть  $x_0$  — предельная точка их прообразов. У точки  $x_0$  есть окрестность  $U$ , образ которой несамопересекающийся. Пусть  $\{x_i\}$  — сходящаяся к  $x_0$  последовательность прообразов двойных точек, лежащих в  $U$ . Все соответствующие им точки  $y_i$  лежат вне  $U$ . Пусть  $y_0$  — их предельная точка. Выбрав для точки  $y_0$  окрестность, образ которой пересекает образ окрестности  $U$  не более чем в одной точке, приходим к противоречию.

### Двойные точки

Пусть  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  — регулярное погружение,  $a = f(x) = f(y)$  — двойная точка. Если многообразие  $M^n$  ориентируемо и  $n$  чётно, то точке  $a$  можно сопоставить *индекс самопересечения* следующим образом. Заддим на  $M^n$  ориентацию и выберем положительно ориентированные базисы  $df(T_x M^n)$  и  $df(T_y M^n)$ . Из этих базисов составим базис пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ , записав сначала первый базис, а потом второй. Если ориентация полученного базиса положительна (отрицательна), то индекс самопересечения равен  $1$  ( $-1$ ). Индекс самопересечения не зависит от выбора ориентации многообразия  $M^n$ , потому что если одновременно изменить ориентации базисов  $df(T_x M^n)$  и  $df(T_y M^n)$ , то ориентация составленного из них базиса пространства  $\mathbb{R}^{2n}$  не изменится. Не меняется индекс самопересечения и при



перестановке точек  $x$  и  $y$ . Действительно, чтобы поменять местами первые  $n$  векторов и последние  $n$  векторов, нужно сделать  $n^2$  транспозиций.

*Индексом самопересечения* регулярного погружения  $f$  будем называть сумму индексов самопересечения для всех двойных точек. Если  $n$  нечётно или многообразие  $M^n$  неориентируемо, то мы не можем определить знак индекса самопересечения для двойной точки, поэтому в этих случаях индексом самопересечения погружения  $f$  будем называть остаток от деления на 2 общего числа двойных точек. Индекс самопересечения регулярного погружения  $f$  будем обозначать  $I_f$ .

**Теорема 22.2.** Пусть  $M^n$  — замкнутое многообразие. Тогда существует регулярное погружение  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , для которого  $I_f$  принимает любое заданное значение (предполагается, что если  $M^n$  ориентируемо и  $n$  чётно, то  $I_f \in \mathbb{Z}$ , а во всех остальных случаях  $I_f \in \mathbb{Z}_2$ ).

**Доказательство.** Сначала построим регулярное погружение  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  с одной точкой самопересечения. При  $n = 1$  положим  $y_1 = x - \frac{2x}{1+x^2}$ ,  $y_2 = \frac{1}{1+x^2}$  (рис. 71). Точки  $x = \pm 1$  переходят в точку  $(0, 1/2)$ ; других точек самопересечения нет. Матрица Якоби рассматриваемого отображения имеет вид

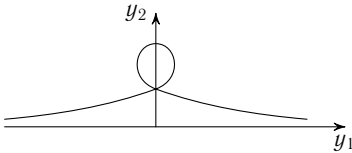


Рис. 71. Точка самопересечения

$\left(1 - 2\frac{1-x^2}{1+x^2}, -\frac{2x}{1+x^2}\right)$ ; она нигде не обращается в нуль, а при  $x = \pm 1$  получаем линейно независимые матрицы  $(1, \mp 1)$ .

Для  $n \geq 2$  зададим отображение формулами  $y_1 = x_1 - \frac{2x_1}{X}$ ,  $y_i = x_i$  при  $i = 2, \dots, n$ , где  $X = (1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2)$ ,

$y_{n+1} = \frac{1}{X}$ ,  $y_{n+i} = \frac{x_i x_i}{X}$  при  $i = 2, \dots, n$ , где  $X = (1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2)$ . Проверим, что это отображение — регулярное погружение с единственной точкой самопересечения. Матрица Якоби этого отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - 2\frac{1-x_1^2}{X(1+x_1^2)} & \frac{4x_1x_2}{X(1+x_2^2)} & \dots & \frac{4x_1x_n}{X(1+x_n^2)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{2x_1}{X(1+x_1^2)} & -\frac{2x_2}{X(1+x_2^2)} & \dots & -\frac{2x_n}{X(1+x_n^2)} \\ \frac{x_2(1-x_1^2)}{X(1+x_1^2)} & \frac{x_1(1-x_2^2)}{X(1+x_2^2)} & \dots & -\frac{2x_1x_2x_n}{X(1+x_n^2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x_n(1-x_1^2)}{X(1+x_1^2)} & -\frac{2x_1x_2x_n}{X(1+x_2^2)} & \dots & \frac{x_1(1-x_n^2)}{X(1+x_n^2)} \end{pmatrix}.$$

Последние  $n$  элементов первого столбца равны 0 тогда и только тогда, когда  $x_1 = \dots = x_n = 0$ . Но в этом случае  $1 - 2\frac{1 - x_1^2}{X(1 + x_1^2)} = -1 \neq 0$ . Значит, матрица Якоби в любой точке имеет ранг  $n$ .

Найдём теперь все пары точек  $(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_n)$ , для которых  $y'_i = y_i$  для всех  $i$ . Равенства  $y_i = x_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , показывают, что  $x'_i = x_i$  при  $i = 2, \dots, n$ . Далее,  $y'_{n+1} = y_{n+1}$ , поэтому  $X' = X$ , а значит,  $(x'_1)^2 = x_1^2$ , т. е.  $x'_1 = \pm x_1$ . Таким образом,  $x'_1 = -x_1 \neq 0$ . Теперь равенство  $y_{n+i} = \frac{x_1 x_i}{X}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , показывает, что  $x_2 = \dots = x_n = 0$ . Значит,  $X = 1 + x_1^2$ . Поэтому  $y_1 = x_1 - \frac{2x_1}{1 + x_1^2}$  и  $y'_1 = -y_1$ . Значит,  $y_1 = 0$  и  $x_1^2 = 1$ . В итоге получаем, что только точки  $(\pm 1, 0, \dots, 0)$  отображаются в одну и ту же точку.

Матрицы Якоби в точках  $(\pm 1, 0, \dots, 0)$  имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \mp 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm 1/2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \pm 1/2 \end{pmatrix}.$$

Из этих двух матриц складывается матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1/2 & 0 & \dots & 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & \dots & 0 & 0 & -1/2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/2 & 0 & 0 & \dots & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица невырожденная, поэтому погружение регулярное.

Непосредственно из определения индекса самопересечения (в случае чётного  $n$  и ориентируемого многообразия  $M^n$ ) видно, что если изме-

нить ориентацию пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ , то индекс самопересечения изменит знак. Поэтому, используя только что построенное регулярное погружение и его композицию с симметрией пространства  $\mathbb{R}^{2n}$  относительно гиперплоскости, можно построить два регулярных погружения с одной точкой самопересечения, которая для одного отображения имеет индекс  $+1$ , а для другого  $-1$ .

Пусть  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  — регулярное погружение,  $U \subset M^n$  — достаточно малая окрестность, которая гомеоморфна  $\mathbb{R}^n$  и ограничение  $f$  на которую является вложением. Легко строится регулярное погружение  $g$ , которое совпадает с  $f$  вне  $U$ , причём множества  $g(\text{int } U)$  и  $f(M^n \setminus \text{int } U)$  не пересекаются, а образ  $g(U)$  имеет единственную точку самопересечения, причём индекс самопересечения для этой точки имеет предписанный знак (для чётного  $n$  и ориентируемого многообразия  $M^n$ ). При этом по сравнению с  $f$  погружение  $g$  имеет ровно одну дополнительную точку. Эта конструкция позволяет доказать требуемое утверждение.  $\square$

### Трюк Уитни

Чтобы доказать сильную теорему Уитни о вложениях, остаётся научиться уничтожать пару точек самопересечения многообразия  $M^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$  (если многообразие  $M^n$  ориентируемо и  $n$  чётно, то предполагается, что индексы самопересечения для этих двойных точек имеют противоположные знаки). Отметим, что трюк Уитни работает лишь при  $n \geq 3$ . Доказательство теоремы Уитни о вложениях в случае  $n = 2$  требует отдельного рассуждения (см. с. 367). В дальнейшем мы будем предполагать, что  $n \geq 3$ .

Пусть  $p$  и  $q$  — две точки самопересечения для регулярного погружения  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . Рассмотрим  $f^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$  и  $f^{-1}(q) = \{q_1, q_2\}$ . Соединим на многообразии  $M^n$  точку  $p_i$  с точкой  $q_i$  путём  $\bar{\gamma}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Пусть  $\gamma_i = f(\bar{\gamma}_i)$ . Можно считать, что кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  несамопересекающиеся, причём они пересекаются друг с другом только в точках  $p$  и  $q$ .

Прежде всего покажем, что на  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  можно натянуть вложенный диск, трансверсальный  $f(M^n)$ . Точнее говоря, пусть  $\tau$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^2$  с двумя точками излома (рис. 72),  $\tau'$  — его открытая  $\varepsilon$ -окрестность. Тогда существует вложение  $\psi: \tau' \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , обладающее следующими свойствами:

- 1) точки излома переходят в  $p$  и  $q$ ;
- 2)  $\psi(\tau') \cap f(M^n) = \gamma_1 \cup \gamma_2$ ;
- 3) для любой точки кривой  $\gamma_1 \cup \gamma_2$ , отличной от  $p$  и  $q$ , касательное пространство  $T_x \psi(\tau')$  не содержится целиком в  $T_x f(M^n)$ .

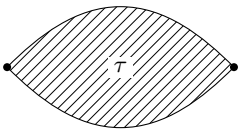


Рис. 72. Область  $\tau$

Требуемое отображение  $\psi$  строится следующим образом. Построим на  $\gamma_1$  векторное поле в  $\mathbb{R}^{2n}$ , трансверсальное  $f(M_1^n)$ , где  $M_1^n$  — малая окрестность кривой  $\bar{\gamma}_1$  в  $M^n$ . В качестве векторов в точках  $p$  и  $q$  возьмём касательные векторы к кривой  $\gamma_2$ , направленные навстречу друг другу (рис. 73). Они трансверсальны  $f(M_1^n)$ , поскольку  $f(M_2^n)$  трансверсально  $f(M_1^n)$ . Рассмотрим над кривой  $\gamma_1$  следующее расслоение: слой над точкой  $x$  — это пространство  $\mathbb{R}^{2n} \setminus T_x M^n \sim S^{n-1}$ . Это расслоение тривиально, поскольку его база — отрезок. В концах кривой  $\gamma_1$  задано сечение рассматриваемого расслоения. Пространство  $S^{n-1}$  линейно связно, поэтому заданное сечение можно продолжить на всю кривую  $\gamma_1$ . В результате получим требуемое векторное поле. Аналогично построим векторное поле на кривой  $\gamma_2$ .

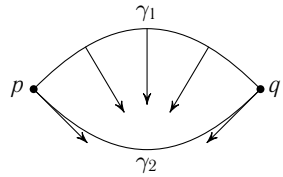


Рис. 73. Векторное поле на  $\gamma_1$

Вне малых окрестностей точек  $p$  и  $q$  рассмотрим концы векторов вида  $tv(x)$ , где  $x \in \gamma_1 \cup \gamma_2$ ,  $v(x)$  — построенный вектор в точке  $x$ ,  $|t| \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  — фиксированное достаточно малое положительное число). А в малых окрестностях точек  $p$  и  $q$  рассмотрим части плоскостей, натянутых на касательные векторы к кривым  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . При построении векторных полей в точках  $p$  и  $q$  мы брали как раз касательные векторы

к кривым  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , поэтому, слегка пошевелив рассматриваемые поверхности, из них можно склеить поверхность, представляющую собой вложение малой окрестности края диска  $\tau$  (рис. 74). Условие трансверсальности при этом выполняется.

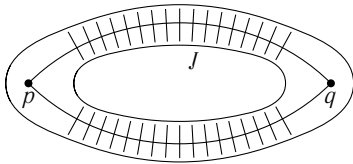


Рис. 74. Вложение окрестности края диска  $\tau$

К внутренней части полученной плоскости (кривая  $J$  на рис. 74) можно приклеить диск  $D^2$ , поскольку любое непрерывное отображение  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  можно

продолжить до непрерывного отображения  $D^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . Пользуясь тем, что  $2n > 5$ , построенное отображение  $D^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  можно аппроксимировать гладким вложением, не изменяя его вблизи  $\gamma_1 \cup \gamma_2$ . Затем, пользуясь тем, что  $2 + n < 2n$ , можно устранить все возникшие при этом пересечения  $f(M^n)$  с образом диска  $D^2$ . Требуемое отображение  $\psi$  построено.

Перейдём теперь к следующему шагу — построению ортонормированной системы векторных полей  $\omega_3, \dots, \omega_{2n}$  на диске  $\psi(\tau)$ , ортогональных  $\psi(\tau)$ . При этом для начала мы будем предполагать, что  $n$  чётно,  $M^n$  ориентируемо и индексы самопересечения для точек  $p$  и  $q$  имеют противоположные знаки.

Рассмотрим ограничение на  $\gamma_1$  касательного расслоения многообразия  $M^n$  и возьмём в нём ортогональное дополнение к касательному расслоению кривой  $\gamma_1$ . В результате получим  $(n - 1)$ -мерное расслоение. Это расслоение тривиально, поскольку его база — отрезок. Поэтому можно выбрать линейно независимые сечения  $\omega_3, \dots, \omega_{n+1}$  полученного расслоения. Аналогично можно выбрать векторные поля  $\omega_{n+2}, \dots, \omega_{2n}$  на кривой  $\gamma_2$ . При этом в точках  $p$  и  $q$  есть все  $2n - 2$  векторов  $\omega_3, \dots, \omega_{2n}$ , но в этих точках они задают противоположные ориентации нормального расслоения диска  $\psi(\tau)$ . Действительно, если мы перенесём вдоль кривых

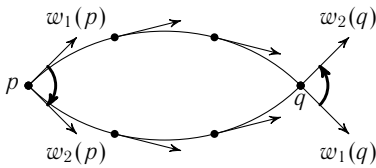


Рис. 75. Изменение ориентации

$\gamma_1$  и  $\gamma_2$  касательные к ним векторы, то в точках  $p$  и  $q$  получим противоположно ориентированные базисы касательных пространств  $T_p\psi(\tau)$  и  $T_q\psi(\tau)$  (рис. 75).

Для удобства будем предполагать, что кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  не просто трансверсальны  $TM_2^n$  и  $TM_1^n$ , а ортогональны.

На кривой  $\gamma_1$  заданы векторные поля  $\omega_3, \dots, \omega_{n+1}$ . Рассмотрим расслоение над кривой  $\gamma_1$ , слоем которого над точкой  $x$  служит  $(n - 1)$ -мерное подпространство, ортогональное векторам  $\omega_3(x), \dots, \omega_{n+1}(x)$  и касательному пространству  $T_x\psi(\tau)$ . В точках  $p$  и  $q$  заданы векторы  $\omega_{n+2}, \dots, \omega_{2n}$  — ортонормированные сечения этого расслоения. Эти сечения нужно продолжить на всю кривую  $\gamma_1$ . Распространим сначала одно сечение  $\omega_{n+2}$ . Это можно сделать, поскольку расслоение тривиально и слой  $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \sim S^{n-2}$  связан. Затем будем распространять сечение ортогонального дополнения того, что получилось, и т. д. При распространении сечения  $\omega_{2n-1}$  слоем будет  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \sim S^1$ . Когда мы попытаемся распространить сечение  $\omega_{2n}$ , слоем будет несвязное множество  $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ . Чтобы сечение можно было распространить, нужна согласованность ориентаций, но в нашем случае ориентации согласованы.

Теперь на кривой  $\gamma_1$  есть векторы  $\omega_3, \dots, \omega_{2n}$ , а на кривой  $\gamma_2$  есть векторы  $\omega_{n+2}, \dots, \omega_{2n}$ . Согласно теореме 11.4 имеем  $\pi_1(V(2n - 2, n - 1)) = 0$  при  $1 < (2n - 2) - (n - 1)$ , т. е.  $n > 2$ . Поэтому векторные поля  $\omega_{n+2}, \dots, \omega_{2n}$  можно распространить на весь диск  $\psi(\tau)$ . В каждой точке  $x \in \psi(\tau)$  рассмотрим ортогональное дополнение к векторам  $\omega_{n+2}, \dots, \omega_{2n}$  и к касательному пространству  $T_x\psi(\tau)$ . На кривой  $\gamma_1$  заданы сечения  $\omega_3, \dots, \omega_{n+1}$  этого расслоения. Каждую точку диска  $\psi(\tau)$  можно представить в виде  $\gamma_t(s)$ , где  $1 \leq s, t \leq 2$ . Распространим сечения  $\omega_3, \dots, \omega_{n+1}$ , заданные в точке  $\gamma_1(s)$ , на кривую  $\gamma_t(s)$ , где  $s$  фиксировано, а  $t$  меняется, как постоянные сечения тривиального расслоения. В результате получим требуемые векторные поля  $\omega_3, \dots, \omega_{n+1}$  на диске  $\psi(\tau)$ .

Теперь уже можно непосредственно перейти к доказательству сильной теоремы Уитни о вложениях. Будем считать, что  $\tau \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{2n}$ . Продолжим вложение  $\psi: \tau \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  до отображения малой окрестности  $\tau$  в  $\mathbb{R}^{2n}$  следующим образом. Для  $x = (x_1, \dots, x_{2n})$  положим

$$\psi(x) = \psi(\bar{x}) + \sum_{i=3}^{2n} x_i \omega_i(\psi(\bar{x})), \quad \text{где } \bar{x} = (x_1, x_2).$$

Из того, что в точке  $x \in \psi(\tau)$  векторы  $\omega_3, \dots, \omega_{2n}$  образуют базис ортогонального дополнения к касательному пространству  $T_x \psi(\tau)$ , следует, что в точке  $x$  якобиан отображения  $\psi$  отличен от нуля. Поэтому  $\psi$  представляет собой диффеоморфизм некоторой окрестности  $U$  диска  $\psi(\tau)$  на область в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Положим  $N_1^n = \psi^{-1}(f(M_1^n))$  и  $N_2^n = \psi^{-1}(f(M_2^n))$ . Наша цель — продеформировать  $N_1^n$  в области  $U$  так, чтобы уничтожились две точки пересечения с  $N_1^n$  и при этом не появилось бы никаких новых точек пересечения.

Чтобы описать требуемую деформацию, удобно считать, что прообраз кривой  $\gamma_1$  при отображении  $\psi$  лежит на оси  $x_1$  (рис. 76). Более того, мы

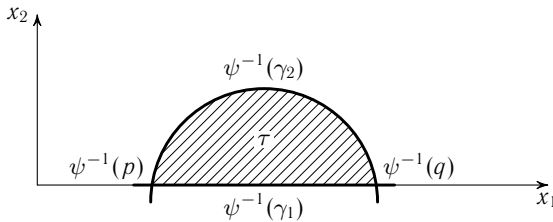


Рис. 76. Расположение диска  $\tau$

будем считать, что кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  естественным образом продолжены до выхода из малой окрестности диска  $\psi(\tau)$  и на этих продолжениях векторные поля  $\omega_3, \dots, \omega_{2n}$  построены так же, как и на самих кривых.

В каждой точке  $x \in \psi^{-1}(\gamma_1)$  касательное пространство  $T_x N_1^n$  представляет собой плоскость  $(x_1, x_3, \dots, x_{n+1})$ , поэтому  $N_1^n$  мало отличается от этой плоскости. После малого шевеления, тождественного вне малой окрестности кривой  $\psi^{-1}(\gamma_1)$ , можно считать, что  $N_1^n$  совпадает с частью этой плоскости (для этого, возможно, вместо  $U$  придётся взять некоторую меньшую окрестность кривой  $\psi^{-1}(\gamma_1)$ ). Аналогично можно считать, что  $N_2^n$  совпадает с частью многообразия, которое получается при проведении из каждой точки кривой  $\psi^{-1}(\gamma_2)$  и её продолжения всех векторов пространства  $(x_{n+2}, \dots, x_{2n})$ . Рассмотрим проекцию

$$\pi: (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n}) \mapsto (x_1, 0, x_3, \dots, x_{2n}).$$

Ясно, что  $\pi(N_1^n) = N_1^n$  и  $\pi(N_2^n)$  лежит в пространстве  $(x_1, x_{n+2}, \dots, x_{2n})$ . Поэтому множество  $N_1^n \cap \pi(N_2^n)$  лежит на оси  $x_1$ .

Применим к  $N_2^n$  следующую деформацию, тождественную вне  $\varepsilon$ -окрестности диска  $\tau$ . Во-первых, все точки  $N_2^n$  сдвигаются параллельно оси  $x_2$ , поэтому множество  $\pi(N_2^n)$  не изменяется. Кривая  $\psi^{-1}(\gamma_2)$  и её продолжение сдвигаются в область  $x_2 < 0$  (рис. 77). Для остальных точек  $(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \in N_2^n$  вектор сдвига определяется так: вектор сдвига для точки  $(x_1, x_2, 0, \dots, 0)$  умножается на  $\lambda(x_3^2 + \dots + x_{2n}^2)$ , где  $\lambda(0) = 1$  и  $\lambda(t) = 0$  при  $t > \varepsilon^2$ .

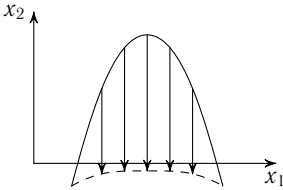


Рис. 77. Трюк Уитни

При проекции  $\pi$  точки пересечения  $N_1^n$  и  $N_2^n$  переходят в точки пересечения  $N_1^n$  и  $\pi(N_2^n)$ , поэтому если в плоскости  $(x_1, x_2)$  нет точек пересечения многообразия  $N_1^n$  и деформированного многообразия  $N_2^n$ , то у них вообще нет точек пересечения. Ясно также, что если  $\varepsilon$  достаточно мало, то образ  $\varepsilon$ -окрестности диска  $\tau$  при отображении  $\psi$  не содержит других частей многообразия  $f(M^n)$ . Поэтому новых точек самопересечения не появляется.

В случае, когда индексы самопересечения для точек  $p$  и  $q$  имеют противоположные знаки, теорема Уитни полностью доказана. В случае, когда многообразие  $M^n$  неориентируемо либо многообразие  $M^n$  ориентируемо и  $n$  нечётно, основная конструкция та же самая. Но чтобы её применить, возможно, придётся изменить кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Нам нужно, чтобы при переносе пары нормальных пространств к  $N_1^n$  и  $N_2^n$  из точки  $p$  в точку  $q$  вдоль кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  изменялась ориентация пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ , заданная ориентациями этой упорядоченной пары пространств. Если эта ориентация не изменяется, то в случае неориентируемого многообразия  $M^n$  к одной из кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  можно добавить участок, при обходе вдоль которого изменяется ориентация (изменение ориентации касательного пространства влечёт изменение ориентации нормального пространства). В случае ориентируемого многообразия  $M^n$  нечётной размерности  $n > 1$  кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  надо заменить на кривые  $\gamma'_1$  и  $\gamma'_2$ , где  $\gamma'_1$  выходит из точки  $p$  по кривой  $\gamma_1$ , а приходит в точку  $q$  по кривой  $\gamma_2$  ( $\gamma'_2$  выходит по  $\gamma_2$ , а приходит по  $\gamma_1$ ). В результате произойдёт перестановка пространств в упорядоченной паре, а это в случае нечётного  $n$  приводит к изменению ориентации.

**З а м е ч а н и е.** Аналогичными рассуждениями можно доказать, что при  $n > 2$  любое непрерывное отображение  $S^n \rightarrow M^{2n}$ , где  $M^{2n}$  — односвязное многообразие, гомотопно вложению. Но оказывается, не любое отображение  $S^2 \rightarrow M^4$ , где  $M^4$  — односвязное многообразие, гомотопно вложению. Соответствующий пример приведён в [Kel].

Докажем теперь, что любое замкнутое двумерное многообразие можно вложить в  $\mathbb{R}^4$ . Ясно, что сферу с  $g$  ручками можно вложить даже в  $\mathbb{R}^3$ . Ясно также, что если  $M_2^1$  и  $M_2^2$  можно вложить в  $\mathbb{R}^4$ , то связную сумму  $M_2^1 \# M_2^2$  тоже можно вложить в  $\mathbb{R}^4$ . Поэтому достаточно доказать, что  $\mathbb{R}P^2$  можно вложить в  $\mathbb{R}^4$ .

Вложение  $\mathbb{R}P^2$  в  $\mathbb{R}^4$  можно построить следующим образом. Рассмотрим отображение единичной сферы  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  в  $\mathbb{R}^4$ , заданное формулой  $(x, y, z) \mapsto (xy, yz, zx, x^2 - y^2)$ . Покажем, что это отображение индуцирует вложение  $\mathbb{R}P^2$  в  $\mathbb{R}^4$ , т. е. оно является погружением и прообраз каждой точки состоит в точности из двух диаметрально противоположных точек сферы.

Докажем сначала утверждение о прообразе. Если  $abc \neq 0$ , то из равенств  $xy = a$ ,  $yz = b$ ,  $zx = c$  следует, что  $x = \pm\sqrt{ac/b}$ ,  $y = a/x$ ,  $z = c/x$ . Если  $a = b = c = 0$ , то два из чисел  $x, y, z$  равны 0, а третье равно  $\pm 1$ . Остаётся рассмотреть случай, когда два из чисел  $a, b, c$  равны 0, а третье число отлично от нуля. Этот случай соответствует тому, что одно из чисел  $x, y, z$  равно 0, а два других отличны от нуля. Теперь нам нужно привлечь равенство  $x^2 - y^2 = d$  (или эквивалентное ему равенство  $2x^2 + z^2 = 1 + d$ ). Если  $x = 0$ , то  $y = \pm\sqrt{-d}$  и  $z = b/y$ . Если  $y = 0$ , то  $x = \pm\sqrt{d}$  и  $z = c/x$ . Если  $z = 0$ , то  $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+d}$  и  $y = a/x$ .

Докажем теперь, что построенное отображение  $f: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  является погружением, т. е. в каждой точке  $(x, y, z) \in S^2$  матрица Якоби этого отображения имеет ранг 2. Проективную плоскость можно покрыть тремя картами с координатами  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  и  $(y, z)$ ; в этих картах  $z \neq 0$ ,  $y \neq 0$  и  $x \neq 0$  соответственно. В первой карте матрица Якоби отображения  $f$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} y & -\frac{x}{z} & z - \frac{x^2}{z} & 2x \\ x & z - \frac{y^2}{z} & -\frac{y}{z} & -2y \end{pmatrix}.$$

Матрица, образованная первым и последним столбцом, вырождена тогда и только тогда, когда  $x^2 + y^2 = 0$ , т. е.  $x = y = 0$  и  $z = \pm 1$ . Но в таком случае матрица, образованная вторым и третьим столбцом, невырождена. Во второй карте матрица Якоби отображения  $f$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\frac{x}{y} & y - \frac{x^2}{y} & z & 4x \\ y - \frac{z^2}{y} & -\frac{z}{y} & x & 2z \end{pmatrix}.$$

При этом нас интересуют лишь те точки, для которых  $z = 0$ . В таком случае матрица, образованная двумя последними столбцами, невырождена при



$x \neq 0$ . А если  $z = 0$  и  $x = 0$ , то матрица, образованная двумя первыми столбцами, невырожденна. Для третьей карты невырожденность матрицы Якоби в точке  $x = \pm 1, y = z = 0$  доказывается аналогично.

## 22.2. Нормальная степень погружения

Пусть  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  — погружение замкнутого связного ориентированного многообразия. Из ориентированности многообразия  $M^n$  следует, что в каждой точке  $x \in f(M^n)$  однозначно определён единичный нормальный вектор  $N(x)$ . Поэтому отображение  $f$  индуцирует гауссово отображение  $N: M^n \rightarrow S^n$ . Степень этого отображения называют *нормальной степенью* погружения  $f$ . Задачей о том, какой может быть нормальная степень погружения  $f$ , занимались, в частности, Хопф [Ho1], [Ho2] и Милнор [Mi2]. Здесь мы изложим некоторые из их результатов.

Прежде всего заметим, что если нормальная степень погружения  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  равна  $d$ , то степень погружения  $sf$ , где  $s: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  — симметрия относительно гиперплоскости, равна  $(-1)^n d$ . Действительно, если  $e_1, \dots, e_n, N(x)$  — положительно ориентированный базис, то  $se_1, \dots, se_n, sN(x)$  — отрицательно ориентированный базис, поскольку отображение  $s$  изменяет ориентацию. Значит, для отображения  $sf$  новое отображение  $M^n \rightarrow S^n$  представляет собой композицию старого отображения  $N: M^n \rightarrow S^n$  и отображения  $-s|_{S^n}$ . Отображение  $s|_{S^n}$  имеет степень  $-1$ , а антиподальное отображение  $S^n \rightarrow S^n$  имеет степень  $(-1)^{n-1}$ .

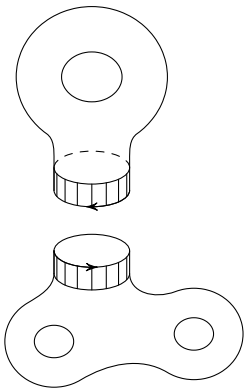


Рис. 78. Связная сумма

Для двух ориентированных многообразий  $M_1^n$  и  $M_2^n$  можно построить ориентированное многообразие  $M_1^n \# M_2^n$ , называемое их *связной суммой*. Это делается следующим образом. Пусть  $D_1^n \subset M_1^n$  и  $D_2^n \subset M_2^n$  — единичные шары, вложенные в эти многообразия. Вырежем из этих шаров шары радиуса  $1/2$ , а оставшиеся цилиндры  $I \times S_1^{n-1}$  и  $I \times S_2^{n-1}$  склеим с сохранением ориентации (рис. 78). Опишем эту конструкцию более формально. Пусть  $i_1: D^n \rightarrow M_1^n$  и  $i_2: D^n \rightarrow M_2^n$  — вложения, причём  $i_1$  сохраняет ориентацию, а  $i_2$  изменяет ориентацию. Возьмём  $M_1^n \setminus i_1(0)$  и  $M_2^n \setminus i_2(0)$  и отождествим точку  $i_1(tu)$  с точкой  $i_2((1-t)u)$  для каждого единичного вектора  $u$  и каждого  $t$ , где  $0 < t < 1$ . Отображение  $i_1(tu) \mapsto i_2((1-t)u)$  сохраняет ориентацию, поэтому в полученном многообразии  $M_1^n \# M_2^n$  можно выбрать

ориентацию, согласованную с ориентациями многообразий  $M_1^n$  и  $M_2^n$ . Ясно, что  $M^n \# S^n \approx M^n$ ; в частности,  $S^n \# S^n \approx S^n$ .

**Теорема 22.3.** *Если  $M_1^n$  и  $M_2^n$  можно погрузить в  $\mathbb{R}^{n+1}$  с нормальными степенями  $d_1$  и  $d_2$ , то  $M_1^n \# M_2^n$  можно погрузить в  $\mathbb{R}^{n+1}$  с нормальной степенью  $d_1 + d_2 - 1$ .*

**Доказательство.** Возьмём произвольные точки  $x_1 \in M_1^n$  и  $x_2 \in M_2^n$ . Переместим многообразие  $M_2^n$  посредством собственного евклидова движения пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$  так, чтобы нормальные векторы в точках  $x_1$  и  $x_2$  были направлены навстречу друг другу (рис. 79); это нуж-

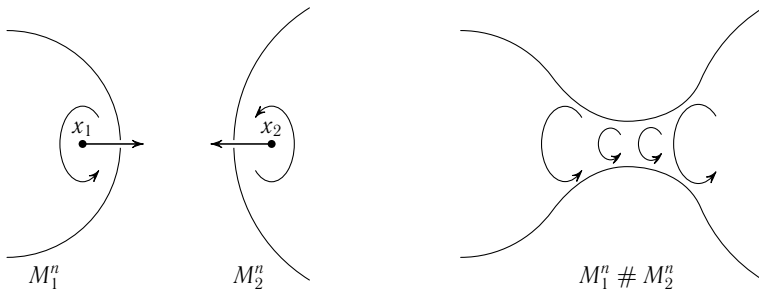


Рис. 79. Погружение связной суммы

но для согласованности ориентаций. После этого можно сделать перестройку и получить погружение многообразия  $M_1^n \# M_2^n$ . Чтобы вычислить нормальную степень этого погружения, достаточно проследить, сколько раз принимается какое-то определённое значение при отображении  $M_1^n \# M_2^n \rightarrow S^n$ . Удобно проследить за значением  $N(x_1)$ . Если предварительно пошевелить многообразие  $M_1^n$ , то можно считать, что в точке  $x_1$  значение  $N(x_1)$  при отображении  $M_1^n \rightarrow S^n$  даёт вклад  $+1$ . Это соответствует тому, что в окрестности точки  $x_1$  многообразие  $M_1^n$  выглядит как сфера и  $N(x_1)$  — внешняя нормаль к этой сфере. В такой ситуации при перестройке новых значений  $N(x_1)$  не появляется. Таким образом, остаются все значения  $N(x_1)$  отображений  $M_1^n \rightarrow S^n$  и  $M_2^n \rightarrow S^n$ , кроме значения в точке  $x_1$ . В результате получаем, что нормальная степень построенного погружения равна  $d_1 + d_2 - 1$ .  $\square$

**Теорема 22.4 (Хопф).** *При нечётном  $n$  сферу  $S^n$  можно погрузить в  $\mathbb{R}^{n+1}$  с произвольной нечётной нормальной степенью.*

**Доказательство.** Применив симметрию относительно гиперплоскости, построим погружение  $S^n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$  с нормальной степенью  $-1$ . Возьмём два экземпляра так погружённой сферы и применим теорему 22.3. В результате получим погружение многообразия  $S^n \# S^n \approx S^n$  с нор-

мальной степенью  $(-1) + (-1) - 1 = -3$ . Затем построим погружение  $S^n$  с нормальной степенью  $(-3) + (-1) - 1 = -5$  и т. д.

Мы построили погружения  $S^n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$  со всеми отрицательными нечётными степенями. Применяв симметрию относительно гиперплоскости, получим погружения со всеми положительными нечётными степенями.  $\square$

*С л е д с т в и е.* Пусть  $n$  нечётно и многообразие  $M^n$  погружено в  $\mathbb{R}^{n+1}$  с нормальной степенью  $d$ . Тогда  $M^n$  можно погрузить в  $\mathbb{R}^{n+1}$  с любой нормальной степенью, имеющей ту же самую чётность, что и  $d$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Возьмём погружение сферы  $S^n$  в нормальной степени  $2k + 1$  и построим погружение многообразия  $M^n \approx M^n \# S^n$  с нормальной степенью  $d + 2k$ .  $\square$

*Т е о р е м а 22.5.* Если замкнутое ориентированное многообразие  $M^n$  можно погрузить в  $\mathbb{R}^{n+1}$  с нулевой нормальной степенью, то  $M^n$  параллелизуемо.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Легко проверить, что  $TM^n = N_*(TS^n)$ , т. е. касательное расслоение многообразия  $M^n$  индуцировано из касательного расслоения сферы  $S^n$  посредством отображения  $N: M^n \rightarrow S^n$ . Действительно,  $N_*(TS^n)$  состоит из пар  $(x, v)$ , где  $x \in M^n$  и  $v \perp N(x)$ .

Если степень отображения  $N: M^n \rightarrow S^n$  равна нулю, то согласно теореме Хопфа отображение  $N$  гомотопно постоянному отображению. Отображение, гомотопное постоянному отображению, индуцирует тривиальное расслоение.  $\square$

*С л е д с т в и е.* Предположим, что многообразию  $M^n$  не параллелизуемо и  $n$  нечётно. Тогда если  $M^n$  можно погрузить в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , то его можно погрузить в  $\mathbb{R}^{n+1}$  с любой нечётной нормальной степенью, но нельзя погрузить в  $\mathbb{R}^{n+1}$  ни с какой чётной нормальной степенью.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Помимо теоремы 22.5 нужно воспользоваться следствием теоремы 22.4.  $\square$

*З а д а ч а 22.1.* Докажите, что если сфера  $S^n$  параллелизуема, то любое замкнутое ориентируемое многообразие  $M^n$ , которое можно погрузить в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , тоже параллелизуемо.

Вложение многообразия  $M^n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$  является, в частности, погружением. Поэтому для вложения тоже можно рассмотреть нормальную степень. Нормальная степень вложения удовлетворяет довольно сильным условиям. Чтобы сформулировать эти условия, введём величину  $\Sigma(M^n) = \sum_{i \geq 0} \dim H_i(M^n; F)$ , где  $F$  — аддитивная группа произвольного поля.

*Т е о р е м а 22.6* (Милнор [Mi2]). Если  $d$  — нормальная степень вложения  $M^n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , то  $d \equiv \frac{1}{2}\Sigma(M^n) \pmod{2}$  и  $|d| \leq \frac{1}{2}\Sigma(M^n)$ .

**Доказательство.** Множество  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M^n$  состоит из двух связанных компонент, одна из которых ограниченная; обозначим её  $A$ . Можно считать, что многообразию  $M^n$  ориентировано так, что нормальный вектор направлен наружу по отношению к  $A$ . Нормальная степень  $d$  равна  $\chi(\bar{A})$ . Это доказывается точно так же, как и основная лемма из доказательства теоремы Пуанкаре—Хопфа (часть I, теорема 18.6). Непосредственно из определений видно, что  $\chi(\bar{A}) \equiv \Sigma(\bar{A}) \pmod{2}$  и  $-\Sigma(\bar{A}) \leq \chi(\bar{A}) \leq \Sigma(\bar{A})$ . Более того,  $\dim H_0(\bar{A}; F) = 1$ , поэтому  $2 - \Sigma(\bar{A}) \leq \chi(\bar{A})$ .

Докажем теперь, что  $\Sigma(\bar{A}) = \frac{1}{2}\Sigma(M)$ . Пусть  $S^{n+1}$  — одноточечная компактификация  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Положим  $B = S^{n+1} \setminus A$ . Согласно теореме двойственности Александра  $\tilde{H}^k(M^n) \cong \tilde{H}_{n-k}(S^{n+1} \setminus M^n)$  при  $0 \leq k \leq n$ . Если  $1 \leq k \leq n-1$ , то  $\dim H_{n-k}(M^n) = \dim H^k(M^n) = \dim H_{n-k}(S^{n+1} \setminus M^n) = \dim H_{n-k}(A) + \dim H_{n-k}(B)$ . Из равенства  $\dim \tilde{H}^0(M^n) = 0$  следует, что  $\dim H_n(A) = \dim H_n(B) = 0$ . Значит,  $\Sigma(M) = \Sigma(A) + \Sigma(B)$ , поскольку  $\dim H_0(M^n) + \dim H_n(M^n) = 2 = \dim H_0(A) + \dim H_0(B)$ . Теореме двойственности Александра можно применить не только к  $M^n$ , но и к  $\bar{A}$ . В результате получим, что  $\tilde{H}^k(\bar{A}) \cong \tilde{H}_{n-k}(S^{n+1} \setminus \bar{A}) = \tilde{H}_{n-k}(B)$  при  $0 \leq k \leq n$ , а значит,  $\Sigma(\bar{A}) = \Sigma(B)$ . Ясно также, что  $\Sigma(\bar{A}) = \Sigma(A)$ , поскольку пространства  $A$  и  $\bar{A}$  гомотопически эквивалентны. В итоге получаем, что  $2\Sigma(M^n) = \Sigma(A)$ .  $\square$

## § 23. Комплексные многообразия

### 23.1. Полные пересечения

Пусть  $Y$  —  $n$ -мерное комплексное многообразие,  $X \subset Y$  — комплексное подмногообразие размерности  $n-1$ . Это означает, что  $X$  покрыто открытыми в  $Y$  множествами  $U_i$  так, что в  $U_i$  множество  $X$  задаётся уравнением  $f_i = 0$ , где  $f_i$  — голоморфная функция, причём  $\text{grad } f_i(x) \neq 0$  для всех  $x \in U_i \cap X$ . Можно считать, что множества  $U_i$  покрывают  $Y$  (если  $U_i \cap X = \emptyset$ , то можно положить  $f_i = \text{const} \neq 0$ ). Подмногообразию  $X \subset Y$  можно сопоставить одномерное комплексное расслоение\*)  $\xi(X)$  над  $Y$  с функциями перехода  $g_{ij}(x) = f_i(x)/f_j(x)$ . Если  $x \in X$ , то подразумевается, что  $g_{ij}(x) = \lim_{y \notin X, y \rightarrow x} f_i(x)/f_j(x)$ ; этот предел равен коэффициенту пропорциональности векторов  $\text{grad } f_i(x)$  и  $\text{grad } f_j(x)$ .

\*) В алгебраической геометрии это расслоение называют *линейным расслоением, ассоциированным с дивизором*  $X$ , и для него используют обозначение  $[X]$ . Мы не пользуемся этим обозначением, потому что в топологии  $[X]$  обычно обозначает фундаментальный класс многообразия  $X$ .

Расслоение  $\xi(X)$  не зависит от выбора функций  $f_i$ . Действительно, пусть в  $U_i$  множество  $X$  задаётся уравнениями  $f_i = 0$  и  $\tilde{f}_i = 0$ . Тогда функции  $h_i = f_i/\tilde{f}_i$  не обращаются в нуль на  $U_i$  и  $\tilde{g}_{ij} = \frac{h_j}{h_i} g_{ij}$ .

Расслоение  $\xi(X)$  имеет голоморфное сечение, обращающееся в нуль в точности на множестве  $X$ . На множестве  $U_i$  это сечение задаётся функцией  $f_i$ . Действительно, так мы получаем корректно определённое сечение, поскольку  $\tilde{f}_i = g_{ij} f_j$ .

**Пример 23.1.** Пусть  $X_d$  — неособая гиперповерхность степени  $d$  в  $\mathbb{C}P^n$ , заданная однородным уравнением  $F(z_0, \dots, z_n) = 0$  степени  $d$ . Тогда  $(\xi(X_d))^* \cong \underbrace{\gamma_n^1 \otimes \dots \otimes \gamma_n^1}_d$ .

**Доказательство.** В карте  $U_i$  гиперповерхность  $X_d$  задаётся уравнением  $\hat{f}_i(\omega_0, \dots, \hat{\omega}_i, \dots, \omega_n) = 0$ , где

$$\hat{f}_i\left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \hat{1}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right) = \frac{F(z_0, \dots, z_n)}{z_i^d}.$$

Значит, расслоение  $\xi(X_d)$  задаётся функциями перехода  $g_{ij} = \frac{f_i}{f_j} = \left(\frac{z_j}{z_i}\right)^d$ .

А каноническое расслоение  $\gamma_n^1$  над  $\mathbb{C}P^n$  задаётся функциями перехода  $g_{ij} = \frac{z_i}{z_j}$  (пример 17.9 на с. 294).  $\square$

В частности, для гиперповерхности  $\mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$ , заданной линейным уравнением, расслоение  $\xi(\mathbb{C}P^n)$  изоморфно расслоению, описанному в примере 17.11 на с. 294.

Несложно проверить, что ограничение расслоения  $\xi(X)$  на  $X$  является нормальным (в смысле эрмитовой метрики) расслоением к  $X$  в  $Y$ . Действительно, рассмотрим расслоение  $\bar{\nu}$  над  $X$ , слоями которого над  $U_i$  служат векторы, пропорциональные  $\text{grad } f_i$ . Если  $\lambda_i \text{grad } f_i = \lambda_j \text{grad } f_j$ , то  $\lambda_i = \frac{f_j}{f_i} \lambda_j$ . Поэтому расслоение  $\bar{\nu}$  задаётся функциями перехода  $g_{ij} = f_j/f_i$ . Расслоение  $\bar{\nu}$  комплексно сопряжено нормальному расслоению  $\nu$ , поэтому расслоение  $\nu$  задаётся функциями перехода  $g_{ij} = f_i/f_j$ , которые совпадают с функциями перехода для расслоения  $\xi(X)$ .

**Пример 23.2.** Пусть  $X_d$  — неособая гиперповерхность степени  $d$  в  $\mathbb{C}P^n$ . Тогда

$$c(X_d) = (1 + \tilde{\alpha})^{n+1} (1 - d\tilde{\alpha} + d^2\tilde{\alpha}^2 - d^3\tilde{\alpha}^3 + \dots),$$

где  $\tilde{\alpha}$  — ограничение канонической\*) образующей группы  $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$  на  $X_d$  (сумма здесь конечная, поскольку  $\tilde{\alpha}^n = 0$ ).

\*) То есть принимающей значение  $+1$  на  $\mathbb{C}P^2$  с канонической комплексной ориентацией.

**Доказательство.** Пусть  $j: X_d \rightarrow \mathbb{C}P^n$  — естественное вложение. Тогда  $\tilde{\alpha} = j^* \alpha$  и  $j^*(\xi(X_d)) = \nu_{X_d}$  — нормальное расслоение к  $X_d$  в  $\mathbb{C}P^n$ . Поэтому  $j^*(\tau_{\mathbb{C}P^n}) = \tau_{X_d} \oplus \nu_{X_d} = \tau_{X_d} \oplus j^*(\xi(X_d))$ . Учитывая, что  $c(\xi(X_d)) = -dc(\gamma_n^1) = d\alpha$  и  $c(\mathbb{C}P^n) = (1 + \alpha)^{n+1}$ , получаем  $(1 + \tilde{\alpha})^{n+1} = c(X_d)(1 + d\tilde{\alpha})$ , а значит,

$$\begin{aligned} c(X_d) &= (1 + \tilde{\alpha})^{n+1} (1 + d\tilde{\alpha})^{-1} = \\ &= (1 + \tilde{\alpha})^{n+1} (1 - d\tilde{\alpha} + d^2\tilde{\alpha}^2 - d^3\tilde{\alpha}^3 + \dots). \quad \square \end{aligned}$$

**Пример 23.3.** Пусть  $X_d$  — неособая гиперповерхность степени  $d$  в  $\mathbb{C}P^n$ . Тогда

$$\chi(X_d) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k d^{k+1} \binom{n+1}{n-1-k}.$$

**Доказательство.** В примере 23.2 мы вычислили полный класс Чженя многообразия  $X_d$ . В частности,

$$c_{n-1}(X_d) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k d^k \binom{n+1}{n-1-k} \tilde{\alpha}^{n-1}.$$

Чтобы вычислить  $\chi(X_d) = \langle c_{n-1}(X_d), [X_d] \rangle$ , остаётся вычислить  $\langle \tilde{\alpha}^{n-1}, [X_d] \rangle$ .

Число  $\langle \tilde{\alpha}^{n-1}, [X_d] \rangle$  равно числу точек пересечения в  $\mathbb{C}P^n$  цикла, двойственного  $\alpha^{n-1}$ , с  $X_d$  (с учётом знака). Цикл, двойственный  $\alpha^{n-1}$ , — это комплексная прямая  $\mathbb{C}P^1$ . В общем положении прямая  $\mathbb{C}P^1$  пересекает поверхность степени  $d$  в  $d$  точках, поскольку ограничение на прямую однородного многочлена  $F$  от  $n+1$  переменных является однородным многочленом степени  $d$  от двух переменных, которому соответствует неоднородный многочлен степени  $d$  от одной переменной. Все знаки для точек пересечения здесь положительные, поскольку мы имеем дело с комплексными многообразиями. Таким образом, гомологический класс  $[X_d]$  равен  $d[\mathbb{C}P^{n-1}]$ .  $\square$

В частности, для гладкой алгебраической кривой  $X_d$  степени  $d$  в  $\mathbb{C}^2$  получаем  $\chi(X_d) = \binom{3}{1}d - \binom{3}{0}d^2 = 3d - d^2$ . Поэтому  $X_d$  — сфера с  $g$  ручками, где  $2 - 2g = 3d - d^2$ , т. е.  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ .

Аналогично можно вычислить полный класс Чженя и эйлерову характеристику не только неособой гиперповерхности, но и пересечения неособых гиперповерхностей общего положения, как это сделано в [Ch]. *Полным пересечением* называют  $n$ -мерное комплексное многообразие  $M = M_1 \cap \dots \cap M_p \subset \mathbb{C}P^{n+p}$ , где  $M_1, \dots, M_p$  — гиперповерхности, заданные однородными уравнениями  $f_1 = 0, \dots, f_p = 0$ , для которых векторы  $\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_p$  линейно независимы в каждой точке  $x \in M$ .

**Пример 23.4.** Пусть  $M = M_1 \cap \dots \cap M_p \subset \mathbb{C}P^{n+p}$  — полное пересечение, причём степени гиперповерхностей  $M_1, \dots, M_p$  равны  $d_1, \dots, d_p$ . Предположим, что гиперповерхности  $M_1, \dots, M_p$  неособые. Тогда

$$\chi(M) = \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+p+1}{n-k} \sigma_k \right) \prod_{i=1}^p d_i,$$

где  $\sigma_k = \sum_{a_1+\dots+a_p=k} d_1^{a_1} \dots d_p^{a_p}$ .

**Доказательство.** Пусть  $j: M \rightarrow \mathbb{C}P^{n+p}$  — естественное вложение,  $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^{n+p}; \mathbb{Z})$  — каноническая образующая и  $\tilde{\alpha} = j^* \alpha$ . Тогда  $c(\mathbb{C}P^{n+p}) = (1 + \alpha)^{n+p+1}$  и  $j^* \tau_{(\mathbb{C}P^{n+p})} \cong \tau_M \oplus \nu$ , где  $\nu$  — нормальное расслоение к  $M$  в  $\mathbb{C}P^{n+p}$ . Ясно, что  $\nu$  — прямая сумма расслоений  $\xi(M_i)$ , поэтому  $c(\nu) = (1 + d_1 \tilde{\alpha}) \dots (1 + d_p \tilde{\alpha})$ . Следовательно,

$$c(M) = (1 + \tilde{\alpha})^{n+p+1} (1 + d_1 \tilde{\alpha})^{-1} \dots (1 + d_p \tilde{\alpha})^{-1}.$$

В частности,

$$c_n(M) = \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+p+1}{n-k} \sigma_k \right) \tilde{\alpha}^n.$$

Остаётся доказать, что  $\langle \tilde{\alpha}^n, [M] \rangle = d_1 \cdot \dots \cdot d_p$ , т.е.  $p$ -мерное подпространство в  $\mathbb{C}^p$  общего положения пересекает  $M$  в  $d_1 \cdot \dots \cdot d_p$  точках. Это можно сделать разными способами. Во-первых, можно воспользоваться тем, что цикл  $M_i$  гомологичен  $d_i [\mathbb{C}P^{n+p-1}]$ . Действительно, рассмотрим пересечение  $p$  экземпляров  $\mathbb{C}P^{n+p-1}$  общего положения в  $\mathbb{C}P^{n+p}$  (это пересечение равно  $\mathbb{C}P^n$ ). Индекс пересечения  $[\mathbb{C}P^p]$  и  $[M]$  равен индексу пересечения  $[\mathbb{C}P^p]$  и  $[\mathbb{C}P^n]$ , умноженному на  $d_1 \cdot \dots \cdot d_p$ . Во-вторых, можно воспользоваться методом исключения переменных, который основан на вычислении результата двух многочленов. Применяя метод исключения переменных к ограничениям однородных форм степеней  $d_1, \dots, d_p$  на  $p$ -мерное подпространство, мы получим многочлен степени  $d_1 \dots d_p$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Более аккуратные рассуждения показывают, что предположение о том, что гиперповерхности  $M_1, \dots, M_p$  неособые, можно отбросить: см. [Az].

## 23.2. Гомологии гиперповерхности $z^{a_0} + \dots + z^{a_n} = 1$

Пусть  $a_0, \dots, a_n$  — натуральные числа,  $a = (a_0, \dots, a_n)$ . Рассмотрим в  $\mathbb{C}^{n+1}$  гиперповерхность  $V_a$ , заданную уравнением

$$z^{a_0} + \dots + z^{a_n} = 1.$$

В [Ф1] Фам вычислил группы гомологий пространства  $V_a$ . Для этого он указал в  $V_a$  деформационный ретракт  $U_a$ , гомологии которого легко вычисляются. В [НіЗ] показано, что пространство  $U_a$  гомотопически эквивалентно букету  $(a_0 - 1) \dots (a_n - 1)$  сфер размерности  $n$ . Таким образом,

$$\tilde{H}_k(V_a) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n; \\ \mathbb{Z}^{(a_0-1)\dots(a_n-1)} & \text{при } k = n. \end{cases}$$

Подпространство  $U_a \subset V_a$  определяется так:

$$U_a = \{x \in V_a \cap \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i^{a_i} \geq 0 \text{ для } i = 0, \dots, n\}.$$

Деформационная ретракция  $V_a$  на  $U_a$  строится следующим образом. Рассмотрим отображение  $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ , заданное формулой

$$(z_0, \dots, z_n) \mapsto (z_0^{a_0}, \dots, z_n^{a_n}) = (u_0, \dots, u_n).$$

Образом пространства  $V_a$  при этом отображении служит гиперплоскость  $X$  в  $\mathbb{C}^{n+1}$ , заданная уравнением  $u_0 + \dots + u_n = 1$ . Отображение  $p: V_a \rightarrow X$  является разветвлённым  $(a_0 \dots a_n)$ -листным накрытием с ветвлением над пересечениями  $X$  с гиперплоскостями  $u_i = 0$ . Стандартный симплекс  $\Delta^n$  в  $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ , заданный неравенствами  $t_0 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$  и уравнением  $t_0 + \dots + t_n = 1$ , является деформационным ретрактом гиперплоскости  $X$ . Действительно, сначала мы строим деформационную ретракцию  $\mathbb{C}^{n+1}$  на  $\mathbb{R}^{n+1}$ , затем строим деформационную ретракцию  $\mathbb{R}^{n+1}$  на гиперплоскость  $X \cap \mathbb{R}^{n+1}$ , а потом строим деформационную ретракцию гиперплоскости на симплекс  $\Delta^n$ , как показано на рис. 80 (для  $n = 2$ ).

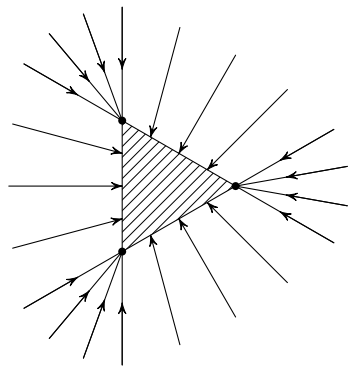


Рис. 80. Деформационная ретракция

При такой деформационной ретракции тип ветвления над каждой движущейся точкой остаётся неизменным, поэтому деформационную ретракцию пространства  $X$  на симплекс  $\Delta^n$  можно поднять до деформационной ретракции пространства  $V_a$  на прообраз симплекса  $\Delta^n$  при разветвлённом накрытии  $p: V_a \rightarrow X$ . Ясно, что этот прообраз совпадает с  $U_a$ .

Пример 23.5. Для гиперповерхности  $z_0^n + z_1^m = 1$  пространство  $U_a$  является графом  $K_{n,m}$ .



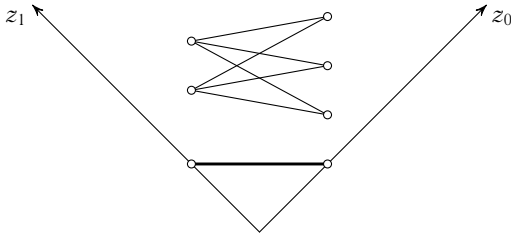


Рис. 81. Разветвлённое накрытие

**Доказательство.** Соответствующее разветвлённое накрытие над одномерным симплексом  $\Delta^1$  для  $n = 2, m = 3$  изображено на рис. 81.  $\square$

Докажем теперь, что пространство  $U_a$  гомотопически эквивалентно букету  $(a_0 - 1) \dots (a_n - 1)$  сфер размерности  $n$ . Пространство  $U_a$  можно отождествить с пространством наборов  $(u_0 t_0, \dots, u_n t_n)$ , где  $u_i$  — корень из единицы степени  $a_i$ ,  $t_i \geq 0$  и  $\sum t_i = 1$ . Это означает, что  $U_a$  — джойн  $\mathbb{Z}_{a_0} * \mathbb{Z}_{a_1} * \dots * \mathbb{Z}_{a_n}$ , где  $\mathbb{Z}_m$  — дискретное пространство, состоящее из  $m$  точек. Но  $\mathbb{Z}_m = \underbrace{S^0 \vee \dots \vee S^0}_{m-1}$ , поэтому

$$\mathbb{Z}_{a_0} * \mathbb{Z}_{a_1} * \dots * \mathbb{Z}_{a_n} \sim \underbrace{S^n \vee \dots \vee S^n}_{(a_0-1)\dots(a_n-1)},$$

поскольку  $\underbrace{S^0 * \dots * S^0}_{n+1} = S^n$ ; здесь мы пользуемся также тем, что

$$(X_1 \vee X_2) * Y \sim (X_1 * Y) \vee (X_2 * Y).$$

**Задача 23.1.** Будем рассматривать  $\mathbb{Z}_m$  как группу корней степени  $m$  из единицы. Тогда  $U_a = \mathbb{Z}_{a_0} * \dots * \mathbb{Z}_{a_n}$  —  $n$ -мерный симплицальный комплекс, причём его  $n$ -мерные симплексы находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами группы  $\mathbb{Z}_a = \mathbb{Z}_{a_0} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{a_n}$ , т. е. каждый  $n$ -мерный симплекс получается под действием элемента группы  $\mathbb{Z}_a$  на симплекс  $e$ , соответствующий единичному элементу группы  $\mathbb{Z}_a$ . Пусть  $\omega_0, \dots, \omega_n$  — элементы группы  $\mathbb{Z}_a$ , соответствующие образующим групп  $\mathbb{Z}_{a_0}, \dots, \mathbb{Z}_{a_n}$ .

а) Докажите, что  $\varepsilon = (1 - \omega_0) \dots (1 - \omega_n)e$  — цикл.

б) Докажите, что ядро  $I_a$  отображения групповой алгебры  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_a]$  в себя, заданного формулой  $\omega \mapsto \omega(1 - \omega_0) \dots (1 - \omega_n)$ , порождено элементами

$$1 + \omega_i + \omega_i^2 + \dots + \omega_i^{a_i-1}, \text{ где } i = 0, 1, \dots, n.$$

в) Докажите, что элементы

$$\omega_0^{k_0} \omega_1^{k_1} \dots \omega_n^{k_n} \varepsilon, \text{ где } 0 \leq k_i \leq a_i - 2,$$

образуют базис целочисленных гомологий пространства  $U_a$ .

## § 24. Группы Ли и $H$ -пространства

### 24.1. Некоторые свойства групп Ли

*Группой Ли* называют многообразие  $G$ , которое одновременно является группой, причём отображения  $G \times G \rightarrow G$  и  $G \rightarrow G$ , заданные формулами  $(g, h) \mapsto gh$  и  $g \mapsto g^{-1}$ , являются гладкими. Чтобы не углубляться в тонкости теории групп Ли, не имеющие отношения к алгебраической топологии, мы ограничимся рассмотрением матричных групп Ли, которые являются подмногообразиями в пространстве невырожденных квадратных матриц над полем  $\mathbb{R}$ , причём умножение в группе — это обычное умножение матриц, а единичный элемент группы — единичная матрица  $I$ .

Каждой квадратной матрице  $A$  можно сопоставить матрицу  $\exp A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$  (доказательство сходимости этого ряда и доказательства основных свойств отображения  $\exp A$  приведены, например, в [П2]). Отображение  $\exp A$  диффеоморфно отображает некоторую окрестность нулевой матрицы на окрестность единичной матрицы. Касательный вектор к кривой  $\exp(tA)$  при  $t = 0$  равен  $A$ . Поэтому касательное пространство к (матричной) группе Ли в единичном элементе — это линейное пространство, натянутое на прообраз окрестности единичного элемента при отображении  $\exp$ ; это линейное пространство называют *алгеброй Ли*, соответствующей данной группе Ли. Связная группа Ли полностью задаётся окрестностью единичного элемента (которую мы рассматриваем как подмножество в пространстве матриц), поэтому она задаётся своей алгеброй Ли (которую мы тоже рассматриваем как подмножество в пространстве матриц).

Группа Ли коммутативна тогда и только тогда, когда все матрицы её алгебры Ли попарно коммутируют.

**Задача 24.1.** Докажите, что образ при отображении  $\exp$  линейного подпространства  $V$  в пространстве матриц является группой Ли тогда и только тогда, когда для любых двух матриц  $A, B \in V$  матрица  $[A, B] = AB - BA$  лежит в  $V$ .

Группу Ли  $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  называют *тором*.

**Теорема 24.1.** *Связная коммутативная группа Ли  $G$  изоморфна  $T^n \times \mathbb{R}^m$ .*

**Доказательство.** Для коммутативной группы Ли  $G$  отображение  $\exp: T_e G \rightarrow G$  является гомоморфизмом групп, поскольку если  $AB = BA$ , то  $e^A e^B = e^{A+B}$ . Для связной группы Ли этот гомоморфизм является эпиморфизмом. Поэтому  $G \cong T_e G / K$ , где  $K = \text{Кер } \exp$ . Группа  $K$  дискретна, поскольку  $\exp$  — диффеоморфизм в окрестности нуля. Значит, эта группа

является дискретной подгруппой в  $T_e G \cong \mathbb{R}^{n+m}$ . В  $\mathbb{R}^{n+m}$  можно выбрать базис так, что элементы группы  $K$  будут иметь вид  $(k_1, \dots, k_n, 0, \dots, 0)$ , где  $k_i \in \mathbb{Z}$ . Поэтому  $\mathbb{R}^{n+m}/K \cong T^n \times \mathbb{R}^m$ .  $\square$

*С л е д с т в и е.* *Связная компактная коммутативная группа Ли является тором.*

**Т е о р е м а 24.2.** *Замкнутая подгруппа  $H$  группы Ли  $G$  является подмногообразием.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Зададим в пространстве матриц какую-нибудь норму, например  $\|A\| = \max |a_{ij}|$ , где  $A = (a_{ij})$ . Предположим, что в пространстве  $T_e G$  задана матрица  $A$  и задана последовательность матриц  $A_n$  так, что  $\exp A_n \in H$ ,  $\|A_n\| \rightarrow 0$  и  $A_n/\|A_n\| \rightarrow A$ . Покажем, что тогда  $e^{tA} \in H$  для любого вещественного числа  $t$ . Поскольку  $\|A_n\| \rightarrow 0$ , можно выбрать целые числа  $m_n$  так, что  $m_n\|A_n\|$  сходится к данному числу  $t$ . Тогда  $m_n A_n \rightarrow tA$  и  $e^{m_n A_n} \rightarrow e^{tA}$ . Но  $e^{m_n A_n} = (e^{A_n})^{m_n} \in H$ , а группа  $H$  замкнута. Поэтому  $e^{tA} \in H$ .

Пусть  $W$  — пространство всех матриц вида  $tA$ , где матрица  $A$  получается указанным выше предельным переходом, а  $t$  — произвольное вещественное число. Покажем, что  $W$  — линейное пространство. Для этого достаточно проверить, что если  $A, B \in W$ , то  $A + B \in W$ . В малой окрестности единичной матрицы отображение  $\exp$  обратимо, поэтому для малых  $t$  имеет место равенство  $e^{tA} e^{tB} = e^{F(t)}$ , где  $F(t)$  — гладкая кривая в  $T_e G$ , причём  $F(0) = 0$ . Учитывая, что  $e^{tA} e^{tB} = I + t(A + B) + \dots$ , получаем, что  $F(t)/t \rightarrow A + B$  при  $t \rightarrow 0$ . Рассмотрим последовательность матриц  $C_n = F(1/n)$ . Ясно, что  $\|C_n\| \rightarrow 0$ ,  $e^{C_n} \in H$ , поскольку  $e^{tA} e^{tB} \in H$  для всех  $t$ , и  $C_n/\|C_n\| \rightarrow \lambda(A + B)$ , где  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| F\left(\frac{1}{n}\right) \right|^{-1}$ . Значит,  $A + B \in W$ .

Докажем, что множество  $\exp W$  содержит некоторую окрестность единичного элемента в  $H$ . Представим пространство  $T_e G$  в виде прямой суммы  $W \oplus W'$  и для  $\omega \in W$ ,  $\omega' \in W'$  положим  $\varphi(\omega, \omega') = e^\omega e^{\omega'}$ . Отображение  $\varphi$  диффеоморфно отображает некоторую окрестность нулевой матрицы в  $T_e G$  на окрестность единичной матрицы в  $G$ . Это следует, из того, что  $\varphi(T_e G) \subset G$  и в нуле дифференциал отображения  $\varphi$  совпадает с дифференциалом отображения  $\exp$ , поскольку  $e^\omega e^{\omega'} \approx e^{\omega + \omega'}$  при малых  $\omega$  и  $\omega'$ . Предположим, что существует последовательность точек  $(\omega_n, \omega'_n)$ , для которой  $\varphi(\omega_n, \omega'_n) \in H$ ,  $(\omega_n, \omega'_n) \rightarrow 0$  и  $\omega'_n \neq 0$ . Тогда  $e^{\omega_n} \in H$ , поскольку  $e^{\omega_n} e^{\omega'_n} \in H$  и  $e^{\omega_n} \in H$ . Выберем подпоследовательность  $\omega'_{n_k}$  так, чтобы последовательность  $\omega'_{n_k}/\|\omega'_{n_k}\|$  имела предел  $\omega'$ . С одной стороны,  $\omega' \in W'$  и  $\omega' \neq 0$ . С другой стороны,  $\omega' \in W$ . Приходим к противоречию.

Итак, мы убедились, что в  $G$  есть окрестность  $U \ni e$ , пересечение которой с  $H$  является подмногообразием в  $U$ . Для любой точки  $h \in H$  можно рассмотреть окрестность  $hU$ .  $\square$

**Теорема 24.3.** Пусть тор  $T^n$  действует на векторном пространстве  $V$ . Тогда в  $V$  существует скалярное произведение, инвариантное относительно действия тора, т. е.  $(u, v) = (tu, tv)$  для любого элемента  $t \in T^n$  и любых векторов  $u, v \in V$ .

**Доказательство.** Возьмём в  $V$  произвольное скалярное произведение  $(u, v)_1$ , рассмотрим функцию на торе  $f(s) = (su, sv)_1$  и положим  $(u, v) = \int_{T^n} f(s) d\mu$ , где  $d\mu = dx_1 \dots dx_n$  — каноническая мера на торе  $T^n$ . Эта мера инвариантна относительно сдвигов тора, поэтому если  $g(s) = f(s + t)$ , то  $\int_{T^n} g(s) d\mu = \int_{T^n} f(s) d\mu$ . Таким образом,  $(u, v) = \int_{T^n} (su, sv)_1 d\mu = \int_{T^n} g(s) d\mu = \int_{T^n} f(s) d\mu = \int_{T^n} ((t + s)u, (t + s)v)_1 d\mu = (tu, tv)$ .  $\square$

## 24.2. Когомологии алгебр Ли

Когомологии де Рама связной компактной группы Ли  $G$  можно выразить в терминах её алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , что сводит вычисление когомологий группы Ли  $G$  с коэффициентами в  $\mathbb{R}$  к чисто алгебраической задаче. Здесь мы опишем эту конструкцию. Как и в п. 24.1, мы будем для простоты рассматривать только матричные группы и алгебры Ли.

### Алгебра Ли группы Ли

Как уже упоминалось на с. 377, алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  группы Ли  $G$  — это касательное пространство в единичном элементе  $e \in G$ . Но такое определение говорит только о структуре  $\mathfrak{g}$  как линейного пространства. Чтобы задать структуру алгебры, нужно для каждой двух матриц  $A, B \in \mathfrak{g}$  определить их произведение, лежащее в  $\mathfrak{g}$ ; это произведение обычно обозначают  $[A, B]$  и называют *коммутатором*.

Коммутатор определяется следующим образом. Каждой матрице  $A \in \mathfrak{g}$  можно сопоставить *левоинвариантное векторное поле*  $v_A(g) = (L_g)_* A$ , где  $L_g(x) = gx$  — левый сдвиг в группе  $G$ . Поскольку здесь рассматривается левый сдвиг на постоянную матрицу  $g$ , в матричном виде левоинвариантное векторное поле записывается так:  $v_A(g) = gA$ . Левоинвариантное векторное поле можно определить как векторное поле на  $G$ , инвариантное относительно левых сдвигов. Тогда левоинвариантное векторное поле однозначно задаётся вектором в точке  $e$ : этот вектор разносится по всей группе левыми сдвигами. Для двух левоинвариантных векторных полей  $v_A$  и  $v_B$  можно рассмотреть их коммутатор  $[v_A, v_B]$ . Это снова будет некоторое левоинвариантное векторное поле  $v_C$ . Матрица  $C$ , т. е. вектор поля  $[v_A, v_B]$  в точке  $e \in G$ , — это и есть коммутатор матриц  $A$  и  $B$ .

**Теорема 24.4.** Для матричной алгебры Ли  $[A, B] = AB - BA$  — обычный коммутатор матриц.

**Доказательство.** Матричная группа Ли  $G$  является подгруппой группы  $GL(n, \mathbb{R})$  невырожденных матриц порядка  $n$ . При этом коммутатор двух векторных полей на  $G$  будет тем же самым, если мы рассмотрим их как векторные поля на  $GL(n, \mathbb{R})$ . Поэтому требуемое утверждение достаточно доказать для  $GL(n, \mathbb{R})$ . В этом случае матричные элементы  $x_j^i$  матрицы  $\|x_j^i\|_1^n$  можно рассматривать как локальные координаты. Нас интересует коммутатор векторных полей с координатами  $v_A(x)^i_j = x^i_p A^p_j$  и  $v_B(x)^i_j = x^i_p B^p_j$  (по одинаковым верхним и нижним индексам ведётся суммирование). По определению  $[v_A(x), v_B(x)] = v_C(x)$ , где

$$\begin{aligned} v_C(x)^k_l &= x^i_p A^p_j \frac{\partial(x^k_q B^q_l)}{\partial x^i_j} - x^i_p B^p_j \frac{\partial(x^k_q A^q_l)}{\partial x^i_j} = \\ &= x^i_p A^p_j B^q_l \delta^j_q \delta^k_i - x^i_p B^p_j A^q_l \delta^j_q \delta^k_i = x^k_p (A^p_q B^q_l - B^p_q A^q_l). \end{aligned}$$

Таким образом,  $v_C(x)^k_l = x^k_p C^p_l$ , где  $C = AB - BA$ .  $\square$

### Отображения $\text{Ad}$ и $\text{ad}$

Рассмотрим на группе Ли  $G$  преобразование  $x \mapsto gxg^{-1}$ . В окрестности единицы его можно представить как  $e^{tX} \mapsto ge^{tX}g^{-1}$ , где  $X$  — элемент алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Легко видеть, что производные по  $t$  от  $e^{tX}$  и  $ge^{tX}g^{-1}$  при  $t = 0$  равны  $X$  и  $gXg^{-1}$ . Поэтому отображение  $X \mapsto gXg^{-1}$ , где  $g \in G$ , является отображением алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  в себя. Это отображение обозначают  $\text{Ad}_g$ .

Для алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  для фиксированной матрицы  $A \in \mathfrak{g}$  можно рассмотреть отображение  $X \mapsto [A, X] = AX - XA$ . Это отображение обозначают  $\text{ad}_A$ .

Отображения  $\text{Ad}$  и  $\text{ad}$  связаны следующим образом:  $\text{ad}_A X$  — это производная  $\text{Ad}_{\exp(tA)} X$  по  $t$  при  $t = 0$ . Действительно,

$$e^{tA} X e^{-tA} = (I + tA + \dots) X (I - tA + \dots) = X + t(AX - XA) + \dots$$

**Теорема 24.5.** Если  $G$  — связная компактная группа Ли, то  $\det \text{Ad}_g = 1$  для любого  $g \in G$ .

**Доказательство.** Легко проверить, что отображение  $g \mapsto \text{Ad}_g$  является гомоморфизмом группы  $G$  в группу автоморфизмов пространства  $\mathfrak{g}$ . Поэтому отображение  $g \mapsto \det \text{Ad}_g$  является гомоморфизмом группы  $G$  в мультипликативную группу  $\mathbb{R}^*$  действительных чисел, отличных от нуля. Ясно также, что этот гомоморфизм является непрерывным отображением, поэтому его образ — связная компактная подгруппа в  $\mathbb{R}^*$ . Но такая подгруппа состоит только из элемента 1.  $\square$

### Интегрирование по компактной группе Ли

Дифференциальную  $k$ -форму  $\omega$  на группе Ли  $G$  называют *левоинвариантной*, если  $L_g^* \omega = \omega$  для любого  $g \in G$ . Аналогично определяется *правоинвариантная*  $k$ -форма:  $R_g^* \omega = \omega$ , где  $R_g(x) = xg$  — правый сдвиг. Дифференциальную форму называют *биинвариантной*, если она одновременно левоинвариантная и правоинвариантная.

**Теорема 24.6.** *На связной компактной группе Ли  $G$  размерности  $n$  ненулевая биинвариантная  $n$ -форма существует и единственна с точностью до пропорциональности.*

**Доказательство.** Пусть  $\omega_e$  — ненулевая  $n$ -форма в касательном пространстве в единичном элементе  $e \in G$ . Она однозначно задаёт левоинвариантную форму  $\omega^L$  и правоинвариантную форму  $\omega^R$ . А именно, в любой точке  $g \in G$  имеем  $\omega_g^L(X_1, \dots, X_n) = \omega_e(gX_1, \dots, gX_n)$  и  $\omega_g^R(X_1, \dots, X_n) = \omega_e(X_1g, \dots, X_ng)$ . С точностью до умножения на ненулевую константу,  $\omega_e(X_1, \dots, X_n)$  — это определитель матрицы, составленной из координат векторов  $X_1, \dots, X_n$ . Поэтому  $\omega_g^R = (\det A)\omega_g^L$ , где  $A$  — определитель преобразования, переводящего вектор  $Y = Xg$  в  $gX = gYg^{-1}$ , т. е.  $A = \text{Ad}_g$ . Таким образом, на любой группе Ли размерности  $n$  существует не более одной (с точностью до пропорциональности) ненулевой биинвариантной  $n$ -формы, причём такая  $n$ -форма существует тогда и только тогда, когда  $\det \text{Ad}_g = 1$  для всех  $g \in G$ . Согласно теореме 24.5 для связной компактной группы Ли это условие выполняется.  $\square$

Из теоремы 24.6 следует, что на связной компактной группе Ли  $G$  размерности  $n$  существует единственная биинвариантная  $n$ -форма  $\omega$ , для которой  $\int_G \omega = 1$ . Используя эту  $n$ -форму, для любой непрерывной функции  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  можно определить интеграл  $\int_G f = \int_{x \in G} f(x)\omega$ . Этот интеграл обладает следующими свойствами:  $\int_G 1 = 1$  и для любого  $g \in G$  выполняется равенство

$$\int_{x \in G} f(xg) = \int_{x \in G} f(gx) = \int_{x \in G} f(x).$$

**У п р а ж н е н и е.** Докажите, что теорема 24.3 верна не только для тора  $T^n$ , но и для любой связной компактной группы Ли.

Интегрирование по компактной группе Ли  $G$  нужно для того, чтобы для функций на  $G$  можно было рассматривать *усреднение* — аналог среднего арифметического для функций на группе  $\mathbb{Z}_n$ .

### Левоинвариантные формы

Левоинвариантная дифференциальная форма определяется своими значениями на наборах векторов касательного пространства в единице,

поэтому она определяется также значениями на наборах левоинвариантных векторных полей. Если  $\omega$  — левоинвариантная дифференциальная  $k$ -форма, а  $\xi_1, \dots, \xi_k$  — левоинвариантные векторные поля, то  $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \text{const}$ , поэтому  $\eta\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = 0$  для любого векторного поля  $\eta$ . В такой ситуации формула для дифференциала формы упрощается и принимает вид

$$d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) = \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_k). \quad (1)$$

Для алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  группы Ли  $G$  определим пространство коцепей  $C^k(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$  как пространство кососимметрических  $k$ -линейных отображений  $\mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ . Отображение  $d: C^k \rightarrow C^{k+1}$  зададим формулой (1). Когомологии полученного коцепного комплекса называют *когомологиями алгебры Ли  $\mathfrak{g}$*  с коэффициентами в  $\mathbb{R}$ . Это то же самое, что когомологии комплекса левоинвариантных дифференциальных форм. Вообще говоря, они не совпадают с когомологиями комплекса всех дифференциальных форм, т.е. с когомологиями де Рама группы Ли  $G$ . Но эти когомологии совпадают в том случае, когда группа Ли  $G$  компактна (и связна).

**Теорема 24.7.** *Если группа Ли  $G$  связна и компактна, то когомологии её алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  изоморфны когомологиям де Рама многообразия  $G$ .*

**Доказательство.** Мы будем пользоваться тем, что на связной компактной группе Ли  $G$  существует интеграл  $\int_{g \in G} f(g)$ , обладающий свойствами, указанными на с. 381.

Прежде всего заметим, что если формы  $\omega$  и  $\tilde{\omega}$  левоинвариантны и  $\omega - \tilde{\omega} = d\alpha$  для некоторой формы  $\alpha$ , то  $\omega - \tilde{\omega} = d\alpha^L$  для некоторой левоинвариантной формы  $\alpha^L$ . Действительно, форма  $d\alpha$  левоинвариантна, поэтому  $d\alpha = \int_{g \in G} L_g^*(d\alpha) = d \int_{g \in G} L_g^* \alpha$ . Ясно, что форма  $\alpha^L = \int_{g \in G} L_g^* \alpha$  левоинвариантна.

Докажем теперь, что если  $\omega$  — произвольная замкнутая форма, то существует левоинвариантная форма  $\omega^L$ , для которой  $\omega = \omega^L + d\alpha$  для некоторой формы  $\alpha$ . Группа  $G$  линейно связна, поэтому для любого  $g \in G$  существует путь  $g(t)$  с началом  $g(0) = e$  и концом  $g(1) = g$ . С помощью этого пути получаем семейство форм  $\omega_t = L_{g(t)}^* \omega$ , связывающее формы  $\omega_0 = \omega$  и  $\omega_1 = L_g^* \omega$ . Ясно также, что форма  $L_g^* \omega$  замкнута, поскольку форма  $\omega$  замкнута. Поэтому из гомотопической инвариантности когомологий де Рама (см. с. 303) получаем, что  $\omega - L_g^* \omega = d\alpha_g$  для некоторой формы  $\alpha_g$ . Форма  $\alpha_g$  не обязательно зависит от  $g$  непрерывно, но, во всяком случае, её можно выбрать интегрируемой по  $g$  (кусочно непрерывной).

Рассмотрим левоинвариантную форму  $\omega^L = \int_{g \in G} L_g^* \omega$ . Ясно, что

$$\omega - \omega^L = \int_{g \in G} (\omega - L_g^* \omega) = \int_{g \in G} d\alpha_g = d \int_{g \in G} \alpha_g = d\alpha,$$

где  $\alpha = \int_{g \in G} \alpha_g$ . □

*С л е д с т в и е.* Если  $G_1$  и  $G_2$  — связные компактные группы Ли, одна из которых накрывает другую, то  $H^*(G_1; \mathbb{R}) \cong H^*(G_2; \mathbb{R})$ .

*П р и м е р.* Для тора  $T^n$  в комплексе левоинвариантных дифференциальных форм все дифференциалы нулевые, поэтому  $H^k(T^n; \mathbb{R}) \cong \cong \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  — пространство кососимметрических  $k$ -форм в  $\mathbb{R}^n$ .

*З а м е ч а н и е.* Для некомпактных групп Ли теорема 24.7 неверна. Например,  $T^n$  и  $\mathbb{R}^n$  имеют изоморфные алгебры Ли, но пространства  $H^*(T^n; \mathbb{R})$  и  $H^*(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  не изоморфны.

### Биинвариантные формы

*Т е о р е м а 24.8.* Если группа Ли  $G$  связна и компактна, то алгебра когомологий де Рама многообразия  $G$  изоморфна алгебре биинвариантных дифференциальных форм.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Согласно теореме 24.7 алгебра когомологий де Рама многообразия  $G$  изоморфна алгебре когомологий комплекса левоинвариантных дифференциальных форм. Для комплекса левоинвариантных форм можно повторить рассуждения из доказательства теоремы 24.7, применяя на этот раз усреднение по правым сдвигам, а не по левым. В результате получим, что алгебра когомологий де Рама многообразия  $G$  изоморфна алгебре когомологий комплекса биинвариантных дифференциальных форм. Поэтому остаётся доказать, что на этом комплексе дифференциал нулевой, т. е.  $d\omega = 0$  для любой биинвариантной формы  $\omega$ .

Рассмотрим отображение  $i: G \rightarrow G$ , заданное формулой  $i(g) = g^{-1}$ . Это отображение переводит кривую  $ge^{tX}$  в кривую  $e^{-tX}g^{-1}$ , поэтому касательный вектор  $Y = gX$  в точке  $g$  оно переводит в  $-Xg^{-1} = -g^{-1}Yg^{-1}$ . Таким образом, если  $\omega$  — биинвариантная  $k$ -форма, то

$$\begin{aligned} (i^* \omega_g)(X_1, \dots) &= \omega_{g^{-1}}(i_* X_1, \dots) = \omega_{g^{-1}}(-g^{-1}X_1g^{-1}, \dots) = \\ &= \omega_g(-X_1g^{-1}, \dots) = \omega_g(-X_1, \dots) = (-1)^k \omega_g(X_1, \dots), \end{aligned}$$

т. е.  $i^* \omega = (-1)^k \omega$ . Поэтому

$$(-1)^{k+1} d\omega = i^* d\omega = di^* \omega = (-1)^k d\omega,$$

а значит,  $d\omega = 0$ . □



### 24.3. Максимальные торы

Пусть  $G$  — топологическая группа. Элемент  $g \in G$  называют *топологической образующей* группы  $G$ , если замыкание подгруппы, порождённой элементом  $g$ , совпадает со всей группой  $G$ .

**Теорема 24.9.** *Тор  $T^n$  имеет топологическую образующую.*

**Доказательство.** Пусть  $U_1, U_2, \dots$  — счётная база открытых множеств пространства  $T^n$ . Назовём *кубом* в  $T^n$  образ куба в  $\mathbb{R}^n$ , заданного неравенством  $|x_i - a_i| \leq \varepsilon$ , при канонической проекции. Ясно, что куб — компактное подмножество тора. Назовём число  $\min(1, 2\varepsilon)$  длиной ребра куба. Если длина ребра куба равна 1, то он совпадает с  $T^n$ .

Возьмём произвольный куб  $C_0$  в  $T^n$ . Предположим, что мы уже построили последовательность кубов  $C_0 \supset C_1 \dots \supset C_{k-1}$ . Построим куб  $C_k$  следующим образом. Пусть длина ребра куба  $C_{k-1}$  равна  $\varepsilon$ . Выберем число  $N(k)$  так, что  $2N(k)\varepsilon > 1$ . Тогда образ куба  $C_{k-1}$  при возведении в степень  $N(k)$  совпадает с  $T^n$ . Поэтому можно выбрать куб  $C_k \subset C_{k-1}$  так, что  $C_k^{N(k)} \subset U_k$ .

Пусть  $g \in \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$ . Тогда  $g^{N(k)} \in U_k$ , поэтому  $g$  — топологическая образующая тора  $T^n$ . □

Пусть  $G$  — связная компактная группа Ли. *Максимальным тором* называют подгруппу  $T \subset G$ , которая является тором и при этом максимальна в следующем смысле: если  $T \subset T' \subset G$ , где  $T'$  — тор, то  $T = T'$ .

Любой тор  $T \subset G$  содержится в некотором максимальном торе. Действительно, если последовательность торов  $T \subset T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset G$  строго возрастающая, то их размерности строго возрастают. Это следует из того, что если  $n$ -мерное замкнутое многообразие является подмногообразием в  $n$ -мерном подмногообразии, то оно является подмножеством, которое одновременно открыто и замкнуто. Поэтому любая строго возрастающая последовательность торов конечна.

Пусть  $S \subset G$  — произвольное подмножество группы  $G$ . *Нормализатором* подмножества  $S$  называют группу

$$N(S) = \{g \in G \mid gS = Sg\},$$

а *централизатором* подмножества  $S$  называют группу

$$Z(S) = \{g \in G \mid gs = sg \ \forall s \in S\}.$$

Если  $S \subset G$  — подгруппа, то  $S$  — нормальная подгруппа группы  $N(S)$ . Если  $G$  — группа Ли, а  $S$  — её подгруппа, то  $N(S)$  и  $Z(S)$  — замкнутые подгруппы, поэтому согласно теореме 24.2 они являются группами Ли.

Для любого элемента  $g \in N(S)$  внутренний автоморфизм  $x \mapsto gxg^{-1}$  переводит  $S$  в  $S$ , поэтому  $N(S)$  действует на  $S$ .

Теорема 24.10. Пусть  $T \subset G$  — максимальный тор. Тогда

а) факторгруппа  $N(T)/T$  конечна;

б) размерность пространства  $G/N(T)$  чётна,  $\chi(G/N(T)) = 1$  и  $\chi(G/T) = |N(T)/T|$ .

Доказательство. а) Рассмотрим отображение  $N(T) \rightarrow \text{Aut}(T)$ , которое сопоставляет элементу  $g \in N(T)$  автоморфизм  $x \mapsto gxg^{-1}$ . Группа  $\text{Aut}(T)$  дискретна, поскольку любой автоморфизм тора задаётся целочисленной матрицей с определителем  $\pm 1$  (автоморфизм тора переводит в себя целочисленную решётку). Поэтому связная компонента единичного элемента  $N(T)_e$  отображается в тождественный автоморфизм, т. е.  $N(T)_e \subset Z(T)$ .

Пусть  $A$  — касательный вектор к  $Z(T)$  в точке  $e$ . Рассмотрим подгруппу  $H$ , порождённую тором  $T$  и элементами вида  $e^{At}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Подгруппа  $H$  замкнута, поэтому она является подгруппой Ли. Кроме того, группа  $H$  связна и коммутативна. Поэтому она является тором, содержащим  $T$ . Из максимальности тора  $T$  следует, что  $H = T$ ; в частности,  $e^{At} \in T$ . Поэтому  $Z(T)_e = T$ . Но  $T \subset N(T)_e \subset Z(T)_e$ , поэтому  $Z(T)_e = N(T)_e = T$ . Следовательно,  $N(T)/T = N(T)/N(T)_e$  — дискретная компактная группа, поэтому она конечна.

б) Рассмотрим действие тора  $T$  на факторпространстве  $G/N(T)$  левыми сдвигами: под действием элемента  $t \in T$  класс  $gN(T)$  переходит в  $tgN(T)$ . Класс  $N(T)$  остаётся неподвижным, поскольку  $T \subset N(T)$ .

Рассмотрим действие тора  $T$  на  $G$  левыми сдвигами. Это действие переносится в касательное пространство  $T_eG$ . Выберем в  $T_eG$  скалярное произведение, инвариантное относительно этого действия. Пусть  $(T_eN(T))^\perp$  — ортогональное дополнение к  $T_eN(T)$  в  $T_eG$ . Тогда

$$T_{N(T)}(G/N(T)) \cong T_eG/T_eN(T) \cong (T_eN(T))^\perp;$$

каждый элемент из  $T$  действует на  $T_{N(T)}(G/N(T))$  как ортогональное преобразование. Рассмотрев ограничение отображения  $\exp$  на пространство  $(T_eN(T))^\perp$ , можно построить в  $G/N(T)$  шар  $D^m$ , где  $m = \dim(G/N(T))$ , с центром в точке  $N(T)$  так, что следующие три замкнутых множества будут инвариантны относительно действия  $T$ :  $D^m$ ,  $S^{m-1} = \partial D^m$  и  $M = G/N(T) \setminus \text{int } D^m$ .

Покажем теперь, что класс нормализатора  $N(T)$  является единственной неподвижной точкой действия  $T$  на  $G/N(T)$ ; более того, это верно не только для действия всего тора  $T$ , но и для действия его топологической образующей  $t$ . Действительно,  $tgN(T) = gN(T) \Leftrightarrow g^{-1}tg \in N(T) \Leftrightarrow g^{-1}t^n g \in N(T)$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Последнее условие эквивалентно тому, что  $g^{-1}Tg \subset N(T)$ , поскольку множество  $\{t^n\}$  всюду плотно в  $T$ . Наконец, условие  $g^{-1}Tg \subset N(T)$  эквивалентно тому, что  $g^{-1}Tg = T$ , т. е.  $g \in N(T)$ . Дей-

ствительно,  $N(T)_e = T$ , а множество  $g^{-1}Tg$  связно и содержит единичный элемент  $e$ .

В торе  $T$  есть путь из точки  $t$  в точку  $e$ , поэтому действие  $t$  на  $G/N(T)$  и на  $G$  гомотопно тождественному отображению, причём в процессе гомотопии действие на  $T_eG$  сохраняет выбранное там скалярное произведение, поэтому мы получаем гомотопию в классе отображений, переводящих  $D^m$ ,  $S^{m-1}$  и  $M$  в себя. Таким образом, есть отображения  $S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  и  $M \rightarrow M$  без неподвижных точек, которые гомотопны тождественным отображениям. В таком случае из теоремы Лефшеца следует, что  $\chi(M) = 0$  и  $\chi(S^{m-1}) = 0$ ; значит, число  $m$  чётно.

Формула для эйлеровой характеристики объединения двух  $CW$ -комплексов показывает, что

$$\chi(G/N(T)) = \chi(D^m) + \chi(M) - \chi(S^{m-1}) = \chi(D^m) = 1.$$

Естественная проекция  $G/T \rightarrow G/N(T)$  является  $|N(T)/T|$ -листным накрытием, поэтому  $\chi(G/T) = |N(T)/T| \chi(G/N(T)) = |N(T)/T|$ .  $\square$

Воспользовавшись теоремой 24.10 и теоремой Лефшеца, легко доказать следующее утверждение.

**Теорема 24.11.** Пусть  $T \subset G$  — максимальный тор. Тогда для любого элемента  $g \in G$  можно выбрать элемент  $x \in G$  так, что  $g \in xTx^{-1}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим пространство левых смежных классов  $G/T = \{xT\}$ . Положим  $f(xT) = gxT$  (это определение корректно, поскольку при замене  $x$  на  $xt$ , где  $t \in T$ , класс  $gxT$  заменится на  $gxtT = gxT$ ). Предположим, что класс  $xT$  — неподвижная точка отображения  $f$ , т.е.  $gxT = xT$ . Тогда  $g \in xTx^{-1}$ . Поэтому достаточно доказать, что отображение  $f: G/T \rightarrow G/T$  имеет неподвижную точку. Для этого мы воспользуемся теоремой Лефшеца.

При вычислении числа Лефшеца  $\Lambda(f)$  вместо отображения  $f$  можно использовать любое гомотопное ему отображение  $f_0$ . Поэтому элемент  $g$  можно заменить на любой другой элемент  $g_0 \in G$ , поскольку группа  $G$  связна. Выберем в качестве  $g_0$  единичный элемент  $e$ . Тогда  $f_0 = \text{id}_{G/T}$  и  $\Lambda(f_0) = \chi(G/T)$ . Но согласно теореме 24.10 имеем  $\chi(G/T) = |N(T)/T| \neq 0$ . Поэтому  $\Lambda(f) = \Lambda(f_0) \neq 0$ , а значит, отображение  $f$  имеет неподвижную точку.  $\square$

**Следствие 1.** Максимальные торы сопряжены, т.е. если  $T$  и  $T'$  — максимальные торы компактной группы Ли  $G$ , то  $T' = gTg^{-1}$  для некоторого элемента  $g \in G$ .

**Доказательство.** Пусть  $t'$  — топологическая образующая тора  $T'$ . Выберем элемент  $g \in G$ , для которого  $t' \in gTg^{-1}$ . Тогда  $T' \subset gTg^{-1}$ .

Ясно также, что  $gTg^{-1}$  — тор. Поэтому из максимальности тора  $T'$  следует, что  $T' = gTg^{-1}$ .  $\square$

**С л е д с т в и е 2.** Для компактной связной группы Ли  $G$  образ отображения  $\text{exr}: T_e G \rightarrow G$  совпадает со всей группой  $G$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $T$  — максимальный тор группы Ли  $G$ . Для любого элемента  $x \in G$  можно выбрать элемент  $g \in G$  так, что  $x$  принадлежит тору  $gTg^{-1}$ . При доказательстве теоремы 24.1 мы убедились, что для тора отображение  $\text{exr}$  является эпиморфизмом.  $\square$

Размерность максимального тора называют *рангом* компактной связной группы Ли  $G$ .

**З а д а ч а 24.2.** Пусть  $G$  — компактная связная группа Ли,  $n$  — натуральное число. Докажите, что образ отображения  $f: G \rightarrow G$ , заданного формулой  $f(g) = g^n$ , совпадает со всей группой  $G$ .

## 24.4. Регулярные элементы

Пусть  $G$  — компактная связная группа Ли. Элемент  $g \in G$  называют *регулярным*, если он содержится ровно в одном максимальном торе; если элемент  $g$  содержится в более чем одном максимальном торе, то его называют *сингулярным*. Регулярные элементы допускают и другую характеристику: элемент  $g \in G$  регулярен тогда и только тогда, когда размерность его нормализатора  $N(g)$  равна размерности максимального тора. Чтобы доказать эквивалентность этих определений, нам понадобятся две леммы.

**Л е м м а 1.** Пусть  $S$  — связная абелева подгруппа компактной связной группы Ли  $G$ , а элемент  $g \in G$  коммутирует со всеми элементами группы  $S$ . Тогда существует тор  $T$ , содержащий  $g$  и  $S$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим в  $G$  подгруппу  $H$ , порождённую элементом  $g$  и группой  $S$ . Группа  $H$  абелева, поэтому её замыкание  $\bar{H}$  — компактная абелева группа, а значит, связная компонента единицы  $(\bar{H})_e$  — тор. Группа  $\bar{H}$  компактна, поэтому факторгруппа  $\bar{H}/(\bar{H})_e$  конечна. Она порождена одним классом  $g(\bar{H})_e$ , поскольку из связности группы  $S$  следует, что  $S \subset (\bar{H})_e$ . Таким образом,  $\bar{H}/(\bar{H})_e \cong \mathbb{Z}_k$  для некоторого натурального  $k$ . Пусть  $t$  — топологическая образующая тора  $(\bar{H})_e$ . Ясно, что  $g^k \in (\bar{H})_e$  и  $tg^{-k} \in (\bar{H})_e$ . Группа  $(\bar{H})_e$  делима, поэтому  $tg^{-k} = s^k$  для некоторого элемента  $s \in (\bar{H})_e$ . Рассмотрим элемент  $h = gs \in \bar{H}$ . Ясно, что  $h^k = (gs)^k = t$ , поэтому множество степеней  $h$  всюду плотно в  $(\bar{H})_e$ . Применяя сдвиг на  $h^r$ , получаем, что множество степеней  $h$  всюду плотно в смежном классе по  $(\bar{H})_e$ , содержащем  $g^r$ . Так получаются все смежные классы, поэтому  $h$  — топологическая образующая группы  $\bar{H}$ . Элемент  $h$  лежит в некотором максимальном торе  $T$  и  $\{g\} \cup S \subset h \subset \bar{H} \subset T$ .  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $N(g)_e$  — связная компонента единицы нормализатора некоторого элемента  $g \in G$ . Тогда  $N(g)_e$  — объединение максимальных торов группы  $G$ , содержащих  $g$ .

**Доказательство.** Предположим сначала, что элемент  $g$  принадлежит некоторому максимальному тору  $T$ . Тогда  $N(g) \supset N(T)$ . Кроме того, для максимального тора  $N(g)_e = T$ . Поэтому  $N(g)_e$  содержит все максимальные торы, содержащие  $g$ .

Предположим теперь, что  $n \in N(g)_e$ . Рассмотрим максимальный тор  $S$  группы  $N(g)_e$ , содержащий  $n$ . Любой элемент  $S$  коммутирует с  $g$ , поэтому можно воспользоваться леммой 1. В результате получим, что существует максимальный тор  $T$ , содержащий  $S$  и  $g$ . Этот максимальный тор содержит  $n$  и  $g$ .  $\square$

**Теорема 24.12.** Элемент  $g \in G$  регулярен тогда и только тогда, когда размерность его нормализатора  $N(g)$  равна размерности максимального тора. Для сингулярного элемента размерность нормализатора больше размерности максимального тора.

**Доказательство.** Предположим сначала, что элемент  $g$  регулярен, т. е. он лежит ровно в одном максимальном торе  $T$ . Тогда согласно лемме 2 мы имеем  $N(g)_e = T$ , поэтому  $\dim N(g) = \dim N(g)_e = \dim T$ .

Предположим теперь, что элемент  $g$  лежит в двух различных максимальных торах  $T_1$  и  $T_2$ . Тогда согласно лемме 2 нормализатор  $N(g)$  содержит  $T_1$  и  $T_2$ . Поэтому касательное пространство  $N(g)$  в точке  $e$  содержит сумму касательных пространств  $T_1$  и  $T_2$ . Эти пространства различны, поэтому их размерность строго больше размерности максимального тора.  $\square$

## Корни

Пусть  $G$  — компактная связная группа Ли,  $\mathfrak{g} = T_e G$  — её алгебра Ли. Выберем в  $\mathfrak{g}$  произвольное скалярное произведение  $(u, v)_1$  и рассмотрим новое скалярное произведение  $(u, v) = \int_{g \in G} (\text{Ad}_g u, \text{Ad}_g v)_1$ . Это новое скалярное произведение инвариантно относительно  $\text{Ad}_g$ , т. е. для любого элемента  $g \in G$  отображение  $\text{Ad}_g: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  является ортогональным преобразованием. В дальнейшем будем считать, что в  $\mathfrak{g}$  выбрано именно такое скалярное произведение.

**Теорема 24.13.** Пусть  $T \subset G$  — произвольный тор. Тогда пространство  $\mathfrak{g}$  раскладывается в прямую сумму:  $\mathfrak{g} = V_0 \oplus \sum_{r=1}^m V_r$ , где пространства  $V_0, V_1, \dots, V_m$  инвариантны относительно действия  $T$  посредством  $\text{Ad}$ , причём на  $V_0$  действие  $T$  тривиально, каждое пространство  $V_r$ ,  $1 \leq r \leq m$ , двумерно и действие элемента

$t \in T$  на  $V_r$  в некотором ортогональном базисе задаётся матрицей  $\begin{pmatrix} \cos 2\pi\bar{\theta}_r(t) & -\sin 2\pi\bar{\theta}_r(t) \\ \sin 2\pi\bar{\theta}_r(t) & \cos 2\pi\bar{\theta}_r(t) \end{pmatrix}$ , где  $\bar{\theta}_r: T \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  — нетривиальный гомоморфизм.

**Доказательство.** Выберем в торе  $T$  топологическую образующую  $t_0$ . Преобразование  $\text{Ad}_{t_0}$  ортогональное, поэтому его матрица в некотором ортонормированном базисе является прямой суммой единичной матрицы и нескольких матриц вида  $\begin{pmatrix} \cos 2\pi\alpha_r & -\sin 2\pi\alpha_r \\ \sin 2\pi\alpha_r & \cos 2\pi\alpha_r \end{pmatrix}$ . Ясно, что  $\text{Ad}_{t_0^k} = (\text{Ad}_{t_0})^k$  и отображение  $\text{Ad}_t$  непрерывно зависит от  $t$ . Поэтому матрица отображения  $\text{Ad}_t$  в выбранном ортонормированном базисе имеет требуемый вид.  $\square$

Набор чисел  $\{\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_m\}$  в доказательстве теоремы 24.13 определён однозначно, поэтому набор гомоморфизмов  $\{\pm\bar{\theta}_1, \dots, \pm\bar{\theta}_m\}$  в формулировке этой теоремы тоже определён однозначно. В случае, когда тор  $T$  максимальный, эти гомоморфизмы  $\bar{\theta}_r: T \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  называют *корнями*. Наряду с гомоморфизмами  $\bar{\theta}_r$  часто рассматривают линейные отображения  $\theta_r: \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{R}$ , для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t} & \xrightarrow{\theta_r} & \mathbb{R} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \rho \\ T & \xrightarrow{\bar{\theta}_r} & \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \end{array}$$

Отображение  $\theta_r$  здесь строится как поднятие отображения  $\bar{\theta}_r \circ \exp$ , для которого  $\theta_r(0) = 0$ . Такое поднятие существует и единственно, поскольку топологическое пространство  $\mathfrak{t}$  односвязно. Линейные отображения  $\theta_r: \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{R}$  тоже называют *корнями*.

**Теорема 24.14.** *Тор  $T$  максимальный тогда и только тогда, когда  $V_0 = \mathfrak{t}$ .*

**Доказательство.** Ясно, что  $\mathfrak{t} \subset V_0$  для любого тора. Предположим, что тор  $T$  максимальный и  $V_0 \neq \mathfrak{t}$ , т.е. можно выбрать  $X \in V_0$  так, что  $X \notin \mathfrak{t}$ . На группе  $H$ , состоящей из элементов вида  $e^{tX}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , тор  $T$  действует тривиально, поэтому подгруппа, порождённая  $T$  и  $H$ , является связной абелевой подгруппой, строго содержащей  $T$ . Это противоречит тому, что тор  $T$  максимален.

Предположим теперь, что  $V_0 = \mathfrak{t}$  и тор  $T$  лежит в торе  $T'$ . Тогда  $T$  тривиально действует на  $\mathfrak{t}'$ , поэтому  $\mathfrak{t}' \subset V_0$ . Следовательно,  $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}' \subset V_0 = \mathfrak{t}$ , а значит,  $\dim T = \dim T'$ . Поэтому  $T = T'$ . Таким образом, тор  $T$  максимальный.  $\square$

**Следствие.** *Размерность компактной связной группы Ли  $G$  равна  $l + 2t$ , где  $l$  — её ранг,  $2t$  — число корней.*

Для каждого корня  $\bar{\theta}_r : T \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  можно рассмотреть его ядро, которое мы обозначим  $U_r$ . Ясно, что  $U_r \subset T$  — подгруппа размерности  $l - 1$ , где  $l = \dim T$  (ранг группы Ли  $G$ ).

**Теорема 24.15.** *Если элемент  $t \in T$  принадлежит ровно  $\mu$  группам  $U_r$ , то  $\dim N(t) = l + 2\mu$ .*

**Доказательство.** Пусть  $V \subset \mathfrak{g}$  — подпространство, на котором данный элемент  $t$  действует тривиально. Согласно теореме 24.13 мы имеем  $V = V_0 \oplus \sum_{U_r \ni t} V_r$ , поэтому  $\dim V = l + 2\mu$ . Таким образом, достаточно

доказать, что  $V = T_e N(t)$ .

Элементы  $N(t)$  коммутируют с  $t$ , поэтому  $tnt^{-1} = n$  для любого элемента  $n \in N(t)$ , а значит,  $t$  тривиально действует на  $T_e N(t)$ . Поэтому  $T_e N(t) \subset V$ .

Предположим теперь, что  $X \in V$ . Тогда  $tXt^{-1} = X$ , а значит,  $te^{\lambda X}t^{-1} = e^{\lambda X}$  для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Поэтому  $e^{\lambda X} \in N(t)$  для всех  $\lambda \in \mathbb{R}$ , а значит,  $X \in T_e N(t)$ .  $\square$

**Следствие.** *Элемент  $t \in T$  регулярен тогда и только тогда, когда он не принадлежит ни одной из подгрупп  $U_r$ .*

**Теорема 24.16.** *Сингулярные элементы группы Ли  $G$  образуют в  $G$  подмножество коразмерности не менее 3 в том смысле, что это множество — образ одного или нескольких гладких компактных многообразий, каждое из которых имеет размерность не более  $\dim G - 3$ , при гладком отображении.*

**Доказательство.** Прежде всего покажем, что группа  $U_r$  имеет топологическую образующую. Её связная компонента единицы  $(U_r)_e$  является тором коразмерности 1 в торе  $T$ . При факторизации тора по тору получается связная компактная коммутативная группа Ли, т.е. тор. Поэтому  $T/(U_r)_e$  — тор размерности 1, т.е. окружность  $S^1$ . Группа  $U_r/(U_r)_e$  является конечной подгруппой в  $T/(U_r)_e \cong S^1$ , поэтому  $U_r/(U_r)_e \cong \mathbb{Z}_k$  для некоторого натурального  $k$ . Пусть  $t$  — топологическая образующая тора  $(U_r)_e$ , а  $g \in U_r$  — такой элемент, что группа  $\mathbb{Z}_k$  порождена классом  $g(U_r)_e$ . Как и при доказательстве леммы 1 на с. 387, выберем элемент  $s \in (U_r)_e$ , для которого  $tg^{-k} = s^k$ , и рассмотрим элемент  $h = gs$ . Те же самые рассуждения показывают, что  $h$  — топологическая образующая группы  $U_r$ .

Пусть  $h$  — топологическая образующая группы  $U_r$ . Согласно теореме 24.15 мы имеем  $\dim N(h) \geq l + 2$ . Если  $n \in N(h)$ , то  $n$  коммутирует с  $h^m$  для всех целых  $m$ , поэтому  $n$  коммутирует со всеми элементами  $U_r$ .

Рассмотрим отображение  $f_r : G \times U_r \rightarrow G$ , заданное формулой  $f(g, u) = gug^{-1}$ . Если  $n \in N(h)$  и  $u \in U_r$ , то  $nun^{-1} = u$ , поэтому  $f(gn, u) = f(g, u)$ . Таким образом, в действительности мы получаем отображение  $f_r : G/N(h) \times U_r \rightarrow G$ . Образ отображения  $f_r$  состоит из всех элементов группы  $G$ , сопряжённых элементам группы  $U_r$ . Размерность многообразия

$G/N(h) \times U_r$  равна

$$\dim G - \dim N(h) + \dim U_r \leq \dim G - (l + 2) + (l - 1) = \dim G - 3.$$

Элемент группы  $G$  регулярен тогда и только тогда, когда он не принадлежит образу ни одного из отображений  $f_1, \dots, f_m$ . Действительно, размерность нормализатора у всех сопряжённых элементов одна и та же, поэтому элемент регулярен тогда и только тогда, когда сопряжённый ему элемент максимального тора  $T$  не лежит ни в одной из подгрупп  $U_1, \dots, U_m$ .  $\square$

### Доказательство равенства $\pi_2(G) = 0$

Пусть  $G_{\text{reg}}$  — множество регулярных элементов связной компактной группы Ли  $G$ ,  $G_{\text{sing}} = G \setminus G_{\text{reg}}$ . Согласно теореме 24.16 множество  $G_{\text{sing}}$  имеет в  $G$  коразмерность не менее 3. Поэтому сколь угодно малым шевелением гладкого отображения  $S^2 \rightarrow G$  можно получить отображение, образ которого лежит в  $G_{\text{reg}}$ . Это означает, что равенство  $\pi_2(G) = 0$  для связной компактной группы Ли  $G$  вытекает из следующего утверждения (для наших целей нужен случай  $X = S^2$ ).

**Теорема 24.17.** *Любое непрерывное отображение односвязного пространства  $X$  в связную компактную группу Ли  $G$ , образ которого лежит в  $G_{\text{reg}}$ , гомотопен постоянному.*

**Доказательство.** Пусть  $T$  — максимальный тор в  $G$ ,  $\mathfrak{t}$  — его алгебра Ли. Рассмотрим отображение  $\varphi: G \times \mathfrak{t} \rightarrow G$ , заданное формулой  $\varphi(g, X) = ge^X g^{-1}$ . Если  $t \in T$  и  $X \in \mathfrak{t}$ , то  $te^X t^{-1} = e^X$ , поэтому в действительности мы получаем отображение  $\varphi: (G/T) \times \mathfrak{t} \rightarrow G$ , где  $G/T$  — пространство левых смежных классов  $gT$ .

Пусть  $\mathfrak{t}_{\text{reg}}$  — множество тех  $X \in \mathfrak{t}$ , для которых  $e^X \in G_{\text{reg}}$ . Ясно, что  $X \in \mathfrak{t}_{\text{reg}}$  тогда и только тогда, когда  $ge^X g^{-1} \in G_{\text{reg}}$  для любого  $g \in G$ . Поэтому мы получаем отображение  $\varphi_{\text{reg}}: (G/T) \times \mathfrak{t}_{\text{reg}} \rightarrow G_{\text{reg}}$ , причём это отображение сюръективное, поскольку отображение  $\varphi$  сюръективное. Покажем, что  $\varphi_{\text{reg}}$  — локальный гомеоморфизм. Для этого достаточно проверить, что якобиан отображения  $\varphi_{\text{reg}}$  всюду отличен от нуля.

**Лемма.** *Точка  $(g, X)$  является регулярной точкой отображения  $\varphi: (G/T) \times \mathfrak{t} \rightarrow G$  тогда и только тогда, когда  $X \in \mathfrak{t}_{\text{reg}}$ .*

**Доказательство.** Воспользовавшись тем, что  $e^X$  и  $dX$  коммутируют, получаем  $e^{X+dX} = e^X + e^X dX$ . Кроме того,  $(g + dg)^{-1} = g - g^{-1}(dg)g^{-1}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} (g + dg)e^{X+dX}(g + dg)^{-1} - ge^X g^{-1} &= \\ &= (dg)e^X g^{-1} - ge^X g^{-1}(dg)g^{-1} + g(e^X dX)g^{-1} = \\ &= g(g^{-1} dg - e^X(g^{-1} dg)e^{-X} + e^X(dX)e^{-X})e^X g^{-1}. \end{aligned}$$



Здесь  $dg$  — элемент касательного пространства в точке  $g$ , поэтому  $dg = g dz$ , где  $dz$  — элемент алгебры Ли. Таким образом,  $g^{-1} dg = dz$ .

Воспользуемся обозначениями теоремы 24.13. Отображение  $\text{id} - \text{Ad}_{e^X}$  нулевое на  $V_0 = \mathfrak{t}$ , а на  $V_r$ ,  $r = 1, \dots, m$ , оно будет невырожденным тогда и только тогда, когда  $\theta_r(e^X) \neq 1$ , т. е.  $e^X \notin U_r$ . Таким образом, ограничение отображения  $\text{id} - \text{Ad}_{e^X}$  на  $\sum_{r=1}^m V_r$  невырожденное тогда и только тогда, когда элемент  $e^X$  регулярен, т. е.  $X \in \mathfrak{t}_{\text{reg}}$ .

Ясно также, что ограничение отображения  $\text{Ad}_{e^X}$  на  $\mathfrak{t}$  является автоморфизмом, поэтому оно всегда невырожденное.  $\square$

Построим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} & (G/T) \times \mathfrak{t}_{\text{reg}} & \xrightarrow{\subset} & (G/T) \times \mathfrak{t} \\ & \nearrow \tilde{u} & \downarrow \varphi_{\text{reg}} & \downarrow \varphi \\ X & \xrightarrow{u} & G_{\text{reg}} & \xrightarrow{\subset} & G. \end{array}$$

Здесь  $\tilde{u}$  — поднятие отображения  $u$ . Оно, как и для накрытий, строится посредством поднятий путей, выходящих из отмеченной точки  $x_0 \in X$ . Независимость поднятия от выбора путей, соединяющих  $x_0$  с точкой  $x$ , следует из односвязности пространства  $X$ . Используя естественные включения, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & (G/T) \times \mathfrak{t} & \\ & \nearrow \tilde{u} & \downarrow \varphi \\ X & \xrightarrow{u} & G. \end{array}$$

Пространство  $\mathfrak{t}$  стягиваемо, поэтому отображение  $\tilde{u}$  гомотопно отображению  $X \rightarrow (G/T) \times \{0\}$ . Но  $\varphi(g, 0) = e$  — единичный элемент группы  $G$ , поэтому  $\varphi$  отображает  $(G/T) \times \{0\}$  в единичный элемент  $e$ .  $\square$

## 24.5. $H$ -пространства и алгебры Хопфа

Топологическое пространство  $X$  с отмеченной точкой  $x_0 \in X$  называют  $H$ -пространством, если задано непрерывное отображение  $\mu: X \times X \rightarrow X$ , для которого отображения  $x \mapsto \mu(x, x_0)$  и  $x \mapsto \mu(x_0, x)$  гомотопны тождественному отображению (предполагается, что  $\mu(x_0, x_0) = x_0$ ). Отображение  $\mu$  называют при этом *умножением*.

Теорема Хопфа (теорема 24.23) показывает, что алгебра когомологий  $H$ -пространства над полем характеристики 0 имеет очень специальный вид. Одним из следствий теоремы Хопфа является тот факт, что  $H^2(G; \mathbb{R}) = 0$  для односвязной группы Ли  $G$ .

Естественными примерами  $H$ -пространств служат группы Ли и топологические группы. Но есть и другие примеры.

**Пример 24.1.** *Пространства  $\mathbb{C}P^\infty$  и  $\mathbb{R}P^\infty$  являются  $H$ -пространствами.*

**Доказательство.** отождествим  $\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\}$  с пространством многочленов, сопоставляя точке  $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$  многочлен  $a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ . Умножение многочленов индуцирует умножение на пространстве  $\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\}$ , которое имеет единичный элемент  $(1, 0, 0, \dots)$ . Отождествляя пропорциональные многочлены, получаем умножение на пространстве  $\mathbb{C}P^\infty$  с единичным элементом  $(1 : 0 : 0 : \dots)$ . Для  $\mathbb{R}P^\infty$  конструкция аналогична. □

**Пример 24.2.** *Сфера  $S^7$  является  $H$ -пространством.*

**Доказательство.** Представим сферу  $S^7$  как множество чисел Кэли с единичной нормой. Умножение чисел Кэли индуцирует умножение (неассоциативное) на сфере  $S^7$ . □

**Теорема 24.18.** *Если  $X$  —  $H$ -пространство с отмеченной точкой  $x_0$ , то группа  $\pi_1(X, x_0)$  абелева.*

**Доказательство.** Гомотопию, связывающую петли  $\alpha\beta$  и  $\beta\alpha$ , можно построить следующим образом. Отобразим внутренний ромб на рис. 82 посредством отображения  $(s, t) \mapsto \mu(\alpha(s), \beta(t))$ . Отображения оставшихся четырёх треугольников построим с помощью гомотопий, связывающих отображения  $s \mapsto \alpha(s)$  и  $s \mapsto \mu(\alpha(s), x_0)$  и отображения  $t \mapsto \beta(t)$  и  $t \mapsto \mu(x_0, \beta(t))$ . □

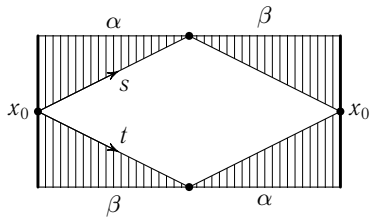


Рис. 82. Построение гомотопии

Теорема 24.18 допускает следующее обобщение.

**Теорема 24.19.** *Любое  $H$ -пространство  $X$  гомотопически просто.*

**Доказательство.** Ясно, что  $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$  и при этом действие группы  $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$  переходит в произведение действий, т. е.  $(\alpha, \beta)(u, v) = (\alpha u, \beta v)$ .

Умножение  $\mu: X \times X \rightarrow X$  индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(X \times X) \times \pi_n(X \times X) & \longrightarrow & \pi_n(X \times X) \\
 \downarrow \mu_* \times \mu_* & & \downarrow \mu_* \\
 \pi_1(X) \times \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(X),
 \end{array}$$

где горизонтальные стрелки — действие группы  $\pi_1$  на  $\pi_n$ .

Пусть  $e_1$  и  $e_n$  — единичные элементы групп  $\pi_1(X)$  и  $\pi_n(X)$ . Тогда для любых  $\alpha \in \pi_1(X)$  и  $u \in \pi_n(X)$  имеем  $(\alpha, e_1)(e_n, u) = (\alpha e_n, e_1 u) = (e_n, u)$ . Поэтому  $\mu_*(\alpha, e_1)\mu_*(e_n, u) = \mu_*(e_n, u)$ , а значит,  $\alpha u = u$ .  $\square$

Пусть  $F$  — аддитивная группа некоторого поля, а  $X$  — связное  $H$ -пространство, для которого все группы  $H_i(X; F) \cong H^i(X; F)$  являются конечномерными пространствами над  $F$ . Пусть  $A = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$ , где  $A^i = H^i(X; F)$ , — алгебра коомологий. Диагональное отображение  $d: X \rightarrow X \times X$  задаёт умножение  $A \otimes A \rightarrow A$  в алгебре коомологий. А умножение  $\mu: X \times X \rightarrow X$  индуцирует отображение  $\Delta = \mu^*: A \rightarrow A \otimes A$ . Это отображение называют *коумножением*. Коумножение  $\Delta$  обладает следующими свойствами.

1. Отображение  $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$  является гомоморфизмом алгебр, т. е.  $\Delta(1) = 1 \otimes 1$  и если  $\Delta(a) = \sum a_{1i} \otimes a_{2i}$  и  $\Delta(b) = \sum b_{1j} \otimes b_{2j}$ , то

$$\Delta(a \cup b) = \sum_{i,j} (-1)^{\dim b_{1j} \dim a_{2i}} (a_{1i} \cup b_{1j}) \otimes (a_{2i} \cup b_{2j}).$$

Это следует из теоремы Кюннета для коомологий с коэффициентами в поле и из закона умножения в алгебре  $H^*(X \times X)$ .

2. Пусть  $p_1: A \otimes A \rightarrow A$  — отображение, заданное формулами  $\alpha^p \otimes 1 \mapsto \alpha^p$  и  $\alpha^p \otimes \alpha^q \mapsto 0$  при  $q > 0$ ; отображение  $p_2: A \otimes A \rightarrow A$  переводит  $1 \otimes \alpha^p$  в  $\alpha^p$ . Тогда в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\ \Delta \downarrow & & \downarrow p_1 \\ A \otimes A & \xrightarrow{p_2} & A \end{array}$$

обе композиции являются тождественными отображениями. Иными словами,  $\Delta(\alpha^p) = \alpha^p \otimes 1 + 1 \otimes \alpha^p + \sum \alpha^r \otimes \alpha^s$ , где  $r, s \geq 1$ . Это свойство коумножения следует из того, что в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\mu} & X \times X \\ \mu \uparrow & & \uparrow \mu(\cdot, x_0) \\ X \times X & \xleftarrow{\mu(x_0, \cdot)} & X \end{array}$$

обе композиции гомотопны тождественному отображению.

3. Имеет место включение  $\Delta(A^p) \subset \bigoplus_{i+j=p} A^i \otimes A^j$ . Это следует из того, что  $H^p(X \times X) \cong \bigoplus_{i+j=p} H^i(X) \otimes H^j(X)$  для коомологий с коэффициентами в поле.

Градуированную\*) ассоциативную алгебру  $A = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$ , для которой задано коумножение  $\Delta$ , обладающее свойствами 1—3, называют *алгеброй*

\*) Предполагается, что  $ab = (-1)^{pq} ba$ , если  $a \in A^p$  и  $b \in A^q$ .

*Хопфа.* Если  $A^0 = F$  (основное поле), то алгебру Хопфа называют *связной* (это условие соответствует линейной связности пространства  $X$ ).

**Теорема 24.20.** Пусть  $\text{char } F = 0$  и  $A$  — связная алгебра Хопфа, мультипликативно порождённая элементом  $x \in A^k$ ,  $k \geq 1$ . Тогда если  $k$  чётно, то  $A = F[x]$  — алгебра полиномов.

**Доказательство.** Ясно, что  $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ , поскольку нет элементов положительной размерности, строго меньшей  $k$ . Пусть  $k$  чётно. Тогда из того, что  $\Delta$  — гомоморфизм алгебр, следует, что  $\Delta(x^n) = \sum_{r=0}^n x^r \otimes x^{n-r}$ . (Обратите внимание, что в случае нечётного  $k$  соответствующее равенство имеет совсем другой вид. Например,  $\Delta(x^2) = 1 \otimes x^2 + x^2 \otimes 1$ , поскольку в этом случае два слагаемых  $x \otimes x$  входят с противоположными знаками.) Предположим, что  $x^n = 0$  для некоторого  $n \geq 2$ , причём такое число  $n$  минимально. Тогда  $0 = \sum_{r=1}^{n-1} x^r \otimes x^{n-r}$ , чего не может быть.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Если  $k$  нечётно, то  $x^2 = 0$ . Поэтому  $A = \Lambda(x)$  — внешняя алгебра; она состоит из элементов вида  $a + bx$ , где  $a, b \in F$ .

**Пример 24.3.** Сфера  $S^{2n}$  не является  $H$ -пространством.

**Доказательство.** Предположим, что сфера  $S^{2n}$  является  $H$ -пространством. Тогда алгебра  $A = H^*(S^{2n}; \mathbb{R})$  является связной алгеброй Хопфа. Алгебра  $A$  мультипликативно порождена элементом  $x \in H^{2n}(S^{2n}; \mathbb{R})$ . Поэтому согласно теореме 24.20 мы имеем  $x^k \neq 0$  для всех  $k$ . С другой стороны,  $x^2 = 0$ .  $\square$

В случае, когда характеристика поля  $F$  равна  $p \neq 0$ , аналог теоремы 24.20 неверен, потому что равенство  $x^n = 0$  может выполняться при  $n = p^m$ . Чтобы доказать версию теоремы 24.20 для полей ненулевой характеристики, нам понадобится следующее утверждение.

**Л е м м а.** Пусть  $n = \sum n_i p^i$  и  $r = \sum r_i p^i$ , где  $0 \leq n_i, r_i \leq p - 1$ . Тогда  $\binom{n}{r} \equiv \prod_i \binom{n_i}{r_i} \pmod{p}$ .

**Доказательство.** Пусть  $1 \leq k \leq p - 1$ . Тогда  $\binom{p}{k}$  делится на  $p$ . Поэтому  $(1 + x)^p \equiv 1 + x^p \pmod{p}$ . Индукцией по  $k$  получаем  $(1 + x)^{p^k} \equiv 1 + x^{p^k} \pmod{p}$ . Значит,

$$\begin{aligned} (1 + x)^n &= (1 + x)^{n_0 + n_1 p + \dots + n_m p^m} = \\ &= (1 + x)^{n_0} (1 + x)^{n_1 p} \dots (1 + x)^{n_m p^m} \equiv \\ &\equiv (1 + x)^{n_0} (1 + x^p)^{n_1} \dots (1 + x^{p^m})^{n_m} \equiv \\ &\equiv \prod_{i=0}^m \sum_{k=0}^{n_i} \binom{n_i}{k} x^{k p^i} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Поэтому коэффициент при  $x^r = x^{r_0+r_1p+\dots+r_m p^m}$  в выражении для  $(1+x)^n$  по модулю  $p$  равен  $\binom{n_0}{r_0} \binom{n_1}{r_1} \dots \binom{n_m}{r_m}$ . С другой стороны, он равен  $\binom{n}{r}$ .  $\square$

Из этой леммы, в частности, следует, что  $\binom{p^m}{k} \equiv 0 \pmod{p}$  для  $0 < r < p^m$ . Поэтому  $\sum_{r=1}^{n-1} x^r \otimes x^{n-r} = 0$  для  $n = p^m$ . Более того, если

$\sum_{r=1}^{n-1} x^r \otimes x^{n-r} = 0$  и  $x^r \neq 0$  для  $1 \leq r \leq n-1$ , то  $n = p^m$  для некоторого  $m$ .

Действительно, пусть  $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_s p^s$ , причём  $n_s \neq 0$  и либо  $n_q \neq 0$  для  $q < s$ , либо  $n_s \neq 1$ . В первом случае положим  $r = n_q p^q$ . Тогда  $\binom{n}{r} \equiv \binom{n_q}{r_q} \pmod{p}$  и  $\binom{n_q}{r_q} = 1$ . Во втором случае положим  $r = p^s$ . Тогда  $r < n$ ,  $\binom{n}{r} \equiv \binom{n_s}{1} \pmod{p}$  и  $\binom{n_s}{1} = n_s$ , причём  $2 \leq n_s \leq p-1$ .

Используя эти сравнения, получаем следующую версию теоремы 24.20.

**Теорема 24.21.** Пусть  $\text{char } F = p$ , где  $p$  — нечётное число, и  $A$  — связная алгебра Хопфа, мультипликативно порождённая элементом  $x \in A^k$ ,  $k \geq 1$ . Тогда если  $k$  нечётно, то  $A = \Lambda(x)$ , а если  $k$  чётно, то либо  $A = F[x]$ , либо  $A = F[x]/(x^{p^m})$ .

В случае  $p = 2$  теорема формулируется и доказывается во многом аналогично. Нужно лишь сделать два замечания. Во-первых, теперь для нечётного  $k$  равенство  $x^2 = 0$  не обязано выполняться. Во-вторых,  $\Lambda(x) = F[x]/(x^2)$ . Поэтому для поля характеристики 2 аналог теоремы 24.20 выглядит следующим образом.

**Теорема 24.22.** Пусть  $\text{char } F = 2$  и  $A$  — связная алгебра Хопфа, мультипликативно порождённая элементом  $x \in A^k$ ,  $k \geq 1$ . Тогда либо  $A = F[x]$ , либо  $A = F[x]/(x^{2^m})$ .

**Теорема 24.23** (Хопф [Ho7]). Пусть  $A$  — связная алгебра Хопфа над полем  $F$  нулевой характеристики, причём пространство  $A^n$  конечномерно для любого  $n$ . Тогда алгебра  $A$  изоморфна (как алгебра Хопфа) тензорному произведению внешней алгебры от образующих нечётных размерностей и полиномиальной алгебры от образующих чётных размерностей.

**Доказательство.** Из того, что пространство  $A^n$  конечномерно для любого  $n$ , следует, что можно выбрать образующие  $x_1, x_2, \dots$  алгебры  $A$  так, что  $\dim x_i \leq \dim x_{i+1}$  (подразумевается, что  $x_i \in A^{\dim x_i}$ ). Пусть  $A_n$  — подалгебра в  $A$ , порождённая элементами  $x_1, \dots, x_n$ . Она является подалгеброй Хопфа, т. е.  $\Delta(A_n) \subset A_n \otimes A_n$ . Действительно,  $\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i + \sum y_r \otimes y_s$ , где  $\dim y_r, \dim y_s < \dim x_i$ . Поэтому  $y_r, y_s \in A_{i-1} \subset A_i$ . Будем также предполагать, что  $x_n \notin A_{n-1}$  (иначе образующую  $x_n$  можно исключить).

Согласно теореме 24.20 алгебра, порождённая элементом  $x_n$ , является полиномиальной алгеброй  $F[x_n]$  в случае, когда размерность элемента  $x_n$  чётна, и внешней алгеброй  $\Lambda(x_n)$  в случае, когда размерность элемента  $x_n$  нечётна. Поэтому из того, что алгебра  $A$  коммутативна (в градуированном смысле) и ассоциативна, следует, что имеет место естественный эпиморфизм  $A_{n-1} \otimes F[x_n] \rightarrow A_n$  (размерность элемента  $x_n$  чётна) или  $A_{n-1} \otimes \Lambda(x_n) \rightarrow A_n$  (размерность элемента  $x_n$  нечётна). Достаточно доказать, что этот эпиморфизм является мономорфизмом (а затем воспользоваться индукцией по  $n$ ).

Рассмотрим идеал  $I$ , порождённый элементом  $x_n^2$  и элементами  $A_{n-1}$  положительной размерности. Иными словами,  $I$  состоит из выражений вида  $\sum a_k x_n^k$ , где  $a_k \in A_{n-1}$ , причём компоненты нулевой размерности элементов  $a_0$  и  $a_1$  равны 0. Ясно, что  $x_n \notin I$ , поскольку элементы идеала  $I$ , имеющие размерность  $\dim x_n$ , должны лежать в  $A_{n-1}$  (идеал  $I$  не содержит элементов вида  $\lambda x_n$ , где  $\lambda \in F$ ).

Рассмотрим композицию отображений

$$A_n \xrightarrow{\Delta} A_n \otimes A_n \xrightarrow{p} A_n \otimes (A_n/I),$$

где  $p$  — естественная проекция. Если  $a \in A_{n-1}$  — элемент положительной размерности, то  $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \sum a_i \otimes a_j$ , где  $a_j \in A_{n-1}$  — элемент положительной размерности. Поэтому  $p\Delta(a) = a \otimes 1$  (для элемента  $a \in F$  такое равенство тоже имеет место). Кроме того,  $\Delta(x_n) = x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n + \sum y_r \otimes y_s$ , где  $y_s \in A_{n-1}$  — элемент положительной размерности. Поэтому  $p\Delta(x_n) = x_n \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x}_n$ , где  $\bar{x}_n$  — образ элемента  $x_n$  в  $A_n/I$ .

Рассмотрим сначала случай, когда размерность элемента  $x_n$  чётна. Предположим, что есть некоторое нетривиальное соотношение  $\sum a_k x_n^k = 0$ . Применим к этому соотношению отображение  $p\Delta$ . Учтывая, что  $\bar{x}_n^2 = 0$ , получим

$$\begin{aligned} 0 &= \sum (a_k \otimes 1)(x_n \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x}_n)^k = \\ &= \sum a_k x_n^k \otimes 1 + \sum k a_k x_n^{k-1} \otimes \bar{x}_n. \end{aligned}$$

Но по условию  $\sum a_k x_n^k = 0$ , поэтому  $\sum k a_k x_n^{k-1} \otimes \bar{x}_n = 0$ . Из этого следует, что  $\sum k a_k x_n^{k-1} = 0$ . Действительно, как мы уже упоминали,  $x_n \in I$ , поэтому  $\bar{x}_n \neq 0$ . Соотношение  $\sum k a_k x_n^{k-1} = 0$  имеет меньшую степень, чем исходное соотношение  $\sum a_k x_n^k = 0$ . Ясно также, что это соотношение нетривиально, поскольку мы имеем дело с полем нулевой характеристики. Если мы выберем исходное соотношение минимально возможной степени, то немедленно придём к противоречию.

Рассмотрим теперь случай, когда размерность элемента  $x_n$  нечётна. Предположим, что есть некоторое нетривиальное соотношение  $a_0 + a_1 x_n = 0$ . Применим к нему отображение  $p\Delta$ . В результате получим, что

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \otimes 1 + a_1 \otimes 1(x_n \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x}_n) = \\ &= (a_0 + a_1 x_n) \otimes 1 + a_1 \otimes \bar{x}_n. \end{aligned}$$

Но по условию  $a_0 + a_1 x_n = 0$ , поэтому  $a_1 \otimes \bar{x}_n = 0$ . Как и в предыдущем случае,  $\bar{x}_n \neq 0$ . Следовательно,  $a_1 = 0$ , а значит,  $a_0 = 0$ .  $\square$

*С л е д с т в и е 1.* Пусть  $G$  — группа Ли. Тогда алгебра когомологий  $H^*(G; \mathbb{R})$  является внешней алгеброй от образующих нечётных размерностей.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Полиномиальная алгебра бесконечномерна, поэтому конечномерная алгебра не может содержать полиномиальную подалгебру.  $\square$

*С л е д с т в и е 2.* Если  $G$  — односвязная группа Ли, то  $H^2(G; \mathbb{R}) = 0$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Из односвязности следует, что  $H^1(G; \mathbb{R}) = 0$ . Поэтому в алгебре когомологий  $H^*(G; \mathbb{R})$  есть образующие только размерности не меньше 3.  $\square$

## Решения и указания

**3.1.** Требуемый изоморфизм, очевидно, имеет место уже на уровне относительных цепей.

**3.2.** Данную коммутативную диаграмму можно рассматривать как короткую точную последовательность цепных комплексов  $0 \rightarrow C'_* \rightarrow C_* \rightarrow C''_* \rightarrow 0$ , где  $C'_*$  — цепной комплекс  $\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} A' \rightarrow 0$ ; комплексы  $C_*$  и  $C''_*$  определяются аналогично. Нетривиальные гомологии комплекса  $C'_*$  — это как раз  $\text{Ker } \alpha$  и  $\text{Coker } \alpha$ .

**3.3.** Доказательство теоремы 3.2 без каких-либо существенных изменений годится и в этом случае. Нужно лишь слово «изоморфизм» заменить на «моморфизм» или «эпиморфизм».

**3.4.** Сначала докажем, что  $\varphi_2$  индуцирует гомоморфизм такого вида. Пусть  $x \in \text{Ker}(\varphi_3\alpha_2)$ . Ясно, что  $\varphi_2x \in \text{Im } \varphi_2$ , поэтому остаётся проверить, что  $\varphi_2x \in \text{Im } \beta_1 = \text{Ker } \beta_2$ . Но  $0 = \varphi_3\alpha_2x = \beta_2\varphi_2x$ . Если  $x \in \text{Ker } \alpha_2$ , то  $x \in \text{Im } \alpha_1$ , поэтому  $\varphi_2x \in \text{Im } \varphi_2\alpha_1$ . Если  $x \in \text{Ker } \varphi_2$ , то  $\varphi_2x = 0$ . Таким образом, отображение  $\Phi$  определено корректно. Ясно также, что  $\Phi$  — гомоморфизм.

Докажем теперь, что  $\Phi$  — эпиморфизм. Пусть  $y \in \text{Im } \varphi_2 \cap \text{Im } \beta_1$ . Тогда существует элемент  $x \in A_2$ , для которого  $\varphi_2x = y$ . При этом  $\varphi_3\alpha_2x = \beta_2\varphi_2x = \beta_2y = 0$ , поскольку  $y \in \text{Im } \beta_1 = \text{Ker } \beta_2$ . Значит,  $x \in \text{Ker}(\varphi_3\alpha_2)$ .

Докажем, наконец, что  $\Phi$  — моморфизм. Пусть элемент  $x \in \text{Ker}(\varphi_3\alpha_2)$  таков, что  $\varphi_2x \in \text{Im}(\varphi_2\alpha_1)$ , т. е.  $\varphi_2x = \varphi_2\alpha_1z$  для некоторого  $z \in A_1$ . Тогда  $x = \alpha_1z + \omega$ , где  $\omega \in \text{Ker } \varphi_2$ . Поэтому  $x \in \text{Ker } \alpha_2 + \text{Ker } \varphi_2$ .

**3.5.** а) Рассмотрим изоморфизм  $f = \eta_1^{-1}\eta_2$ . Требуемое равенство эквивалентно равенству  $f + f^{-1} = 2\text{id}$ , т. е.  $f^2 + \text{id} = 2f$ . Последнее равенство можно переписать в виде  $(f - \text{id})(f - \text{id}) = 0$ .

Докажем, что  $(f - \text{id})\alpha_2 = 0$  и  $\alpha_3(f - \text{id}) = 0$ . Первое равенство доказывается так:  $\eta_1^{-1}\eta_2\alpha_2 = \eta_1^{-1}\varphi_2\beta_2 = \eta_1^{-1}\eta_1\alpha_2 = \alpha_2$ . Чтобы доказать второе равенство, воспользуемся тем, что  $\varphi_4\alpha_3 = \beta_3\eta_1$ , т. е.  $\alpha_3 = \varphi_4^{-1}\beta_3\eta_1$ :  $\alpha_3\eta_1^{-1}\eta_2 = \varphi_4^{-1}\beta_3\eta_1\eta_1^{-1}\eta_2 = \varphi_4^{-1}\beta_3\eta_2 = \varphi_4^{-1}\varphi_4\alpha_3 = \alpha_3$ .

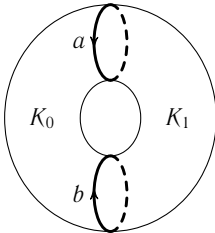
Итак,  $\text{Im}(f - \text{id}) \subset \text{Ker } \alpha_3 = \text{Im } \alpha_2$  и  $\text{Im } \alpha_2 \subset \text{Ker}(f - \text{id})$ , поэтому  $(f - \text{id})^2 = 0$ .

б) Предположим сначала, что указанный гомоморфизм  $\delta$  существует. Положим  $\eta_2 = \eta_1 + \eta_1\delta$ . Первые два условия обеспечивают коммутативность диаграммы, а последнее — то, что  $\eta_2$  — гомоморфизм колец. Покажем, что  $\eta_2$  — моморфизм. Если  $\eta_2(x) = 0$ , то  $\eta_1(x) = \eta_1(-\delta(x))$ , поэтому  $x = -\delta(x)$ , а значит,  $\delta(x) = -\delta^2(x) = 0$ , поскольку  $\text{Im } \delta \subset \text{Ker } \alpha_3 = \text{Im } \alpha_2 \subset \text{Ker } \delta$ . Покажем, что  $\eta_2$  — эпиморфизм. Пусть  $y \in B_3$  и  $y = \eta_1(x)$ . Тогда  $\eta_2(x - \delta(x)) = \eta_1(x - \delta(x)) - \eta_1(\delta(x) - \delta^2(x)) = \eta_1(x) = y$ .



Предположим теперь, что существуют диаграммы с двумя разными изоморфизмами  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . Тогда можно положить  $\delta = \eta_1^{-1}\eta_2 - \text{id}$ . Легко проверить, что  $\delta$  обладает всеми требуемыми свойствами.

в) Коммутативные диаграммы ( $i = 1, 2$ )



$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \eta_i & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

где  $\eta_1 = \text{id}$ ,  $\eta_2(x, y) = (y, x)$ ,  $\varphi(x) = (x, x)$  и  $\psi(x, y) = x + y$ , дают требуемый пример.

Рис. 83. Тор  $T^2$

**3.6.** Представим тор  $T^2$  в виде объединения симплициальных комплексов  $K_0$  и  $K_1$  и выберем в  $H_1(K_0 \cap K_1)$  образующие  $a$  и  $b$  (рис. 83). Из точной последовательности

$$H_1(K_0 \cap K_1) \xrightarrow{(j_0, -j_1)} H_1(K_0) \oplus H_1(K_1) \longrightarrow H_1(T^2) \longrightarrow \tilde{H}_0(K_0 \cap K_1) \longrightarrow 0$$

получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Im } \varphi \longrightarrow H_1(T^2) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

где  $\varphi = (j_0, -j_1)$ . Группа  $H_1(K_0 \cap K_1)$  состоит из элементов вида  $na + mb$ . При гомоморфизме  $\varphi$  такой элемент переходит в пару  $(nj_0(a) + mj_0(b), -nj_1(a) - mj_1(b))$ . Но  $j_0(a) = j_0(b)$  и  $j_1(a) = j_1(b)$ . Поэтому  $\varphi$  имеет вид  $(m, n) \mapsto (n + m, -n - m)$ . Значит,  $\text{Ker } \varphi = \mathbb{Z}$  и  $\text{Im } \varphi = \mathbb{Z}$ . Точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(T^2) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

расщепляется, поэтому  $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow H_2(T^2) \longrightarrow H_1(K_0 \cap K_1) \xrightarrow{(j_0, -j_1)} H_1(K_0) \oplus H_1(K_1)$$

получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow H_2(T^2) \longrightarrow \text{Ker } \varphi \longrightarrow 0.$$

Значит,  $H_2(T^2) \cong \text{Ker } \varphi \cong \mathbb{Z}$ .

**3.7.** Согласно задаче 10.1 из части I мы имеем  $S^p \times S^q / S^p \vee S^q \approx S^{p+q}$ . Поэтому  $H_k(S^p \times S^q, S^p \vee S^q) \cong H_k(S^p \times S^q \cup C(S^p \vee S^q)) \cong H_k(S^{p+q})$  при  $k \geq 1$ .

**3.8.** Запишем точную последовательность пары  $(S^p \times S^q, S^p \vee S^q)$  и воспользуемся результатом задачи 3.7. Получим, что  $H_k(S^p \times S^q) \cong \mathbb{Z}$  при  $k = 0, p, q, p + q$  (если  $p = q$ , то  $H_p(S^p \times S^q) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ); остальные группы нулевые.

**3.9.** а) Пусть  $K_0$  — замкнутая  $\varepsilon$ -окрестность данного узла  $K, K_1$  — замыкание множества  $S^3 \setminus K_0$ . Тогда  $K_0 \cup K_1 = S^3$  и  $K_0 \cap K_1 = T^2$  — двумерный тор. Нам нужно вычислить гомологии  $S^3 \setminus K \sim K_1$ . Мы предполагаем, что сфера  $S^3$  триангулирована так, что её триангуляция даёт триангуляции пространств  $K_0$  и  $K_1$ . Прежде всего заметим, что пространство  $K_1$  гомотопически эквивалентно симплициальному комплексу, не имеющему симплексов размерности не меньше 3. Действительно,

трёхмерные симплексы  $K_1$  можно последовательно уничтожать начиная с границы. Таким образом,  $H_i(K_1) = 0$  при  $i \geq 3$ . Ясно также, что  $H_0(K_1) = \mathbb{Z}$ .

Запишем последовательность Майера—Вьеториса:

$$H_{i+1}(K_0) \oplus H_{i+1}(K_1) \xrightarrow{i_*} H_{i+1}(S^3) \xrightarrow{\partial_*} H_i(T^2) \xrightarrow{j_*} H_i(K_0) \oplus H_i(K_1) \xrightarrow{i_*} H_i(S^3).$$

При  $i = 2$  получаем

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(K_1) \longrightarrow 0.$$

Гомоморфизм  $\partial_*$  здесь устроен следующим образом. Образуемая  $\alpha$  группы  $H_3(S^3)$  представлена суммой согласованно ориентированных симплексов, на которые разбита сфера  $S^3$ . Эти симплексы разбиваются на две части: те, которые принадлежат  $K_0$ , и те, которые принадлежат  $K_1$ . Граница у этих двух частей общая. Эта граница и есть  $\partial_*\alpha$ . Таким образом,  $\partial_*$  — изоморфизм. Поэтому  $H_2(K_1) = 0$ .

При  $i = 1$  получаем

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j_*} \mathbb{Z} \oplus H_1(K_1) \longrightarrow 0.$$

При отображении  $j_*$  параллель тора переходит в образующую группы  $H_1(K_0) = \mathbb{Z}$ , поэтому меридиан тора переходит в образующую группы  $H_1(K_1)$ . Значит,  $H_1(K_1) = \mathbb{Z}$ , причём образующая группы  $H_1(K_1)$  представлена малой окружностью в плоскости, трансверсально пересекающей узел (рис. 84).

б) Как и при решении задачи а), получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z}^n \longrightarrow H_2(K_1) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{2n} \xrightarrow{j_*} \mathbb{Z}^n \oplus H_1(K_1) \longrightarrow 0.$$

При этом  $\partial_*(1) = (1, \dots, 1)$ , поэтому  $H_2(K_1) = \mathbb{Z}^{n-1}$ . При отображении  $j_*$  параллели  $n$  торов переходят в образующие группы  $H_1(K_0) = \mathbb{Z}^n$ , поэтому меридианы этих  $n$  торов переходят в образующие группы  $H_1(K_1)$ . Значит,  $H_1(K_1) = \mathbb{Z}^n$ , причём образующие этой группы представлены малыми окружностями, надетыми на компоненты зацепления.

**3.10.** Запишем последовательность Майера—Вьеториса для  $K_0 = M^n \setminus \text{int } D^n$  и  $K_1 = D^n$ :

$$H_k(S^{n-1}) \longrightarrow H_k(M^n \setminus \text{int } D^n) \oplus H_k(D^n) \longrightarrow H_k(M^n) \longrightarrow H_{k-1}(S^{n-1}).$$

Если  $k \geq 1$ , то  $H_k(D^n) = 0$ , а если  $2 \leq k \leq n - 2$ , то  $H_k(S^{n-1}) = 0$  и  $H_{k-1}(S^{n-1}) = 0$ ; при  $k = 1$  можно рассмотреть приведённые группы гомологий.

**3.11.** Пусть  $K'$  — барицентрическое подразделение симплицального комплекса  $K$ . Построим симплицальное отображение  $f: K' \rightarrow N(\mathcal{L})$  следующим образом. Каждый симплекс  $\Delta$  комплекса  $K$  покрыт одним из подкомплексов  $L_i$ . Сопоставим барицентру  $v$  симплекса  $\Delta$  наименьший из таких индексов  $i$ . Нужно проверить, что если в  $K'$  есть симплекс с вершинами  $v_0, v_1, \dots, v_k$ , которым соответствуют подкомплексы  $L_{i_0}, L_{i_1}, \dots, L_{i_k}$ , то в  $N(\mathcal{L})$  есть симплекс с вершинами  $L_{i_0}, \dots, L_{i_k}$ , т. е.  $L_{i_0} \cap \dots \cap L_{i_k} \neq \emptyset$ . Можно считать, что в исходном симплицальном комплексе  $K$

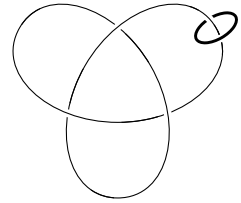


Рис. 84. Образующая гомологий дополнения узла

точка  $v_0$  — вершина,  $v_1$  — середина ребра,  $v_2$  — центр двумерной грани и т. д. Тогда если  $v_m \in L_{i_m}$ , то  $v_0, \dots, v_{m-1} \in L_{i_m}$ . Поэтому  $v_{i_0} \in L_{i_0} \cap \dots \cap L_{i_k}$ .

Докажем, что отображение  $f$  индуцирует изоморфизм гомологий. Применим для этого индукцию по  $n$ . При  $n = 1$  комплекс  $K = L_1$  ацикличен и  $N(\mathcal{L}) = * —$  одна точка. Так что база индукции очевидна. Докажем теперь шаг индукции. Пусть  $\mathcal{L}_1 = \{L_1, \dots, L_n\}$ ,  $K_1 = L_1 \cup \dots \cup L_n$  и  $K_2 = L_{n+1}$ . Рассмотрим в  $N(\mathcal{L})$  подкомплексы  $N_1 = N(\mathcal{L}_1)$  и  $N_2$  — замкнутую звезду вершины  $(n + 1)$ . По построению  $f$  отображает  $K'_1$  в  $N_1$ , а по предположению индукции ограничение  $f$  на  $K'_1$  индуцирует изоморфизм гомологий. Ограничение  $f$  на  $K'_2$  тоже индуцирует изоморфизм гомологий, поскольку комплекс  $K_2 = L_{n+1}$  ацикличен, а  $N_2$  — конус с вершиной  $(n + 1)$ .

Пусть  $M_i = L_i \cup L_{n+1}$ . Тогда  $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\}$  — покрытие множества  $K_1 \cap K_2$ , которое обладает теми же свойствами. Поэтому  $f$  индуцирует изоморфизм гомологий комплексов  $K_1 \cap K_2$  и  $N(\mathcal{M}) = N_1 \cap N_2$ . Запишем теперь точную последовательность Майера—Вьеториса:

$$\begin{array}{ccccccc} H_k(K_1 \cap K_2) & \longrightarrow & H_k(K_1) \oplus H_k(K_2) & \longrightarrow & H_k(K) & \longrightarrow & \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \\ H_k(N_1 \cap N_2) & \longrightarrow & H_k(N_1) \oplus H_k(N_2) & \longrightarrow & H_k(N) & \longrightarrow & \\ & & & & \longrightarrow & H_{k-1}(K_1 \cap K_2) & \longrightarrow & H_{k-1}(K_1) \oplus H_{k-1}(K_2) \\ & & & & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ & & & & \longrightarrow & H_{k-1}(N_1 \cap N_2) & \longrightarrow & H_{k-1}(N_1) \oplus H_{k-1}(N_2). \end{array}$$

Пары крайних отображений — изоморфизмы, поэтому согласно 5-лемме среднее отображение тоже изоморфизм.

4.1. В случае б) построим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id}_A & & \downarrow \Phi \oplus \psi & & \downarrow \text{id}_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus C & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

где  $(\Phi \oplus \psi)(b) = (\Phi(b), \psi(b))$ . Легко проверить, что эта диаграмма коммутативна; для этого нужно воспользоваться тем, что  $\psi\varphi = 0$  и  $\Phi\varphi = \text{id}_A$ . Поэтому согласно 5-лемме  $\Phi \oplus \psi$  — изоморфизм.

В случае в) построим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \text{id}_A & & \uparrow \varphi + \Psi & & \uparrow \text{id}_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus C & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

где  $(\varphi + \Psi)(a, c) = \varphi(a) + \Psi(c)$ . Эта диаграмма коммутативна, поскольку  $\psi\varphi = 0$  и  $\psi\Psi = \text{id}_C$ .

4.2. а) Отображение  $\pi_k(B) \xrightarrow{s_*} \pi_k(E) \xrightarrow{p_*} \pi_k(B)$  тождественное, поэтому  $p_*$  — эпиморфизм. При  $k = n + 1$  получаем, что отображение  $\partial_*: \pi_{n+1}(B) \rightarrow \pi_n(F)$  нулевое. В результате получаем точную последовательность  $0 \rightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \rightarrow 0$ , причём у гомоморфизма  $p_*$  есть правый обратный  $s_*$ .

б) Отображение  $\pi_k(F) \xrightarrow{i_*} \pi_k(E) \xrightarrow{r_*} \pi_k(F)$  тождественное, поэтому  $i_*$  — мономорфизм. При  $k = n - 1$  получим, что отображение  $\partial_*: \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F)$  нулевое. В результате получаем точную последовательность  $0 \rightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \rightarrow 0$ , причём у гомоморфизма  $i_*$  есть левый обратный  $r_*$ .

в) Пространство  $F$  стягиваемо в  $E$ , поэтому любой сфероид в  $F$  стягиваем в  $E$ . Следовательно, отображение  $\pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E)$  нулевое. В результате мы получаем точную последовательность  $0 \rightarrow \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(F) \rightarrow 0$ . Докажем теперь, что гомоморфизм  $\partial_*$  имеет правый обратный.

Фиксируем гомотопию  $f_t: E \rightarrow E$ , для которой  $f_0|_F = \text{id}_F$  и  $f_1(E) = e_0$  — одна точка; можно считать, что  $e_0 \in F$ . Пусть  $\varphi: S^{n-1} \rightarrow F$  — сфероид в  $F$ . Тогда  $f_t \varphi$  можно рассматривать как  $n$ -мерный сфероид в  $B$ . Гомотопным сфероидам в  $F$  соответствуют гомотопные сфероиды в  $B$ , поэтому мы получаем гомоморфизм  $\pi_{n-1}(F) \rightarrow \pi_n(B)$ . Ясно, что этот гомоморфизм является правым обратным для гомоморфизма  $\partial_*$ .

4.3. Каждому гомоморфизму  $\varphi \in \text{Hom}(A, \mathbb{Z})$  можно сопоставить гомоморфизм  $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}(mA, \mathbb{Z})$  следующим образом:  $\tilde{\varphi}(a) = \varphi(ma)$ ; та же самая формула задаёт и обратное соответствие. Нужно лишь проверить, что если  $ma = 0$ , то  $\varphi(a) = 0$ . Предположим, что  $\varphi(a) = k$ . Тогда  $0 = \varphi(ma) = mk$ , поэтому  $k = 0$ .

4.4. Построим последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  следующим образом. Элемент  $a_1$  произвольный; элемент  $a_2$  таков, что  $2a_2 = a_1$ ; элемент  $a_3$  таков, что  $3a_3 = a_2$ , и т. д. После того как выбран элемент  $a_{n-1}$ , есть  $n$  вариантов выбора элемента  $a_n$ . Поэтому множество таких последовательностей несчётно. Действительно, даже если на каждом шаге есть только два варианта выбора элемента, то уже получается несчётное множество последовательностей (множество всех двоичных дробей несчётно).

Любой последовательности  $a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  можно сопоставить гомоморфизм  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , положив  $f\left(\frac{1}{n!}\right) = a_n$ . Действительно, равенство  $n! f\left(\frac{1}{n!}\right) = f(1)$  выполняется, поскольку  $n! a_n = a_1$ . Ясно также, что если задано  $f\left(\frac{1}{n!}\right)$  и  $f$  — гомоморфизм, то задано  $f\left(\frac{1}{n}\right) = (n-1)! f\left(\frac{1}{n!}\right)$ , а значит, задано  $f\left(\frac{m}{n}\right)$  для любого целого  $m$ .

4.5. Для группы  $T$  есть свободная резольвента вида  $0 \rightarrow \mathbb{Z}^r \xrightarrow{i} \mathbb{Z}^r \rightarrow T \rightarrow 0$ , где  $i(e_k) = m_k e_k$  для стандартных образующих группы  $\mathbb{Z}^r$ . Группа  $\text{Ext}(A, \mathbb{Z})$  — это факторгруппа  $\text{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$  по образу группы  $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}^r, \mathbb{Z})$  при отображении, индуцированном отображением  $(0, i)$ , т. е. по образу группы  $\text{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z})$  при отображении  $i_*$ , индуцированном отображением  $i$ . Пусть  $\varepsilon_k \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z})$  — элемент, двойственный  $e_k$ , т. е.  $\varepsilon_k(e_j) = \delta_{kj}$ . Тогда  $i_*(\varepsilon_k) = m_k \varepsilon_k$ . Поэтому фактор  $\text{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z})$  по образу отображения  $i_*$  изоморфен  $T$ .

4.6. Используя свободные резольвенты  $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$  и  $0 \rightarrow R' \rightarrow F' \rightarrow B \rightarrow 0$  и канонический изоморфизм  $A \otimes G \cong G \otimes A$ , можно построить коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \text{Tor}(B, A) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R \otimes R' & \longrightarrow & F \otimes R' & \longrightarrow & A \otimes R' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R \otimes F' & \longrightarrow & F \otimes F' & \longrightarrow & A \otimes F' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Tor}(A, B) & \longrightarrow & R \otimes B & \longrightarrow & F \otimes B \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Требуется построить изоморфизм  $\text{Tor}(A, B) \rightarrow \text{Tor}(B, A)$ . Это делается точно так же, как строится связывающий гомоморфизм в точной последовательности пары. Для удобства введём единообразные обозначения для групп и гомоморфизмов:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X_{11} & \xrightarrow{\beta_{11}} & X_{12} & \xrightarrow{\beta_{12}} & X_{13} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_{11} & & \downarrow \alpha_{12} & & \downarrow \alpha_{13} \\
 0 & \longrightarrow & X_{21} & \xrightarrow{\beta_{21}} & X_{22} & \xrightarrow{\beta_{22}} & X_{23} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_{21} & & \downarrow \alpha_{22} & & \downarrow \alpha_{23} \\
 & & X_{31} & \xrightarrow{\beta_{31}} & X_{32} & \xrightarrow{\beta_{32}} & X_{33} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Требуется построить изоморфизм  $\text{Кег } \alpha_{13} \rightarrow \text{Кег } \beta_{31}$ .

Пусть  $x_{13} \in \text{Кег } \alpha_{13}$ . Пользуясь эпиморфностью гомоморфизма  $\beta_{12}$ , выберем элемент  $x_{12} \in X_{12}$ , для которого  $\beta_{12}(x_{12}) = x_{13}$ . Тогда  $\beta_{22}\alpha_{12}(x_{12}) = \alpha_{13}\beta_{12}(x_{12}) = \alpha_{13}(x_{13}) = 0$ , поэтому для выбранного элемента  $x_{12}$  существует единственный элемент  $x_{21}$ , для которого  $\beta_{21}(x_{21}) = \alpha_{12}(x_{12})$ . Сам элемент  $x_{12}$  не единствен. Но если  $x'_{12}$  — другой элемент, для которого  $\beta_{12}(x'_{12}) = x_{13}$ , то  $\beta_{12}(x_{12} - x'_{12}) = 0$ , поэтому  $x_{12} - x'_{12} = \beta_{11}(x_{11})$  для некоторого  $x_{11} \in X_{11}$ .

Перейдём от элемента  $x_{21}$  к элементу  $x_{31} = \alpha_{21}(x_{21}) \in X_{31}$ . Этот элемент определён однозначно. Действительно,  $\beta_{21}(x_{21} - x'_{21}) = \alpha_{12}(x_{12} - x'_{12}) = \alpha_{12}\beta_{11}(x_{11}) = \beta_{21}\alpha_{11}(x_{11})$ . Но  $\beta_{21}$  — мономорфизм, поэтому  $x_{21} - x'_{21} = \alpha_{11}(x_{11})$ , а значит,  $\alpha_{21}(x_{21} - x'_{21}) = \alpha_{21}\alpha_{11}(x_{11}) = 0$ .

Проверим теперь, что  $x_{31} \in \text{Ker } \beta_{31}$ . По построению  $\beta_{31}(x_{31}) = \beta_{31}\alpha_{21}(x_{21}) = \alpha_{22}\beta_{21}(x_{21}) = \alpha_{22}\alpha_{12}(x_{12}) = 0$ .

Отображение  $\text{Ker } \beta_{31} \rightarrow \text{Ker } \alpha_{13}$  строится аналогично. Ясно, что при этом элемент  $x_{31} = \alpha_{21}(x_{21})$  переходит в  $x_{13}$ , т. е. построенные отображения взаимно обратны.

**4.7.** Для периодической группы  $T$  существует резольвента вида  $0 \rightarrow F \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} T \rightarrow 0$ , где  $F$  — свободная абелева группа. Действительно, пусть при эпиморфизме  $p: F \rightarrow T$  образующая  $f_\alpha$  переходит в элемент порядка  $n_\alpha$ . Тогда мы полагаем  $i(f_\alpha) = n_\alpha f_\alpha$ . Предположим, что  $\text{Ext}(T, \mathbb{Z}) = 0$ . Тогда отображение  $\text{Hom}(F, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} \text{Hom}(F, \mathbb{Z})$  является изоморфизмом. Пусть  $\varphi \in \text{Hom}(F, \mathbb{Z})$  и  $\varphi(f_\alpha) = k_\alpha$ . Тогда  $\tilde{i}\varphi(f_\alpha) = n_\alpha k_\alpha$ . Поэтому из того, что  $\tilde{i}$  — изоморфизм, следует, что  $n_\alpha = \pm 1$ . Но в таком случае  $i$  — изоморфизм, а значит,  $T = 0$ .

**4.8.** Рассмотрим гомоморфизмы  $\alpha: G \rightarrow A$  и  $\beta: G \rightarrow B$ . Если  $\varphi\alpha = 0$ , то  $\alpha = 0$ , поскольку  $\varphi$  — мономорфизм. Значит,  $\tilde{\varphi}$  — мономорфизм. Докажем теперь, что  $\text{Im } \tilde{\varphi} = \text{Ker } \tilde{\psi}$ , т. е.  $\beta = \varphi\alpha$  для некоторого  $\alpha$  тогда и только тогда, когда  $\psi\beta = 0$ . Если  $\beta = \varphi\alpha$ , то  $\psi\beta = \psi\varphi\alpha = 0$ , поскольку  $\psi\varphi = 0$ . Если  $\psi\beta(g) = 0$ , то  $\beta(g) \in \text{Ker } \psi = \text{Im } \varphi$ , т. е.  $\beta(g) = \varphi(a)$ , причём элемент  $a \in A$  определён однозначно, поскольку  $\varphi$  — мономорфизм. Поэтому можно положить  $\alpha(g) = \varphi^{-1}\beta(g)$ .

**4.9.** а) Задача 4.8 показывает, что нужно лишь доказать, что  $\tilde{\psi}$  — эпиморфизм. Другими словами, для любого гомоморфизма  $\gamma: F \rightarrow C$  можно выбрать гомоморфизм  $\beta: F \rightarrow B$  так, что  $\gamma = \psi\beta$ . Пусть  $\{f_\alpha\}$  — базис группы  $F$ . Положим  $\beta(f_\alpha) = b_\alpha$ , где  $b_\alpha$  — произвольный элемент группы  $B$ , для которого  $\psi(b_\alpha) = \gamma(f_\alpha)$ ; такой элемент существует, поскольку  $\psi$  — эпиморфизм. Гомоморфизм свободной группы достаточно задать на образующих.

б) Теорема 4.2 показывает, что нужно лишь доказать, что  $\tilde{\varphi}$  — эпиморфизм. Другими словами, если  $A \subset B$  — подгруппа, то любой гомоморфизм  $\alpha: A \rightarrow G$  можно продолжить до гомоморфизма  $\beta: B \rightarrow G$ . Пусть  $x \in B \setminus A$ . Продолжим гомоморфизм  $\alpha$  на группу, порождённую  $x$  и  $A$ , следующим образом:

1) если  $mx \notin A$  для всех  $m \in \mathbb{N}$ , то положим  $\beta(x) = 0$ ;

2) если  $mx \in A$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ , то выберем минимальное число  $n \in \mathbb{N}$ , обладающее этим свойством, и положим  $\beta(x) = g$ , где  $g$  — элемент группы  $G$ , для которого  $ng = \alpha(nx)$ .

Требуемый гомоморфизм теперь можно построить по индукции (если группа  $B/A$  не конечно порождённая, то индукция трансфинитная).

**4.10.** Мы будем неоднократно пользоваться результатом задачи 3.4, поэтому введём для краткости следующие обозначения. Пусть  $\Sigma$  — коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta} & B_2. \end{array}$$

Положим  $\text{Im } \Sigma = (\text{Im } \varphi_2 \cap \text{Im } \beta) / \text{Im}(\varphi_2\alpha)$  и  $\text{Ker } \Sigma = \text{Ker}(\varphi_2\alpha) / (\text{Ker } \alpha + \text{Ker } \varphi_1)$ . При таких обозначениях задача 3.4 формулируется так:  $\text{Ker } \Sigma_1 \cong \text{Im } \Sigma_2$ , где  $\Sigma_1$  — левый квадрат, а  $\Sigma_2$  — правый квадрат. Обратите внимание, что если мы запишем

ту же самую коммутативную диаграмму по-другому:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & B_2, \end{array}$$

то получим те же самые  $\text{Im } \Sigma$  и  $\text{Ker } \Sigma$ , поскольку  $\beta\varphi_1 = \varphi_2\alpha$ .

Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}(A, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(A, G) & \longrightarrow & \text{Hom}(A, H) & \longrightarrow & \widetilde{\text{Ext}}(A, B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(F, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(F, G) & \longrightarrow & \text{Hom}(F, H) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(R, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(R, G) & \longrightarrow & \text{Hom}(R, H) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Ext}(A, B) & \longrightarrow & 0 & & & & \end{array}$$

$\Sigma_2$                        $\Sigma_1$   
 $\Sigma_4$                        $\Sigma_3$   
 $\Sigma_5$

Два нуля в этой диаграмме появились из-за того, что группа  $F$  свободная, а группа  $G$  делимая.

Легко проверить, что  $\text{Ker } \Sigma_1 = \widetilde{\text{Ext}}(A, B)$  и  $\text{Ker } \Sigma_5 = \text{Ext}(A, B)$ . Действительно, в обоих случаях мы имеем дело с диаграммой вида

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta} & 0, \end{array}$$

где  $\varphi_1$  — мономорфизм (здесь  $A_2$  — это  $\widetilde{\text{Ext}}(A, B)$  или  $\text{Ext}(A, B)$ ). Но для такой диаграммы  $\text{Ker } \Sigma = A_1 / \text{Ker } \alpha$ , поскольку  $\varphi_2\alpha = 0$  и  $\text{Ker } \varphi_1 = 0$ .

Теперь, используя задачу 3.4, получаем  $\widetilde{\text{Ext}}(A, B) \cong \text{Ker } \Sigma_1 \cong \text{Im } \Sigma_2 \cong \text{Ker } \Sigma_3 \cong \text{Im } \Sigma_4 \cong \text{Ker } \Sigma_5 \cong \text{Ext}(A, B)$ .

Отметим, что попутно мы получили ещё одну интерпретацию группы  $\text{Ext}(A, B)$ , а именно,  $\text{Ext}(A, B) = \text{Ker } \Sigma_3$ .

**4.11.** Возьмём для группы  $X$  проективную резольвенту  $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow X \rightarrow 0$  и инъективную резольвенту  $0 \rightarrow X \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ . С помощью этих резольвент

можно построить коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(F, A) & \longrightarrow & \text{Hom}(F, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(F, C) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(R, A) & \longrightarrow & \text{Hom}(R, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(R, C) \longrightarrow 0 \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \text{Hom}(A, G) & \longleftarrow & \text{Hom}(B, G) & \longleftarrow & \text{Hom}(C, G) \longleftarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & \text{Hom}(A, H) & \longleftarrow & \text{Hom}(B, H) & \longleftarrow & \text{Hom}(C, H) \longleftarrow 0 \end{array}$$

с точными строками.

Точные последовательности

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \text{Hom}(X, A) \longrightarrow \text{Hom}(F, A) \longrightarrow \text{Hom}(R, A) \longrightarrow \text{Ext}(X, A) \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow \text{Hom}(A, X) \longrightarrow \text{Hom}(A, G) \longrightarrow \text{Hom}(A, H) \longrightarrow \text{Ext}(A, X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

показывают, что ядро и коядро отображения  $\text{Hom}(F, A) \rightarrow \text{Hom}(R, A)$  — это  $\text{Hom}(X, A)$  и  $\text{Ext}(X, A)$ , а ядро и коядро отображения  $\text{Hom}(A, G) \rightarrow \text{Hom}(A, H)$  — это  $\text{Hom}(A, X)$  и  $\text{Ext}(A, X)$ . Поэтому, воспользовавшись задачей 3.2, получаем требуемое.

**4.12.** Согласно формуле универсальных коэффициентов мы имеем

$$H^1(K; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(K), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_0(K), \mathbb{Z}).$$

Но группа  $H_0(K)$  не имеет кручения, поэтому  $\text{Ext}(H_0(K), \mathbb{Z}) = 0$ . Ясно также, что если  $T_1$  — конечная группа, то  $\text{Hom}(T_1, \mathbb{Z}) = 0$  и  $\text{Hom}(T_1 \oplus \mathbb{Z}^r, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$ .

**4.13.** Согласно формуле универсальных коэффициентов получаем

$$H^i(K; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}^{n_i} \oplus T_i, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}^{n_{i-1}} \oplus T_{i-1}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{n_i} \oplus T_{i-1},$$

поскольку  $\text{Ext}(\mathbb{Z}^{n_{i-1}} \oplus T_{i-1}, \mathbb{Z}) \cong T_{i-1}$  согласно задаче 4.5.

**4.14.** Докажем сначала утверждение о кручениях. Для этого рассмотрим две последовательности гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} C_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1}, \\ C^{i+1} & \xleftarrow{\delta^i = \partial_{i+1}^*} & C^i \xleftarrow{\delta^{i-1} = \partial_i^*} C^{i-1}, \end{array}$$

где  $C_k$  — свободная группа и  $C^k = \text{Hom}(C_k, \mathbb{Z}) \cong C_k$ . Согласно теореме Смита (см., например, [П2]) матрицу отображения  $\partial_{i+1}$  умножением слева и справа на целочисленные матрицы с определителем  $\pm 1$  можно привести к следующему виду: на диагонали стоят элементы  $1, \dots, 1, d_1, \dots, d_l$  ( $d_j \geq 2$ ), а все остальные элементы (на диагонали и вне диагонали) нулевые. Легко видеть, что тогда  $T_i \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_l}$ . Для вычисления  $T^i$  нужно привести к нормальной форме Смита матрицу отображения  $\delta^{i-1} = \partial_i^*$ . Она получается из матрицы отображения  $\partial_i$  транспонированием, поэтому группа  $T^i$ , которая вычисляется с помощью оператора  $\partial_i^*$ , изоморфна группе  $T_{i-1}$ , которая вычисляется с помощью оператора  $\partial_i$ .



Докажем теперь утверждение о рангах групп. Отметим, что кручение  $T_i$  полностью определяется оператором  $\partial_{i+1}$ , а для вычисления ранга  $i$ -й группы гомологий нужны оба оператора  $\partial_{i+1}$  и  $\partial_i$ . Пусть на диагонали нормальной формы Смита оператора  $\partial_i$  стоят  $a_i$  ненулевых элементов. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{rk} \operatorname{Ker} \partial_i &= \operatorname{rk} C_i - a_i, & \operatorname{rk} \operatorname{Im} \partial_{i+1} &= a_{i+1}; \\ \operatorname{rk} \operatorname{Ker} \delta^i &= \operatorname{rk} C_i - a_{i+1}, & \operatorname{rk} \operatorname{Im} \delta^{i-1} &= a_i. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\operatorname{rk}(\operatorname{Ker} \partial_i / \operatorname{Im} \partial_{i+1}) = \operatorname{rk} C_i - a_i - a_{i+1} = \operatorname{rk}(\operatorname{Ker} \delta^i / \operatorname{Im} \delta^{i-1}).$$

Действительно, при факторизации по образу каждая единица, стоящая на диагонали, убивает прямое слагаемое  $\mathbb{Z}$ , а число  $d > 1$ , стоящее на диагонали, заменяет слагаемое  $\mathbb{Z}$  на слагаемое  $\mathbb{Z}_d$ , которое не даёт никакого вклада в ранг.

**4.15.** Группы  $H_0(X)$  и  $H_0(Y)$  не имеют кручения, поэтому  $\operatorname{Ext}(H_0(X), \mathbb{Z}) = \operatorname{Ext}(H_0(Y), \mathbb{Z}) = 0$ . Таким образом, формула универсальных коэффициентов даёт естественные изоморфизмы  $H^1(X) \rightarrow \operatorname{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z})$  и  $H^1(Y) \rightarrow \operatorname{Hom}(H_1(Y), \mathbb{Z})$ . Нулевой гомоморфизм  $f_*: H_1(X) \rightarrow H_1(Y)$  индуцирует нулевой гомоморфизм  $\operatorname{Hom}(H_1(Y), \mathbb{Z}) \rightarrow \operatorname{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z})$ , поэтому после естественных отождествлений мы получаем нулевой гомоморфизм  $H^1(Y) \rightarrow H^1(X)$ .

**5.1.** Рассмотрим ту же самую последовательность Майера—Вьеториса, что и при решении задачи 3.10. Если  $M^n$  — замкнутое ориентируемое многообразие, то связывающий гомоморфизм  $H_n(M^n) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$  переводит фундаментальный класс  $[M^n]$  в фундаментальный класс  $[S^{n-1}]$ , поэтому он является изоморфизмом. Из этого следует, что отображение  $H_{n-1}(M^n \setminus \operatorname{int} D^n) \rightarrow H_{n-1}(M^n)$  является изоморфизмом.

Замкнутость многообразия  $M^n$  существенна. Пусть, например,  $M^n = D_1^n$  —  $n$ -мерный шар, содержащий меньший шар  $D^n$ . Тогда  $M^n \setminus \operatorname{int} D^n \sim S^{n-1}$ , поэтому  $H_{n-1}(M^n \setminus \operatorname{int} D^n) = \mathbb{Z} \neq 0 = H_{n-1}(M^n)$ .

Ориентируемость многообразия  $M^n$  тоже существенна. Пусть, например,  $M^n = \mathbb{R}P^2$ . Тогда  $\mathbb{R}P^2 \setminus \operatorname{int} D^2 \sim S^1$ , поэтому  $H_1(\mathbb{R}P^2 \setminus \operatorname{int} D^2) = H_1(S^1) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}_2 = H_1(\mathbb{R}P^2)$ .

**5.2.** Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(\Sigma S^n) & \xrightarrow{\cong} & H_n(S^n) \\ \downarrow (\Sigma f)_* & & \downarrow f_* \\ H_{n+1}(\Sigma S^n) & \xrightarrow{\cong} & H_n(S^n), \end{array}$$

где горизонтальные стрелки — изоморфизмы надстройки. Поэтому если  $f_*$  — умножение на  $d$ , то  $(\Sigma f)_*$  — тоже умножение на  $d$ .

**5.3.** Ясно, что  $H_0 = \mathbb{Z}_p$ ,  $H_2 = \mathbb{Z}_p$  в ориентируемом случае и  $H_2 = 0$  в неориентируемом случае. Далее,

$$H_1(K; \mathbb{Z}_p) \cong (H_1(K) \otimes \mathbb{Z}_p) \oplus \operatorname{Tor}(H_0(K), \mathbb{Z}_p) \cong H_1(K) \otimes \mathbb{Z}_p,$$

поскольку  $H_0(K) = \mathbb{Z}$ . Поэтому  $H_1(nT^2; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2n}$  и  $H_1(mP^2; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{m-1}$ .

5.4. Ясно, что  $H^0 = \mathbb{Z}$ . Далее,

$$H^1(K; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(K), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_0(K), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(K), \mathbb{Z}),$$

поскольку  $H_0(K) = \mathbb{Z}$ . Таким образом,  $H^1(nT^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2n}$  и  $H^1(mP^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{m-1}$ . Наконец,

$$H^2(K; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_2(K), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_1(K), \mathbb{Z}).$$

Поэтому  $H^2(nT^2; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  и  $H^2(mP^2; \mathbb{Z}) \cong \text{Ext}(H_1(mP^2), \mathbb{Z}) \cong \text{Ext}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ .

5.5. Ясно, что  $H \cup X = S^3$  и  $H \cap X = \partial H$  — сфера с  $g$  ручками. Поэтому последовательность Майера—Вьеториса для  $X$  и  $H$  выглядит следующим образом:

$$\dots \longrightarrow H_2(S^3) \longrightarrow H_1(\partial H) \longrightarrow H_1(X) \oplus H_1(H) \longrightarrow H_1(S^3) \longrightarrow \dots$$

Здесь  $H_2(S^3) = H_1(S^3) = 0$ , поэтому  $H_1(\partial H) \cong H_1(X) \oplus H_1(H)$ , т. е.  $\mathbb{Z}^{2g} \cong H_1(X) \oplus \oplus \mathbb{Z}^g$ . Значит,  $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^g$ .

Группы  $H_1(H)$  и  $H_1(X)$  изоморфны соответственно ядру и образу гомоморфизма  $i_*: H_1(\partial H) \rightarrow H_1(H)$ . Ядро гомоморфизма  $i_*$  порождено меридианами края тела с ручками, а образ — параллелями. Поэтому образующими группы  $H_1(H)$  служат окружности, надетые на ручки тела  $H$ .

5.6. Тор  $T^n$  можно представить как  $n$ -мерный куб, у которого отождествлены соответственные точки противоположных граней. Для  $n$ -мерного тора  $k$ -мерная грань задаётся  $n - k$  уравнениями вида  $x_i = \pm 1$ . Поэтому количество  $k$ -мерных граней равно  $2^{n-k} \binom{n}{k}$ . После отождествлений для тора получаем  $\binom{n}{k}$  клеток размерности  $k$ . Как и в случае двумерного тора, все граничные гомоморфизмы нулевые. Поэтому гомологии  $n$ -мерного тора — это гомологии цепного комплекса

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}} \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$$

с нулевыми гомоморфизмами. Следовательно,  $H_k(T^n) = \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}}$ .

5.7. Группы когомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  легко вычисляются, если известны группы гомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  (задача 4.13). Поэтому пример 5.4 показывает, что

$$H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{для } k = 0 \text{ и } k = n, \text{ где } n \text{ нечётно;} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{для чётных } k, 0 < k \leq n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

5.8. Пусть  $a$  и  $b$  — одномерные клетки. Приклеим к ним две двумерные клетки по словам  $a^5b^{-3}$  и  $b^3(ab)^{-2}$ . В результате получим  $CW$ -комплекс  $X$ . Цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий  $X$  имеет вид  $\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^2 \rightarrow 0$ , где гомоморфизм  $\partial$  задаётся матрицей  $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ . Определитель этой матрицы равен  $-1$ , поэтому  $\partial$  — изоморфизм. Следовательно,  $CW$ -комплекс  $X$  ацикличесен.

Чтобы доказать, что комплекс  $X$  нестягиваем, достаточно доказать, что группа  $\pi_1(X)$  нетривиальна. Группа  $\pi_1(X)$  задаётся образующими  $a$  и  $b$  и соотношениями  $a^5 = b^3 = (ab)^2$ . Существует нетривиальный гомоморфизм этой группы в группу

собственных движений додекаэдра. А именно, пусть  $A$  — поворот додекаэдра на угол  $2\pi/5$  вокруг оси, проходящей через центр грани,  $B$  — поворот додекаэдра на угол  $2\pi/3$  вокруг оси, проходящей через вершину (конкретные оси и направления поворотов указаны на рис. 85). Тогда  $AB$  — поворот на  $\pi$  вокруг оси, проходящей

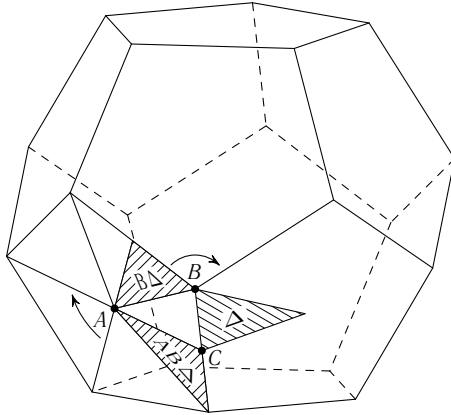


Рис. 85. Повороты додекаэдра

через точку  $C$  (середину ребра). Таким образом,  $A^5 = B^3 = (AB)^2$  — тождественное преобразование. Поэтому отображение образующих  $a \mapsto A$ ,  $b \mapsto B$  можно продолжить до гомоморфизма групп.

**5.9.** Из формулы универсальных коэффициентов следует, что  $\mathbb{Z}^{b_k} \oplus T^k \cong \mathbb{Z}^{a_k} \oplus \oplus T_{k-1}$ , т. е.  $b_k = a_k$  и  $T^k \cong T_{k-1}$ . В частности,  $T^1 \cong T_0 = 0$ . Согласно двойственности Пуанкаре  $a_k = b_{n-k}$  и  $T_k \cong T^{n-k}$ . Поэтому  $T_k \cong T^{n-k} \cong T_{n-k-1}$  и  $T^k \cong T_{n-k} \cong \cong T^{n-k+1}$ .

**5.10.** Пусть  $H_k(M^n) = H_k \oplus T_k$ , где  $H_k$  — свободная абелева группа,  $T_k$  — подгруппа кручения. Применив задачу 5.9 для многообразия  $M^n$ , получим  $H_k = H_{n-k}$  при  $k = 1, 2, \dots, n-1$  и  $T_k = T_{n-k-1}$  при  $k = 1, 2, \dots, n-2$ . Применив задачу 5.9 и изоморфизм надстройки для многообразия  $\Sigma M^n$ , получим  $H_{n-1} = 0$ ,  $H_{k-1} = H_{n-k}$  при  $k = 2, \dots, n-1$ ,  $T_{n-2} = 0$ ,  $T_{k-1} = T_{n-k-1}$  при  $k = 2, \dots, n-2$ . Следовательно,  $H_1 = \dots = H_{n-1} = 0$  и  $T_1 = \dots = T_{n-2} = 0$ . Кроме того,  $T_{n-1} = 0$  для любого замкнутого ориентируемого многообразия  $M^n$ .

**5.11.** Рассмотрим единичный вектор, перпендикулярный плоскости диаграммы и направленный вверх, как точку сферы  $S^2$ . Точки тора, отображающиеся в эту точку, находятся во взаимно однозначном соответствии с теми перекрёстками, на которых кривая  $J$  проходит под  $K$ . Рис. 86 показывает, что разным типам перекрёстков соответствуют разные знаки якобиана отображения  $f$ .

Чтобы выполнялось равенство  $\deg f = \text{lk}(J, K)$ , ориентации можно выбрать, например, следующим образом. Базис  $e_1, e_2$ , где  $e_1$  и  $e_2$  — касательные векторы к  $J$  и  $K$ , задаёт положительную ориентацию тора. Базис  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  задаёт положитель-

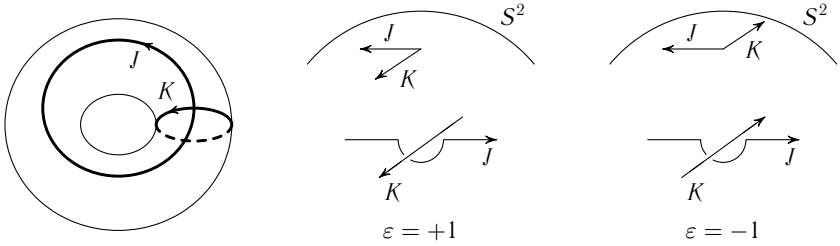


Рис. 86. Отображение  $f$

ную ориентацию сферы, если базис  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , где  $\varepsilon_3$  — вектор внешней нормали, положительно ориентирован.

**6.1.** Измельчив при необходимости триангуляцию комплекса  $L$ , можно считать, что каждый симплекс из  $L$  полностью покрыт окрестностью  $U$ , входящей в определение накрытия. Тогда в качестве триангуляции комплекса  $K$  можно взять прообразы симплексов из  $L$ . Пусть  $a_i(K)$  и  $a_i(L)$  — количества  $i$ -мерных симплексов в  $K$  и в  $L$  для таких триангуляций. Тогда  $a_i(K) = na_i(L)$ , поэтому  $\chi(K) = n\chi(L)$ .

**6.2.** Пусть  $b'_k$  и  $b''_k$  — количества  $k$ -мерных симплексов в  $K$  и  $L$ ,  $b_k$  — количество  $k$ -мерных клеток в  $K \times L$ . Тогда  $(-1)^k b_k = \sum_{p+q=k} (-1)^p b'_p (-1)^q b''_q$ , так как  $b_k = \sum_{p+q=k} b'_p b''_q$ . Поэтому

$$\chi(K \times L) = \sum (-1)^k b_k = \left( \sum (-1)^p b'_p \right) \left( \sum (-1)^q b''_q \right) = \chi(K)\chi(L).$$

**6.3.** Если  $f^n = \text{id}_K$  и отображение  $f$  не имеет неподвижных точек, то можно построить  $n$ -листное накрытие  $p: K \rightarrow K/\sim$ , где  $x \sim f(x) \sim f^2(x) \sim \dots \sim f^n(x) = x$ . Если триангуляция комплекса  $K$  достаточно мелкая, то симплексы  $\Delta$  и  $f(\Delta)$  не пересекаются. Такая триангуляция индуцирует триангуляцию пространства  $K/\sim$ . Поэтому согласно задаче 6.1 мы получаем  $\chi(K) = n\chi(K/\sim) \equiv 0 \pmod{n}$ .

**6.4.** Ясно, что  $\text{Im } f_i \cong V_i / \text{Ker } f_i$ , поэтому

$$\dim V_i = \dim \text{Im } f_i + \dim \text{Ker } f_i.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum (-1)^i \dim V_i &= \sum (-1)^i \dim \text{Im } f_i + \sum (-1)^i \dim \text{Ker } f_i = \\ &= \sum (-1)^i \dim \text{Im } f_i + \sum (-1)^i \dim \text{Im } f_{i+1} = 0. \end{aligned}$$

**6.5.** Пусть  $K_0$  —  $\varepsilon$ -окрестность данного зацепления,  $K_1$  — замыкание  $S^2 \setminus K_0$ . Тогда  $\chi(S^3) = \chi(K_0) + \chi(K_1) - \chi(K_0 \cap K_1)$ . Здесь  $\chi(S^3) = 0$ ,  $\chi(K_0) = 0$  и, наконец,  $\chi(K_0 \cap K_1) = 0$ , поскольку  $K_0 \cap K_1$  состоит из одного или нескольких торов. Следовательно,  $\chi(K_1) = 0$ , что и требовалось.

**6.6.** Запишем точную последовательность пары для гомологий с коэффициентами в некотором поле:

$$\dots \rightarrow H_i(B) \rightarrow H_i(A) \rightarrow H_i(A, B) \rightarrow H_{i-1}(B) \rightarrow \dots$$

В этой последовательности есть лишь конечное число ненулевых членов, поэтому можно воспользоваться задачей 6.4. В результате получим

$$\sum (-1)^i \dim H_i(B) + \sum (-1)^{i+1} \dim H_i(A) + \sum (-1)^i \dim H_i(A, B) = 0.$$

**6.7.\*** Занумеруем  $i$ -мерные грани комплекса  $K$  числами  $1, 2, \dots, f_i$ , где  $f_i$  — количество  $i$ -мерных граней, а затем для  $i$ -мерной грани  $F_k^i$  с номером  $k$  рассмотрим число  $p_{ij}(k)$ , равное количеству  $j$ -мерных граней, пересекающих грань  $F_k^i$ . Количество  $j$ -мерных граней, её не пересекающих, равно  $f_j - p_{ij}(k)$ , поэтому

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{f_i} (f_j - p_{ij}(k)) = f_i f_j - \sum_{k=1}^{f_i} p_{ij}(k). \quad (1)$$

**Л е м м а.** Для каждой грани  $F_k^i$  выполняется равенство  $\sum_{j=0}^n (-1)^j p_{ij}(k) = (-1)^n$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Введём на многообразии  $M^n$  риманову метрику и рассмотрим множество  $Q_\varepsilon$ , состоящее из точек  $M^n$ , удалённых от  $F_k^i$  не более чем на  $\varepsilon$ . Если  $\varepsilon$  достаточно мало, то  $Q_\varepsilon$  гомеоморфно  $n$ -мерному шару и  $Q_\varepsilon$  не содержит вершин комплекса  $K$ , отличных от вершин грани  $F_k^i$ .

Пересечения граней  $K$  с  $\partial Q_\varepsilon \approx S^{n-1}$  задают на  $S^{n-1}$  структуру  $CW$ -комплекса. Количество  $(j-1)$ -мерных клеток этого  $CW$ -комплекса равно количеству  $j$ -мерных граней комплекса  $K$ , пересекающих грань  $F_k^i$  и при этом не содержащихся в  $F_k^i$ . Поэтому

$$p_{ij}(k) = q_{j-1} + r_j, \quad (2)$$

где  $q_{j-1}$  — количество  $(j-1)$ -мерных клеток  $CW$ -комплекса  $\partial Q_\varepsilon$  (предполагается, что  $q_{-1} = 0$ ),  $r_j$  — количество  $j$ -мерных граней выпуклого многогранника  $F_k^i$  (предполагается, что  $r_i = 1$  и  $r_j = 0$  при  $j > i$ ).

Ясно, что  $\sum_{j=0}^n (-1)^j r_j = \chi(D^k) = 1$  и  $\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j q_j = \chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$ . Воспользовавшись формулой (2), получаем

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j p_{ij}(k) = \sum_{j=0}^n (-1)^j q_{j-1} + \sum_{j=0}^n (-1)^j r_j = -1 - (-1)^{n-1} + 1 = (-1)^n,$$

что и требовалось. □

Из формулы (1) следует, что

$$\begin{aligned} \Psi(K) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} = \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} f_i f_j - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^{f_i} (-1)^{i+j} p_{ij}(k). \end{aligned}$$

Первая сумма вычисляется непосредственно:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} f_i f_j = \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i f_i \right)^2 = \chi^2(M^n).$$

При вычислении второй суммы воспользуемся леммой:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^{i_j} (-1)^{i+j} p_{ij}(k) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{k=1}^{i_j} \sum_{j=0}^n (-1)^j p_{ij}(k) = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{k=1}^{i_j} (-1)^n = (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i f_i = (-1)^n \chi(M^n). \end{aligned}$$

В итоге получаем  $\Psi(K) = \chi^2(M^n) - (-1)^n \chi(M^n)$ . Но если  $n$  нечётно, то  $\chi(M^n) = 0$ . Поэтому  $\Psi(K) = \chi^2(M^n) - \chi(M^n)$ .

**6.8.** Рассмотрим на  $M^k$  следующее отношение эквивалентности:  $x \sim y$ , если нормальные подпространства в точках  $x$  и  $y$  совпадают (т. е. эти точки лежат в одном нормальном подпространстве). Отображение  $M^k \rightarrow N^k / \sim$  является накрытием, поскольку каждая нормальная плоскость пересекает  $M^k$  трансверсально.

**6.9.** Достаточно доказать, что для коэффициентов в  $\mathbb{Z}_2$  индекс пересечения  $M^k$  и нормального подпространства равен 0. Любое  $(n - k)$ -мерное подпространство в  $\mathbb{R}^n$  можно переместить в любое другое  $(n - k)$ -мерное подпространство, поэтому индекс пересечения  $M^k$  с  $(n - k)$ -мерным подпространством не зависит от выбора подпространства. Но для компактного многообразия существует подпространство, с которым оно не пересекается.

**6.10.** Выберем точку  $a \in M^k$  так, чтобы функция  $f(x) = \|x - a\|^2$ ,  $x \in M^k$ , не имела вырожденных критических точек. Критические точки этой функции — это точки пересечения  $M^k$  с нормальным подпространством в точке  $a$ . Пусть  $r_i$  — число критических точек индекса  $i$ . Тогда  $\sum_{i=0}^k r_i = r$  и  $\sum_{i=0}^k (-1)^i r_i = \chi(M^k)$ . Ясно также, что  $r_0 > 0$ . Поэтому  $-r < \chi(M^k) \leq r$ . Но  $\chi(M^k) = r\chi(N^k)$ , где  $N^k$  — многообразие, введённое при решении задачи 6.8. Значит,  $-1 < \chi(N^k) \leq 1$ . Таким образом,  $\chi(N^k) = 0$  или 1, т. е.  $\chi(M^k) = 0$  или  $r$ .

**6.11.** При решении задачи 6.10 мы получили, что если  $M^k$  — замкнутое многообразие, для которого существует транснормальное вложение, причём  $\chi(M^k) \neq 0$ , то  $r_i = 0$  для всех нечётных  $i$ . Поэтому  $M^k$  гомотопически эквивалентно  $CW$ -комплексу, у которого нет клеток нечётной размерности.

**6.12.** Требуемое утверждение достаточно доказать в случае, когда  $f$  — симплициальное отображение. В этом случае цепное отображение  $f_k: C_k(K; \mathbb{R}) \rightarrow C_k(K; \mathbb{R})$  задаётся матрицей  $A$  с целочисленными элементами, а цепное отображение  $f_k^p$  задаётся матрицей  $A^p$ .

*Л е м м а.* Пусть  $A$  — квадратная матрица с целочисленными элементами,  $p$  — простое число. Тогда  $\text{tr}(A^p) \equiv \text{tr} A \pmod{p}$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть  $f(x) = \det(xI - A)$ , где  $I$  — единичная матрица. Любому многочлену  $f$  с целыми коэффициентами соответствует многочлен  $\bar{f}$  над полем  $\mathbb{F}_p$  (конечное поле из  $p$  элементов). Присоединим к  $\mathbb{F}_p$  корни  $x_1, \dots, x_n$  многочлена  $\bar{f}$ . В результате получим поле  $\mathbb{F}_{p^k}$ .

Для любых элементов  $x, y \in \mathbb{F}_{p^k}$  выполняется равенство  $(x + y)^p = x^p + y^p$ , поскольку  $\binom{p}{m} \equiv 0 \pmod{p}$  при  $m = 1, 2, \dots, p - 1$ . Поэтому

$$x_1^p + \dots + x_n^p = (x_1 + \dots + x_n)^p = x_1 + \dots + x_n$$

(второе равенство следует из того, что  $x_1 + \dots + x_n \in \mathbb{F}_p$ ). Но  $x_1 + \dots + x_n = \operatorname{tr} A \pmod{p}$  и  $x_1^p + \dots + x_n^p = \operatorname{tr}(A^p) \pmod{p}$ . Первое равенство очевидно, а второе следует из того, что если  $f(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$ , то  $\lambda_1^p + \dots + \lambda_n^p$  выражается как многочлен с целыми коэффициентами через коэффициенты многочлена  $f$ , причём  $x_1^p + \dots + x_n^p$  выражается через коэффициенты многочлена  $\bar{f}$  точно так же.  $\square$

Из леммы требуемое утверждение следует очевидным образом.

**7.1.** Это следует из того, что для относительных когомологий суп-произведение определяется точно так же, как и для абсолютных. Нужно лишь заметить, что  $L \cup \emptyset = L \cup L$ .

**7.2.** а) Из точной когомологической последовательности

$$H^{p_i}(K, L_i) \longrightarrow H^{p_i}(K) \longrightarrow H^{p_i}(L_i) = 0$$

следует, что отображение  $H^{p_i}(K, L_i) \rightarrow H^{p_i}(K)$  — эпиморфизм, т. е. в  $H^{p_i}(K, L_i)$  есть элемент  $\beta_i$ , отображающийся в  $\alpha_i$ . При этом элемент  $\beta_1 \cup \dots \cup \beta_n$  отображается в  $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n$ . Но  $\beta_1 \cup \dots \cup \beta_n \in H^*\left(K, \bigcup_{i=1}^n L_i\right) = 0$ .

б) Очевидным образом следует из а), поскольку надстройка представляется в виде объединения двух стягиваемых пространств — конусов.

**7.3.** Пусть  $\alpha|_{S^n}$  — образ элемента  $\alpha$  при естественном гомоморфизме  $H^*(S^n, M^k) \rightarrow H^*(S^n)$ . Тогда  $\alpha \cup \beta = (\alpha|_{S^n}) \cup \beta = \alpha \cup (\beta|_{S^n})$ . Если  $0 < \dim \alpha < n$ , то  $\alpha|_{S^n} = 0$ , а если  $0 < \dim \beta < n$ , то  $\beta|_{S^n} = 0$ . Остаётся рассмотреть лишь случай, когда  $\dim \alpha = \dim \beta = n$ . Но в этом случае  $\alpha \cup \beta \in H^{2n}(S^n, M^k) = 0$ .

**7.4.** а) Пусть  $G$  и  $H$  — абелевы группы, а  $\varphi: G \rightarrow H$  и  $\psi: H \rightarrow G$  — гомоморфизмы, для которых  $\psi\varphi = \operatorname{id}_G$ . Тогда  $H = \operatorname{Im} \varphi \oplus \operatorname{Ker} \psi$ . Действительно, любой элемент  $h \in H$  можно представить в виде  $h = \varphi\psi h + (h - \varphi\psi h)$ , где  $\varphi\psi h \in \operatorname{Im} \varphi$  и  $h - \varphi\psi h \in \operatorname{Ker} \psi$ . Кроме того, если  $x = \varphi g$  и  $\psi x = 0$ , то  $g = \psi\varphi g = \psi x = 0$ , поэтому  $g = 0$ , а значит,  $x = 0$ .

Применив это утверждение к гомоморфизмам  $i_*: H_*(A) \rightarrow H_*(X)$ ,  $r_*: H_*(X) \rightarrow H_*(A)$  и к гомоморфизмам  $r^*: H^*(A) \rightarrow H^*(X)$ ,  $i^*: H^*(X) \rightarrow H^*(A)$ , получаем требуемое.

б) Равенство  $r^*\alpha \cup r^*\beta = r^*(\alpha \cup \beta)$  показывает, что  $\operatorname{Im} r^*$  — подкольцо. Равенство  $i^*(\alpha \cup \beta) = i^*\alpha \cup i^*\beta$  показывает, что если  $i^*\alpha = 0$  или  $i^*\beta = 0$ , то  $i^*(\alpha \cup \beta) = 0$ .

**7.5.** Прежде всего заметим, что  $H^p(X \vee Y) = H^p(X) \oplus H^p(Y)$  при  $p \geq 1$ . Ретракции  $X \vee Y \rightarrow X$  и  $X \vee Y \rightarrow Y$  показывают, что  $H^*(X)$  и  $H^*(Y)$  — идеалы в  $H^*(X \vee Y)$  (задача 7.4). Поэтому  $(x + y) \cup (x' + y') = x \cup x' + y \cup y'$  для любых когомологических классов  $x, x' \in H^*(X)$  и  $y, y' \in H^*(Y)$ , имеющих положительную размерность. Действительно,  $x \cup y' \in H^*(X) \cap H^*(Y)$ , поэтому  $x \cup y' = 0$ .

**7.6.** Предположим, что существует ретракция  $r: S^p \times S^q \rightarrow S^p \vee S^q$ . Тогда согласно задаче 7.4 мы имеем  $H^*(S^p \times S^q) = \operatorname{Ker} i^* \oplus \operatorname{Im} r^*$ . Пусть  $1, \alpha^p, \beta^q$  и  $\alpha^p \cup \beta^q$  — образующие нетривиальных групп когомологий  $S^p \times S^q$ . Легко видеть, что  $\operatorname{Ker} i^* = H^{p+q}(S^p \times S^q)$ . Поэтому  $\operatorname{Im} r^*$  состоит из линейных комбинаций элементов  $1, \alpha^p$  и  $\beta^q$ . Но тогда  $\alpha^p \cup \beta^q \notin \operatorname{Im} r^*$ , поэтому  $\operatorname{Im} r^*$  — не подкольцо. Получено противоречие.

**7.7.** а) Пусть  $\alpha_{(n)}$  и  $\alpha_{(m)}$  — образующие групп  $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$  и  $H^1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ . Предположим, что существует ретракция  $r: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^m$ . Тогда согласно задаче 7.4 группа  $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$  является прямой суммой  $\text{Ker } i^*$  и  $\text{Im } r^*$ . Ясно, что  $i^*(\alpha_{(n)}) = \alpha_{(m)}$ , поэтому  $\text{Ker } i^*$  состоит из элементов  $0, \alpha_{(n)}^{m+1}, \dots, \alpha_{(n)}^m$ . Следовательно,  $\text{Im } r^*$  состоит из элементов  $0, 1, \alpha_{(n)}, \alpha_{(n)}^2, \dots, \alpha_{(n)}^m$ . Но это не подкольцо, а согласно задаче 7.4  $\text{Im } r^*$  — подкольцо.

б) Решается аналогично.

**7.8.** а) Выберем в  $H^1(M_2^2)$  и в  $H^1(M_1^2)$  базисы  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$  и  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_m, \beta'_1, \dots, \beta'_m$ , как в теореме 7.3. Пусть  $\Lambda = \alpha_1 \cup \beta_1$  и  $\Lambda' = \alpha'_1 \cup \beta'_1$  — образующие групп  $H^2(M_2^2)$  и  $H^2(M_1^2)$ . Тогда если

$$\begin{aligned} f_1^*(\alpha_1) &= a_1\alpha'_1 + \dots + a_m\alpha'_m + b_1\beta'_1 + \dots + b_m\beta'_m, \\ f_1^*(\beta_1) &= c_1\alpha'_1 + \dots + c_m\alpha'_m + d_1\beta'_1 + \dots + d_m\beta'_m, \end{aligned}$$

то

$$f^*(\Lambda) = f^*(\alpha_1 \cup \beta_1) = (a_1d_1 + \dots + a_md_m - b_1c_1 - \dots - b_mc_m)\Lambda'.$$

б) Гомоморфизм  $h$ , переводящий  $\alpha_1$  в  $\alpha'_1$ , а  $\beta_2$  в  $\beta'_1$ , не может быть индуцирован непрерывным отображением  $f: M_1^2 \rightarrow M_2^2$ , поскольку  $f^*(\alpha_1) \cup f^*(\beta_2) = f^*(\alpha_1 \cup \beta_2) = 0$ .

**8.1.** а) Ясно, что  $H^0(S^k \times S^k) \cong H^{2k}(S^k \times S^k) \cong \mathbb{Z}$  и  $H^k(S^k \times S^k) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , а все остальные группы когомологий нулевые. Пусть  $\alpha, \beta \in H^k(S^k \times S^k)$  — классы когомологий, двойственные (в смысле линейной алгебры) гомологическим классам циклов  $S^k \times \{x_0\}$  и  $\{y_0\} \times S^k$ . Тогда  $\alpha \cup \beta = \Lambda$ , где  $\Lambda$  — образующая группы  $H^{2k}(S^k \times S^k)$ ; это следует из того, что указанные циклы трансверсально пересекаются в одной точке  $(y_0, x_0)$ . Проверим теперь что  $\alpha \cup \alpha = 0$  и  $\beta \cup \beta = 0$ . Цикл  $S^k \times \{x_0\}$  гомологичен циклу  $S^k \times \{x'_0\}$ ; чтобы это доказать, достаточно рассмотреть цепь  $S^k \times I$ , где  $I$  — путь с концами  $x_0$  и  $x'_0$ . Циклы  $S^k \times \{x_0\}$  и  $S^k \times \{x'_0\}$  не пересекаются, поэтому  $\alpha \cup \alpha = 0$ . Аналогично доказывается, что  $\beta \cup \beta = 0$ .

б) Прежде всего заметим, что коцикл  $\alpha + \beta$  двойствен диагонали и  $(\alpha + \beta) \cup (\alpha + \beta) = \alpha \cup \beta + \beta \cup \alpha$ . Если  $k$  нечётно, то  $\alpha \cup \beta = -\beta \cup \alpha$ ; в этом случае индекс самопересечения диагонали равен 0. Если же  $k$  чётно, то  $\alpha \cup \beta + \beta \cup \alpha = 2\alpha \cup \beta = 2\Lambda$ , поэтому индекс самопересечения диагонали равен  $\pm 2$ . Знак зависит от того, как выбраны ориентации диагонали и  $S^k \times S^k$ . Если задана ориентация  $S^k$ , то ориентация диагонали задаётся естественным образом. При чётном  $k$  ориентация сферы  $S^k \times S^k$  тоже задаётся канонически, потому что базисы  $e_1, \dots, e_k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  и  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, e_1, \dots, e_k$  при чётном  $k$  ориентированы одинаково. При таком выборе ориентаций получается знак плюс.

**8.2.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — когомологические классы, двойственные (в смысле линейной алгебры) гомологическим классам циклов  $S^m \times \{x_0\}$  и  $\{y_0\} \times S^n$ . Тогда  $\alpha \cup \beta$  — образующая группы  $H^{n+m}(S^n \times S^m)$ . Поэтому достаточно доказать, что  $f^*(\alpha) = 0$  и  $f^*(\beta) = 0$ . Но  $f^*(\alpha) \in H^m(S^{n+m}) = 0$  и  $f^*(\beta) \in H^n(S^{n+m}) = 0$ .

**8.12.** Стягиваемое многообразие ориентируемо, поэтому имеет место изоморфизм Лефшеца  $H_k(M^n, \partial M^n) \cong H^{n-k}(M^n)$ . Следовательно,  $H_n(M^n, \partial M^n) = \mathbb{Z}$  и  $H_k(M^n, \partial M^n) = 0$  при  $k \neq n$ . Поэтому точная последовательность пары  $(M^n, \partial M^n)$  показывает, что  $H_k(\partial M^n) \cong H_k(M^n)$  при  $k < n - 1$  и  $H_{n-1}(\partial M^n) \cong H_n(M^n, \partial M^n) = \mathbb{Z}$ .



**8.13.** Рассмотрим коммутативную с точностью до знака диаграмму гомологий и когомологий с коэффициентами в поле  $\mathbb{Q}$ :

$$\begin{array}{ccccc} H_2(M^3, \partial M^3) & \xrightarrow{\partial} & H_1(\partial M^3) & \xrightarrow{i_*} & H_1(M^3) \\ \cong \uparrow \lrcorner \{M^3\} & & \cong \uparrow \lrcorner \{\partial M^3\} & & \cong \uparrow \lrcorner \{M^3\} \\ H^1(M^3) & \xrightarrow{i^*} & H^1(\partial M^3) & \xrightarrow{\delta} & H^2(M^3, \partial M^3) \end{array}$$

Поскольку мы рассматриваем гомологии и когомологии с коэффициентами в поле, отображения  $i_*$  и  $i^*$  двойственны друг другу в смысле линейной алгебры.

Линейному отображению  $A: U \rightarrow V$  можно сопоставить точную последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Ker } A \longrightarrow U \xrightarrow{A} V \longrightarrow \text{Coker } A \longrightarrow 0.$$

При переходе к двойственным пространствам получаем точную последовательность

$$0 \longleftarrow (\text{Ker } A)^* \longleftarrow U^* \xleftarrow{A^*} V^* \longleftarrow (\text{Coker } A)^* \longleftarrow 0.$$

Таким образом,  $\text{Coker}(A^*) = (\text{Ker } A)^*$ . Поэтому  $\dim \text{Coker } i^* = \dim \text{Ker } i_*$ , а значит,  $\dim \text{Im } \partial = \dim \text{Ker } i_* = \dim \text{Coker } i^* = \dim \text{Coker } \partial$ . В результате получаем  $\dim \text{Im } \partial = \dim(H_1(\partial M^3)/\text{Im } \partial) = \dim H_1(\partial M^3) - \dim \text{Im } \partial$ , т.е.  $\dim \text{Im } \partial = \frac{1}{2} \dim H_1(\partial M^3)$ , что и требовалось.

**8.14.** Согласно теореме двойственности Александера

$$\tilde{H}_{n-k-1}(X) \cong \tilde{H}^k(\underbrace{S^{n-2} \sqcup \dots \sqcup S^{n-2}}_m) = \begin{cases} \mathbb{Z}^m & \text{при } k = n - 2; \\ \mathbb{Z}^{m-1} & \text{при } k = 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поэтому

$$H_i(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = 0; \\ \mathbb{Z}^m & \text{при } i = 1; \\ \mathbb{Z}^{m-1} & \text{при } i = n - 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

**8.15.** Согласно двойственности Александера  $\tilde{H}_i(X) \cong \tilde{H}^{n-i}(S^p)$  при  $0 \leq i \leq n$ . Кроме того,  $H_{n+1}(X) = 0$ , поскольку пространство  $X$  гомотопически эквивалентно  $(n+1)$ -мерному многообразию с краем. Таким образом,  $\tilde{H}_i(X) = \mathbb{Z}$  при  $i = n - p$ , а все остальные группы приведённых гомологий  $X$  нулевые.

**8.16.** Согласно двойственности Александера  $\tilde{H}_i(X) \cong \tilde{H}^{n-i}(S^p \sqcup S^q)$  при  $0 \leq i \leq n$ . Кроме того,  $H_i(X) = 0$  при  $i \geq n + 1$ .

**8.3.** а) Пусть  $\alpha_{(n)}$  и  $\alpha_{(m)}$  — образующие групп  $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$  и  $H^1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ . Если  $f^*(\alpha_{(n)}) = 0$ , то  $f^*(\alpha_{(n)}^k) = 0$ , где  $\alpha_{(n)}^k = \alpha_{(n)} \cup \dots \cup \alpha_{(n)}$  — образующая группы  $H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ . Предположим, что  $f^*(\alpha_{(n)}) \neq 0$ , т.е.  $f^*(\alpha_{(n)}) = \alpha_{(m)}$ . Тогда  $f^*(\alpha_{(n)}^{n+1}) = \alpha_{(m)}^{n+1} \neq 0$ , поскольку  $n+1 \leq m$ . С другой стороны,  $\alpha_{(n)}^{n+1} = 0$ . Получено противоречие.

б) Отображение  $f_*$  двойственно отображению  $f^*$ .

8.4. Предположим, что такое отображение  $g$  существует. Тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{g} & S^n \\ p_m \downarrow & & \downarrow p_n \\ \mathbb{R}P^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}P^n, \end{array}$$

где  $p_m$  и  $p_n$  — двулистные накрытия. Отображение  $f_*^{(H)} : H_1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$  нулевое (задача 8.3 а), поэтому отображение  $f_*^{(\pi)} : \pi_1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$  тоже нулевое. Действительно, если  $n = 1$ , то гомоморфизм  $f_* : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  нулевой по очевидным алгебраическим причинам, а если  $n > 1$ , то можно отождествить образующие групп  $H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$  и  $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ , а также образующие групп  $H_1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$  и  $\pi_1(\mathbb{R}P^m)$ . После такого отождествления получим  $f_*^{(\pi)} = f_*^{(H)}$ .

Отображение  $f$  индуцирует нулевой гомоморфизм фундаментальных групп, поэтому существует поднятие

$$\begin{array}{ccc} & S^n & \\ \tilde{f} \nearrow & & \downarrow p_n \\ \mathbb{R}P^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}P^n. \end{array}$$

Тогда  $p_n \tilde{f} p_m = f p_m = p_n g$ . Для любой точки  $x \in S^m$  либо  $g(x) = \tilde{f} p_m(x)$ , либо  $g(-x) = \tilde{f} p_m(x) = \tilde{f} p_m(-x)$ . Отображения  $g$  и  $\tilde{f} p_m$  совпадают в одной точке, поэтому они совпадают. Действительно, отображение накрывающих пространств, которое накрывает данное отображение баз накрытий, полностью задаётся образом одной точки.

Мы приходим к противоречию, поскольку отображение  $g$  переводит точки  $x$  и  $-x$  в разные точки, а  $p_m$  — в одну точку.

8.5. а) Для решения этой задачи нужно воспользоваться теоремами 8.7 и 8.8, которые описывают умножение в кольцах когомологий пространств  $\mathbb{R}P^n$  и  $\mathbb{C}P^n$ . Кроме того, нужно воспользоваться результатом задачи 7.2.

б) Множества  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ ,  $x_i \neq 0$ , стягиваемы (они гомеоморфны открытым шарам) и покрывают  $\mathbb{R}P^n$  ( $\mathbb{C}P^n$ ).

8.6. Пусть  $\alpha$  — образующая группы  $H^1(\mathbb{C}P^n)$ . Тогда  $f^*(\alpha) = \lambda\alpha$ , где  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . Поэтому  $f^*(\alpha^k) = (f^*\alpha)^k = \lambda^k \alpha^k$ . Для вычисления  $\Lambda(f)$  можно воспользоваться не только отображением когомологий, но и отображением когомологий. Поэтому  $\Lambda(f) = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n$ .

8.7. Согласно задаче 8.6 мы имеем  $\Lambda(f) = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n = \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}$ . Поэтому если  $\Lambda(f) = 0$ , то  $\lambda^{n+1} = 1$  и  $\lambda \neq 1$ . Значит,  $\lambda = -1$  и число  $n$  нечётно.

8.8. Как и в задаче 8.6, получаем, что  $f^*\alpha^n = \lambda^n \alpha^n$ . Следовательно,  $f_*[\mathbb{C}P^n] = \lambda^n [\mathbb{C}P^n]$ .

8.9. а) Если  $n$  чётно, то согласно задаче 8.8 мы имеем  $\deg f = \lambda^n \geq 0$ .

б) Покажем, что диффеоморфизм  $\mathbb{C}P^m \rightarrow \mathbb{C}P^m$ , заданный в однородных координатах формулой  $(z_0 : \dots : z_m) \mapsto (\bar{z}_0 : \dots : \bar{z}_m)$ , в случае нечётного  $m$  обращает ориентацию. Действительно, в окрестности неподвижной точки  $(1 : 0 : \dots : 0)$  этот диффеоморфизм устроен как отображение  $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ , заданное формулой

$(z_1, \dots, z_m) \mapsto (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ . Если мы рассмотрим это отображение как отображение  $\mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ , то его определитель равен  $(-1)^m$ .

**8.10.** Группы когомологий (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ ) указанных пространств изоморфны, но кольца когомологий у них разные: умножение в кольце  $H^*(\mathbb{C}P^2)$  нетривиально, а умножение в кольце  $H^*(S^2 \vee S^4)$  тривиально.

Пространство  $\mathbb{C}P^2$  получается приклеиванием  $D^4$  к  $S^2$  по отображению  $\partial D^4 \rightarrow S^2$ , которое является расслоением Хопфа. Если бы это отображение было гомотопно постоянному, то полученное в результате такой склейки пространство было бы гомотопически эквивалентно  $S^2 \vee S^4$ .

**8.11.** Указанные пространства имеют группы когомологий  $\mathbb{Z}$  в размерностях 0,  $m$ ,  $n$  и  $m+n$  (если  $m=n$ , то в размерности  $m=n$  группа когомологий равна  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ); остальные группы когомологий у них нулевые. Для пространства  $S^m \times S^n$  произведение образующих групп когомологий размерностей  $m$  и  $n$  равно образующей группы когомологий размерности  $m+n$ . Для пространства  $S^m \vee S^n \vee S^{m+n}$  умножение в когомологиях тривиально.

**8.17.** Запишем последовательность Майера—Вьеториса для  $K_1 = M_1^{4n} \setminus \text{int } D^{4n}$  и  $K_2 = M_2^{4n} \setminus \text{int } D^{4n}$ :

$$H_{2n}(S^{4n-1}) \longrightarrow H_{2n}(K_1) \oplus H_{2n}(K_2) \longrightarrow H_{2n}(M_1^{4n} \# M_2^{4n}) \longrightarrow H_{2n-1}(S^{4n-1}).$$

Здесь  $H_{2n}(S^{4n-1})=0$  и  $H_{2n-1}(S^{4n-1})=0$ , поэтому  $H_{2n}(K_1) \oplus H_{2n}(K_2) \cong H_{2n}(M_1^{4n} \# M_2^{4n})$ . Кроме того, согласно задаче 3.10 мы имеем  $H_{2n}(K_i) \cong H_{2n}(M_i^{4n})$ . Ясно также, что  $2n$ -мерные циклы, порождающие  $H_{2n}(M_i^{4n})$ , можно выбрать так, чтобы они не пересекали  $D^{4n}$  (шар  $D^{4n}$  можно выбрать сколь угодно малым). Поэтому форма пересечения многообразия  $M_1^{4n} \# M_2^{4n}$  является прямой суммой форм пересечения многообразий  $M_1^{4n}$  и  $M_2^{4n}$ .

**8.18.** Пусть  $z^p$  и  $\omega^q$  — коцепи со значениями в  $G$ , представляющие когомологические классы  $a^p$  и  $b^q$ . Тогда  $\delta(z^p \cup \omega^q)$ ,  $\delta(z^p) \cup \omega^q$  и  $z^p \cup \delta(\omega^q)$  — коцепи, представляющие классы  $\beta^*(a^p \cup b^q)$ ,  $\beta^*(a^p) \cup b^q$  и  $a^p \cup \beta^*(b^q)$ . Ясно также, что  $\delta(z^p \cup \omega^q) = \delta(z^p) \cup \omega^q + (-1)^p z^p \cup \delta(\omega^q)$ .

**9.1.** Ясно, что  $\text{Тор}(H_p(M^p), H_{q-1}(N^q)) = 0$ , поскольку  $H_p(M^p) = 0$  или  $\mathbb{Z}$ . Поэтому согласно теореме Кюннета  $H_{p+q}(M^p \times N^q) \cong H_p(M^p) \otimes H_q(N^q)$ . Эта группа изоморфна  $\mathbb{Z}$  тогда и только тогда, когда  $H_p(M^p) = \mathbb{Z}$  и  $H_q(N^q) = \mathbb{Z}$ .

**9.2.** Предположим, что  $S^n = M^p \times N^q$ , где  $M^p$  и  $N^q$  — многообразия размерностей  $p, q \geq 1$ . Ясно, что эти многообразия должны быть замкнутыми. Кроме того, согласно задаче 9.1 они должны быть ориентируемыми. Поэтому согласно теореме Кюннета группа  $H_p(S^n)$  содержит подгруппу  $\mathbb{Z} = H_p(M^p) \otimes H_0(N^q)$ , причём  $0 < p < n$ . Этого не может быть.

**9.3.** Фундаментальные группы обоих пространств равны  $\mathbb{Z}_2$ , а все остальные гомотопические группы у сферы и проективного пространства той же размерности изоморфны. Для гомологий достаточно доказать, что разными будут группы гомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ . Согласно теореме Кюннета размерность пространства  $\bigoplus_{i \geq 0} H_i(X \times Y; \mathbb{Z}_2)$  равна произведению размерностей пространств  $\bigoplus_{i \geq 0} H_i(X; \mathbb{Z}_2)$  и  $\bigoplus_{i \geq 0} H_i(Y; \mathbb{Z}_2)$ . Поэтому размерности пространств  $\bigoplus_{i \geq 0} H_i(S^n \times \mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$  и  $\bigoplus_{i \geq 0} H_i(S^m \times \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$  равны  $2m+2$  и  $2n+2$  соответственно.

**9.4.** Ясно, что  $\pi_1(S^2 \times \mathbb{R}P^\infty) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2)$  и  $\pi_k(S^2 \times \mathbb{R}P^\infty) \cong \pi_k(\mathbb{R}P^2)$  при  $k \geq 2$ , поскольку  $\pi_k(P^\infty) = 0$  и  $\pi_k(S^2) \cong \pi_k(\mathbb{R}P^2)$  при  $k \geq 2$ .

Согласно теореме Кюннета группа  $H_i(S^2 \times \mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$  содержит подгруппу, изоморфную  $H_0(S^2; \mathbb{Z}_2) \otimes H_i(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ ; в частности, эта группа нетривиальна для всех  $i$ . С другой стороны,  $H_i(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) = 0$  при  $i \geq 3$ .

**9.5.** Первое решение. Пространство  $A * B$  является факторпространством  $A \times [0, 1] \times B$  по следующему отношению эквивалентности:  $(a_1, t_1, b_1) \sim (a_2, t_2, b_2)$ , если либо  $t_1 = t_2 = 0$  и  $a_1 = a_2$ , либо  $t_1 = t_2 = 1$  и  $b_1 = b_2$ . Пусть  $\bar{A} \subset A * B$  состоит из тех точек, для которых  $t \leq 1/2$ , а  $\bar{B} \subset A * B$  состоит из тех точек, для которых  $t \geq 1/2$ . Пространства  $A$  и  $B$  можно отождествить с подмножествами в  $A * B$ , состоящими из точек, для которых  $t = 0$  и  $t = 1$ . Тогда пространства  $A$  и  $B$  являются деформационными ретрактами пространств  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ . Ясно также, что  $\bar{A} \cap \bar{B} = A \times B$ . Поэтому мы получаем точную последовательность Майера—Вьеториса

$$\dots \xrightarrow{\varphi} H_{r+1}(A * B) \longrightarrow H_r(A \times B) \xrightarrow{\psi} H_r(\bar{A}) \oplus H_r(\bar{B}) \xrightarrow{\varphi} H_r(A * B) \longrightarrow \dots$$

Отображение  $\varphi$  индуцировано включениями  $A \subset A * B$  и  $B \subset A * B$ . Легко видеть, что каждое из этих отображений гомотопно постоянному. Например, для включения  $A \subset A * B$  требуемая гомотопия задаётся формулой  $f_t(a) = (a, t, b_0)$ , где  $b_0$  — фиксированная точка пространства  $B$ . Таким образом, полученная точная последовательность имеет вид

$$0 \longrightarrow H_{r+1}(A * B) \longrightarrow H_r(A \times B) \xrightarrow{\psi} H_r(\bar{A}) \oplus H_r(\bar{B}) \longrightarrow 0.$$

Группу  $H_r(A \times B)$  мы находим по теореме Кюннета, поэтому остаётся вычислить ядро отображения  $\psi$ . Отображение  $\psi$  является прямой суммой отображений  $\psi_A$  и  $\psi_B$ , причём композиция

$$H_r(A \times B) \xrightarrow{\psi_A} H_r(\bar{A}) \xrightarrow{\cong} H_r(A)$$

индуцирована проекцией на первый множитель. Эта композиция устроена следующим образом: при  $q > 0$  отображение  $H_{r-q}(A) \otimes H_q(B) \rightarrow H_r(A)$  нулевое, а отображение  $H_r(A) \otimes H_0(B) \rightarrow H_r(A) \cong H_r(A) \otimes H_0(*)$  индуцировано отображением  $B \rightarrow *$ . Ядро последнего отображения равно  $H_r(A) \otimes \tilde{H}_0(B)$ . Для отображения  $\psi_B$  рассуждения аналогичны.

**Второе решение.** Напомним, что  $A * B \sim \Sigma(A \wedge B)$ , где  $A \wedge B = A \times B / A \vee B$  (часть I, задача 14.4). Поэтому  $H_{r+1}(A * B) \cong \tilde{H}_r(A \wedge B) \cong \cong H_r(A \times B, A \vee B)$ . Запишем точную последовательность пары  $(A \times B, A \vee B)$ :

$$\dots \longrightarrow H_r(A \vee B) \longrightarrow H_r(A \times B) \longrightarrow H_r(A \times B, A \vee B) \longrightarrow H_{r-1}(A \vee B) \longrightarrow \dots$$

Здесь

$$H_r(A \times B) = \bigoplus_{i+j=r} (H_i(A) \otimes H_j(B)) \oplus \bigoplus_{i+j=r-1} \text{Тор}(H_i(A), H_j(B))$$

и отображение  $H_r(A \vee B) \rightarrow H_r(A \times B)$  является изоморфизмом на прямое слагаемое

$$(H_r(A) \otimes H_0(B)) \oplus (H_0(A) \otimes H_r(B)).$$

В частности, это отображение (и аналогичное отображение  $(r-1)$ -мерных гомологий) является мономорфизмом. Поэтому группа  $H_r(A \times B, A \vee B)$  изоморфна факторгруппе  $H_r(A \times B)/H_r(A \vee B)$ . Факторизация по подгруппе  $H_r(A \vee B)$  эквивалентна переходу к приведённым гомологиям.

**9.6.** Из теоремы Кюннета следует, что градуированные группы когомологий этих пространств изоморфны аддитивным группам колец многочленов  $\mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_k]$  и  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$ , профакторизованным по соотношениям  $x_1^{n_1+1} = \dots = x_k^{n_k+1} = 0$ . Эти группы порождены элементами вида  $\alpha_1^{m_1} \times \dots \times \alpha_k^{m_k}$ ,  $0 \leq m_i \leq n_i$ . Здесь  $\alpha_i$  — образующая одномерных когомологий в вещественном случае и двумерных когомологий в комплексном случае. Из теоремы 9.4 следует, что изоморфны не только группы, но и кольца. В комплексном случае следует отметить, что знак  $(-1)^{q_1 p_2}$  учитывать не нужно, поскольку все ненулевые элементы имеют чётную размерность.

**9.7.** Теорема 9.4 выражает умножение в образе естественного мономорфизма  $H^*(K) \otimes H^*(L) \rightarrow H^*(K \times L)$  через умножения в кольцах  $H^*(K)$  и  $H^*(L)$ . Но если одна из групп  $H^*(K)$  и  $H^*(L)$  не имеет кручения, то этот мономорфизм является изоморфизмом.

**9.9.** Если существует указанное невырожденное билинейное отображение, то число  $\binom{n}{k}$  чётно для всех  $k$ , удовлетворяющих неравенствам  $0 < k < n$ . Поэтому  $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{2}$  для всех целых  $a$  и  $b$ .

Ясно, что  $(a+b)^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod{2}$ . Поэтому  $(a+b)^{2^k} \equiv a^{2^k} + b^{2^k} \pmod{2}$ . Предположим, что  $n = 2^k m$ , где  $m$  — нечётное число,  $m > 1$ . Тогда

$$(a+b)^n \equiv (a^{2^k} + b^{2^k})^m \equiv a^n + m a^{(m-1)2^k} b^{2^k} + \frac{m(m-1)}{2} a^{(m-2)2^k} b^{2 \cdot 2^k} + \dots \pmod{2}.$$

Здесь  $m \not\equiv 0 \pmod{2}$ .

**9.10.** Положим  $f(x, y) = (z_1, \dots, z_{r+s-1})$ , где

$$\sum_{k=1}^{r+s-1} z_k t^{k-1} = \left( \sum_{i=1}^r x_i t^{i-1} \right) \left( \sum_{j=1}^s y_j t^{j-1} \right).$$

Если произведение двух многочленов является нулевым многочленом, то один из этих многочленов должен быть нулевым. Поэтому билинейное отображение  $f$  невырожденное.

Мы построили невырожденное билинейное отображение  $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{r+s-1}$ . Аналогично можно построить невырожденное билинейное отображение  $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C}^{r+s-1}$ , которое является невырожденным билинейным отображением  $\mathbb{R}^{2r} \times \mathbb{R}^{2s} \rightarrow \mathbb{R}^{2r+2s-2}$ . Кроме того, можно использовать не только комплексные числа  $\mathbb{C}$ , но и кватернионы  $\mathbb{H}$ , а также октавы (числа Кэли)  $\mathbb{O}$ .

**10.3.** а) Пусть  $X$  — ациклический  $CW$ -комплекс. Тогда пространство  $X$  линейно связано. Поэтому согласно задаче 14.5 из части I пространство  $\Sigma X$  односвязно, а значит,  $H_1(\Sigma X) = 0$ . Далее,  $H_{i+1}(\Sigma X) = H_i(X) = 0$  при  $i \geq 1$ . Согласно теореме Гуревича все гомотопические группы пространства  $\Sigma X$  тривиальны. В таком случае согласно теореме Уайтхеда пространство  $\Sigma X$  стягиваемо.

б) Пример нестягиваемого ациклического  $CW$ -комплекса приведён в задаче 5.8.

**10.4.** Пространство  $S^p \times S^q$  можно представить в виде  $CW$ -комплекса с клетками размерностей  $0, p, q$  и  $p + q$ . Поэтому  $S^p \vee S^q$  является  $k$ -мерным остовом  $S^p \times S^q$  при  $\max\{p, q\} \leq k \leq p + q - 1$ . Отображение  $f$  соответствует приклейке клетки  $D^{p+q}$  к  $(p + q - 1)$ -мерному остову. Гомотопический класс отображения  $S^{p+q-1} \xrightarrow{f} S^p \vee S^q$  является препятствием к продолжению тождественного отображения  $S^p \vee S^q \rightarrow S^p \vee S^q$  с  $(p + q - 1)$ -мерного остова  $S^p \times S^q$  на  $(p + q)$ -мерный остов. Предположим, что такое продолжение  $g: S^p \times S^q \rightarrow S^p \vee S^q$  существует. Пусть  $\alpha^p, \beta^q$  и  $\bar{\alpha}^p, \bar{\beta}^q$  — когомологические классы в  $H^*(S^p \vee S^q)$  и  $H^*(S^p \times S^q)$ , соответствующие  $S^p, S^q$ . Тогда  $\bar{\alpha}^p = g^* \alpha^p$  и  $\bar{\beta}^q = g^* \beta^q$ . Поэтому  $\bar{\alpha}^p \cup \bar{\beta}^q = g^*(\alpha^p \cup \beta^q)$ . Но  $\bar{\alpha}^p \cup \bar{\beta}^q \neq 0$ , а  $\alpha^p \cup \beta^q = 0$ .

**10.5.** Рассмотрим следующее клеточное разбиение сферы  $S^\infty$ , содержащее по  $m$  клеток каждой размерности:

$$(e^{2\pi i k/m}, 0, 0, \dots);$$

$$(e^{2\pi i \theta}, 0, 0, \dots), \quad \frac{k}{m} < \theta < \frac{k+1}{m};$$

$$(\omega_1, \rho e^{2\pi i k/m}, 0, 0, \dots), \quad 0 < \rho \leq 1, \quad |\omega_1|^2 = 1 - \rho^2;$$

$$(\omega_1, \rho e^{2\pi i \theta}, 0, 0, \dots), \quad 0 < \rho \leq 1, \quad |\omega_1|^2 = 1 - \rho^2, \quad \frac{k}{m} < \theta < \frac{k+1}{m};$$

$$(\omega_1, \omega_2, \rho e^{2\pi i k/m}, 0, 0, \dots), \quad 0 < \rho \leq 1, \quad |\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 = 1 - \rho^2;$$

$$(\omega_1, \omega_2, \rho e^{2\pi i \theta}, 0, 0, \dots), \quad 0 < \rho \leq 1, \quad |\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 = 1 - \rho^2, \quad \frac{k}{m} < \theta < \frac{k+1}{m};$$

.....  
 Это клеточное разбиение согласовано с отношением эквивалентности на  $S^\infty$ , поэтому из него мы получаем клеточное разбиение линзы  $L_m^\infty$ , содержащее по одной клетке каждой размерности. Граничные гомоморфизмы вычисляются точно так же, как для трёхмерных линз. В результате получаем цепной комплекс

$$\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}.$$

Гомологии этого комплекса имеют указанный вид.

**10.6.** Пусть  $\tilde{M}^3$  — универсальная накрывающая многообразия  $M^3$ . Тогда  $\pi_1(\tilde{M}^3) = 0$  и  $\pi_2(\tilde{M}^3) = \pi_2(M) = 0$ . Группа  $\pi_1(M^3)$  бесконечна, поэтому многообразие  $\tilde{M}^3$  некомпактно. Значит,  $H_3(\tilde{M}^3) = 0$ . Ясно также, что  $H_k(\tilde{M}^3) = 0$  при  $k \geq 3$ . Применив теорему Гуревича, получим, что  $\pi_i(\tilde{M}^3) = 0$  для всех  $i$ . Согласно теореме Уайтхеда многообразие  $\tilde{M}^3$  стягиваемо, а значит,  $\pi_i(M^3) = \pi_i(\tilde{M}^3) = 0$  при  $i \geq 2$ .

**10.7.** Предположим, что группа  $\pi$  содержит элемент конечного порядка. Тогда она содержит и порождённую этим элементом циклическую подгруппу  $\mathbb{Z}_m$ . Рассмотрим накрытие  $\tilde{X} \rightarrow X$ , соответствующее подгруппе  $\mathbb{Z}_m \subset \pi$ . Тогда  $\tilde{X}$  — пространство типа  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ , поэтому оно гомотопически эквивалентно  $L_m^\infty$ . Приходим к противоречию, поскольку, с одной стороны,  $\tilde{X}$  — конечномерный симплициальный комплекс, а с другой стороны, согласно задаче 10.5 пространство  $\tilde{X}$  имеет ненулевые гомологии сколь угодно больших размерностей.

**11.1.** Для тривиального расслоения требуемое отображение  $\pi$ , очевидно, существует. Предположим теперь, что такое отображение  $\pi$  существует. Рассмотрим

отображение  $f: E \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$ , заданное формулой  $f(e) = (p(e), \pi(e))$ . Согласно теореме 11.1 это отображение задаёт изоморфизм расслоения  $E$  на тривиальное расслоение  $B \times \mathbb{R}^n$ .

**11.2.** Введя риманову метрику, тривиализацию можно считать ортонормированными. Фиксируем одну тривиализацию расслоения  $TS^3$ . Тогда любая тривиализация расслоения  $TS^3$  однозначно задаётся отображением  $S^3 \rightarrow SO(3)$ . Гомотопия тривиализаций — это гомотопия таких отображений. Остаётся заметить, что  $SO(3) \approx \mathbb{R}P^3$  (см. решение задачи 20.5 из части I) и  $\pi_3(\mathbb{R}P^3) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ .

**11.3.** Фиксируем тривиализацию расслоения  $TS^3$ . Тогда любое векторное поле на  $S^3$  без особых точек однозначно задаётся отображением  $S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \sim S^2$ . Гомотопия векторных полей без особых точек — это гомотопия таких отображений. Ясно также, что  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ .

**11.4.** Применим индукцию по  $k$ . При  $k = 1$  утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для произведений  $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_{k-1}}$ . Вложим сферу  $S^{n_k}$  в  $\mathbb{R}^{n_k+1}$ . Нормальное расслоение  $S^{n_k}$  в  $\mathbb{R}^{n_k+1}$  тривиально, поэтому нормальное расслоение  $S^{n_k}$  в  $\mathbb{R}^{n_1+\dots+n_{k-1}+1}$  тоже тривиально. Слоем этого тривиального расслоения является  $\mathbb{R}^{n_1+\dots+n_{k-1}+1}$ ; в это пространство по предположению можно вложить  $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_{k-1}}$ . В результате получаем требуемое вложение.

**11.5\***[St1]. Мы будем пользоваться примерами 11.5 и 11.6.

Если все числа  $n_i$  чётны, то

$$\chi(S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}) = \chi(S^{n_1}) \dots \chi(S^{n_k}) = 2^k \neq 0.$$

Поэтому на многообразии  $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}$  любое векторное поле имеет особую точку, а значит, это многообразие не параллелизуемо.

Займёмся теперь доказательством параллелизуемости многообразия  $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}$ ,  $k \geq 2$ , в случае, когда одно из чисел  $n_i$  нечётно. При  $k = 2$  требуемое утверждение очевидным образом вытекает из следующей леммы.

*Л е м м а.* Пусть замкнутые многообразия  $M_1$  и  $M_2$  таковы, что сумма Уитни касательного расслоения  $\tau_{M_1}$  и одномерного тривиального расслоения тривиальна и при этом  $\chi(M_1) = 0$ . Тогда многообразию  $M_1 \times M_2$  параллелизуемо.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть  $\eta_B^n$  — тривиальное  $n$ -мерное расслоение над  $B$ . По условию  $\chi(M_1) = 0$ , поэтому на  $M_1$  существует векторное поле без особых точек. Оно задаёт над  $M_1$  два расслоения: тривиальное одномерное расслоение  $\eta_{M_1}^1$  и ортогональное дополнение к нему, которое мы обозначим  $\alpha$ . При этом  $\dim \alpha = \dim M_1 - 1 = m_1 - 1$  и  $\tau_{M_1} = \alpha \oplus \eta_{M_1}^1$ .

Для любых векторных расслоений  $\xi_1$  и  $\xi_2$  над  $B$  и любого непрерывного отображения  $f: B_1 \rightarrow B$  расслоение  $f^*(\xi_1 \oplus \xi_2)$  изоморфно  $(f^*\xi_1) \oplus (f^*\xi_2)$ . Кроме того,  $f^*\eta_B^n = \eta_{B_1}^n$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \tau_{M_1 \times M_2} &\cong \pi_1^*(\tau_{M_1}) \oplus \pi_2^*(\tau_{M_2}) \cong \pi_1^*(\alpha \oplus \eta_{M_1}^1) \oplus \pi_2^*(\tau_{M_2}) \cong \\ &\cong \pi_1^*(\alpha) \oplus \eta_{M_1 \times M_2}^1 \oplus \pi_2^*(\tau_{M_2}) \cong \pi_1^*(\alpha) \oplus \pi_2^*(\eta_{M_1}^1 \oplus \tau_{M_2}) \cong \\ &\cong \pi_1^*(\alpha) \oplus \eta_{M_1 \times M_2}^{m_2+1} \cong \pi_1^*(\alpha \oplus \eta_{M_1}^1) \eta_{M_1 \times M_2}^{m_2} \cong \pi_1^*(\tau_{M_1}) \oplus \eta_{M_1 \times M_2}^{m_2} \cong \\ &\cong \pi_1^*(\tau_{M_1} \oplus \eta_{M_1}^1) \oplus \eta_{M_1 \times M_2}^{m_2-1} \cong \eta_{M_1 \times M_2}^{m_1+1} \oplus \eta_{M_1 \times M_2}^{m_2-1} \cong \eta_{M_1 \times M_2}^{m_1+m_2}. \end{aligned}$$

□

При  $k > 2$  можно воспользоваться индукцией по  $k$ . Будем считать, что  $n_1$  нечётно. Тогда можно положить  $M_1 = S^{n_1} \times S^{n-k-1}$  и  $M_2 = S^{n-k}$ . По предположению индукции  $M_1$  параллелизуемо, поэтому  $\tau_{M_1} \oplus \eta_{M_1}^1$  — тривиальное расслоение.

**11.6.** Мы не будем проверять, что  $V(n, k)$  — многообразие; ограничимся вычислением его размерности. Отображение  $V(n, k) \rightarrow V(n, k-1)$ , сопоставляющее набору векторов  $v_1, \dots, v_k$  набор векторов  $v_1, \dots, v_{k-1}$ , является локально тривиальным расслоением со слоем  $S^{n-k}$ . Действительно, единичный вектор  $v_k$  лежит в  $(n-k+1)$ -мерном пространстве — ортогональном дополнении к подпространству, порождённому векторами  $v_1, \dots, v_{k-1}$ . Ясно также, что  $V(n, 1) \approx S^{n-1}$ . Поэтому мы получаем последовательность расслоений

$$V(n, k) \xrightarrow{S^{n-k}} V(n, k-1) \xrightarrow{S^{n-k-1}} \dots \xrightarrow{S^{n-2}} V(n, 1) = S^{n-1}.$$

Следовательно, размерность многообразия  $V(n, k)$  равна

$$(n-1) + (n-2) + \dots + (n-k) = nk - \frac{k(k+1)}{2}.$$

**11.7.** Многообразие  $V(n+2, 2)$  имеет размерность  $2n+1$ . Согласно теореме 11.4 оно  $(n-1)$ -связно и

$$\pi_n(V(n+2, 2)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } n \text{ чётно;} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Согласно теореме Гуревича  $H_n(V(n+2, 2)) \cong \pi_n(V(n+2, 2))$  и  $H_k(V(n+2, 2)) = 0$  при  $0 < k < n$ . Половину групп гомологий мы вычислили. Другую половину можно найти с помощью двойственности Пуанкаре. В результате получим, что если  $n$  чётно, то

$$H_k(V(n+2, 2)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{для } k = 0, n, n+1, 2n+1; \\ 0 & \text{для остальных } k, \end{cases}$$

а если  $n$  нечётно, то

$$H_k(V(n+2, 2)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{для } k = 0, 2n+1; \\ \mathbb{Z}_2 & \text{для } k = n; \\ 0 & \text{для остальных } k. \end{cases}$$

**11.8.** Представим  $M^4$  в виде  $CW$ -комплекса и будем строить три независимых сечения касательного расслоения индукцией по остовам. Первое нетривиальное препятствие возникает при продолжении их на двумерный остов. Это препятствие — класс  $\omega_2$ . Значит, продолжение на двумерный остов существует тогда и только тогда, когда  $\omega_2 = 0$ . Препятствие к продолжению на трёхмерный остов лежит в когомологиях с коэффициентами в  $\pi_2(V(4, 3))$ . Но  $V(4, 3) \approx SO(4)$  и  $\pi_2(SO(4)) = 0$  (это видно из точной последовательности расслоения  $SO(4) \rightarrow S^3$  со слоем  $SO(3)$ , поскольку  $\pi_2(SO(3)) = \pi_2(\mathbb{R}P^3) = 0$ ). Поэтому это препятствие отсутствует.

Очевидным образом три независимых сечения можно продолжить с края четырёхмерного шара на шар с выколотым центром.



Если у нас есть независимые сечения над  $M^n$  с несколькими выколотыми точками  $x_1, \dots, x_n$ , то можно построить независимые сечения над  $M^n$  с одной выколотой точкой  $x_0$ . Для этого нужно соединить точку  $x_0$  с точками  $x_1, \dots, x_n$  непересекающимися путями, а затем стянуть эти пути в точку  $x_0$ .

**11.11.** Пусть  $\xi_1 = (u_1, v_1)$  и  $\xi_2 = (u_2, v_2)$  — векторы пространства  $T_x M \times T_x M \cong T_{(x,x)}(M \times M)$ . Положим  $(\xi_1, \xi_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$ .

Пусть  $u, v \in T_x M$ . Вектор  $\xi = (u, v) \in T_{(x,x)}(M \times M)$  является касательным вектором к  $d(M)$  тогда и только тогда, когда  $u = v$ , т. е.  $\xi = (u, u)$ . Вектор  $\eta = (v, w)$  ортогонален всем векторам  $(u, u)$  тогда и только тогда, когда  $v = -w$ , т. е.  $\eta = (v, -v)$ . Отображение  $\tau_M \rightarrow \nu_{d(M)}$ , которое сопоставляет вектору  $v \in T_x M$  вектор  $(v, -v) \in T_{(x,x)}(M \times M)$ , является изоморфизмом векторных расслоений.

**11.12.** Сфера с  $g$  ручками ориентируема, поэтому  $\omega_1 = 0$ . Её эйлерова характеристика чётна, поэтому  $\omega_2 = 0$ .

По-другому равенства  $\omega_1 = 0$  и  $\omega_2 = 0$  можно доказать, воспользовавшись тем, что для стандартного вложения сферы с  $g$  ручками в  $\mathbb{R}^3$  нормальное расслоение тривиально.

**11.13.** Для сферы с  $m$  листами Мёбиуса чётность эйлеровой характеристики совпадает с чётностью числа  $m$ . Поэтому  $\omega_2 = m\Lambda$ , где  $\Lambda$  — образующая группы двумерных когомологий, т. е.  $\omega_2 = 0$  при чётном  $m$  и  $\omega_2 = \Lambda$  при нечётном  $m$ .

Для группы коэффициентов  $\mathbb{Z}_2$  одномерные когомологии сферы с  $m$  листами Мёбиуса имеют базис  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , где когомологические классы  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  двойственны циклам, обходы вдоль которых изменяют ориентацию, поэтому  $\omega_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ .

Наконец,  $\alpha_i \alpha_j = \delta_{ij} \Lambda$ , поэтому  $\omega_1^2 = m\Lambda = \omega_2$ .

**11.14.** Пусть  $\nu_{M^n}$  — нормальное расслоение,  $\alpha = \omega_1(\nu_{M^n})$ . Тогда  $\omega(M^n)(1 + \alpha) = 1$ , поэтому  $\omega_1 + \alpha = 1$ ,  $\omega_2 + \omega_1 \alpha = 0$ ,  $\dots$ ,  $\omega_n + \omega_{n-1} \alpha = 0$ . Следовательно,  $\omega_1 = \alpha$ ,  $\omega_2 = \alpha^2$ ,  $\dots$ ,  $\omega_n = \alpha^n$ .

**11.15.** Пусть  $\omega_k = \omega_k(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{k} \alpha^k$  для  $k = 1, \dots, n$ . Согласно задаче 11.14 мы имеем  $\omega_k = \omega_1^k$ . Поэтому все числа  $\binom{n+1}{k}$ , где  $k = 1, \dots, n$ , либо одновременно чётные, либо одновременно нечётные.

Над полем  $\mathbb{Z}_2$  имеет место равенство  $(1+x)^{2^m} = 1 + x^{2^m}$ . Пусть  $a_0 + a_1 \cdot 2 + \dots + a_m \cdot 2^m$  — двоичная запись числа  $n+1$ . Тогда  $(1+x)^n = (1+x)^{a_0} (1+x^2)^{a_1} \times \dots \times (1+x^{2^m})^{a_m}$ . Если все указанные числа  $\binom{n+1}{k}$  чётны, то  $a_0 = \dots = a_{m-1} = 0$  и  $a_m = 1$ ; это означает, что  $n+1 = 2^m$ . Если все указанные числа нечётны, то  $a_0 = \dots = a_m = 1$ ; это означает, что  $n+1 = 2^{m+1} - 1$ .

**11.16.** Если  $n$  чётно, то когомологический класс  $\omega_n(\mathbb{R}P^n) = (n+1)\alpha^n$ , где  $\alpha$  — образующая группы  $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ , ненулевой. Поэтому число Штифеля—Уитни  $\omega_n[\mathbb{R}P^n]$  тоже ненулевое. Когомологический класс  $\omega_1(\mathbb{R}P^n) = (n+1)\alpha = \alpha$  тоже ненулевой, и  $\alpha^n \neq 0$ . Поэтому число Штифеля—Уитни  $\omega_1^n[\mathbb{R}P^n]$  ненулевое.

**11.17.** Если  $n = 2k - 1$ , то  $\omega(\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{2k} = (1+a^2)^k$ , поэтому  $\omega_i(\mathbb{R}P^n) = 0$  для любого нечётного  $i$ . Но в любой моном  $\omega_1^{r_1} \dots \omega_n^{r_n}$ , где  $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = 2k - 1$ , входит множитель  $\omega_i$ , где  $i$  нечётно.

**11.18.** В одну сторону утверждение очевидно, поэтому нужно лишь доказать, что если расслоение  $\xi^k \oplus \varepsilon^1$  тривиально, то расслоение  $\xi^k$  тоже тривиально. Оба расслоения  $\xi^k \oplus \varepsilon^1$  и  $\varepsilon^1$  ориентируемы, поэтому расслоение  $\xi^k$  тоже ориентируемо. Будем считать, что во всех слоях расслоений  $\xi^k \oplus \varepsilon^1$  и  $\xi^k$  фиксирована некоторая ориентация. Каждый слой расслоения  $\xi^k \oplus \varepsilon^1$  отождествлён с  $\mathbb{R}^{k+1}$ ; при этом каждый слой расслоения  $\xi^k$  — это ориентированное  $k$ -мерное подпространство в  $\mathbb{R}^{k+1}$ . Пространство ориентированных  $k$ -мерных подпространств в  $\mathbb{R}^{k+1}$  гомеоморфно сфере  $S^k$ . Рассмотрим расслоение  $\gamma_+^k$  над  $S^k$ , слоем которого над точкой  $x \in S^k$  служит соответствующее этой точке ориентированное  $k$ -мерное подпространство в  $\mathbb{R}^{k+1}$ . Пусть  $f: B \rightarrow S^k$  — отображение, сопоставляющее точке  $b \in B$  слой расслоения  $\xi^k$  над этой точкой. Ясно, что  $\xi^k = f^* \gamma_+^k$ . Из того, что размерность комплекса  $B$  меньше  $k$ , следует, что отображение  $f$  гомотопно постоянному. Поэтому расслоение  $\xi^k$  тривиально.

**11.19.** а) Очевидным образом следует из задачи 11.18.

б) Пусть  $\nu^k$  — нормальное расслоение для вложения  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ . Тогда  $\tau_{M^n} \oplus \nu^k \cong \theta^{n+k}$ , поэтому  $\varepsilon^1 \oplus \tau_{M^n} \oplus \nu^k \cong \varepsilon^{n+k+1}$ . Мы рассматриваем ситуацию, когда  $k \geq n + 1$ . Предположим, что многообразие  $M^n$  стабильно параллелизуемо. Тогда расслоение  $\varepsilon^1 \oplus \tau_{M^n}$  тривиально, поэтому согласно задаче 11.18 расслоение  $\nu^k$  тоже тривиально. Наоборот, если расслоение  $\nu^k$  тривиально, то расслоение  $\varepsilon^1 \oplus \tau_{M^n}$  тоже тривиально.

**11.20.** Пространство  $E(P\gamma_n^k)$  состоит из пар  $(l, \Pi^k)$ , где  $l \subset \Pi^k$ . Пространство  $E(P\overline{\gamma}_n^{k-1})$  состоит из пар  $(l, \Pi^{k-1})$ , где  $l \perp \Pi^{k-1}$ . Отображение  $E(P\gamma_n^k) \rightarrow E(P\overline{\gamma}_n^{k-1})$  сопоставляет паре  $(l, \Pi^k)$  пару  $(l, \Pi^{k-1})$ , где  $\Pi^{k-1}$  — ортогональное дополнение к  $l$  в  $\Pi^k$ . Обратное отображение сопоставляет паре  $(l, \Pi^{k-1})$  пару  $(l, \Pi^k)$ , где  $\Pi^k$  — пространство, натянутое на  $l$  и  $\Pi^{k-1}$ .

**12.1.** Предположим, что некоторая конечная группа свободно действует на  $\mathbb{R}^n$ . Любая конечная группа содержит подгруппу  $G = \mathbb{Z}_p$ , где  $p$  — простое число. Группа  $G$  тоже свободно действует на  $\mathbb{R}^n$ . Это действие индуцирует действие  $G$  на  $S^n$  с единственной неподвижной точкой  $\infty$ , т. е.  $(S^n)^G = \{\infty\}$ . С другой стороны, согласно теореме 12.9 пространство  $(S^n)^G$  является гомологической сферой, а топологическое пространство, состоящее из одной точки, не является гомологической сферой.

**13.1.** Согласно теореме 13.6 мы имеем  $\text{Sq} \alpha^{2^m} = (\alpha + \alpha^2)^{2^m} = \alpha^{2^m} + \alpha^{2^{m+1}}$ , поскольку  $\binom{2^m}{i} \equiv 0 \pmod{2}$  при  $1 \leq i \leq 2^m - 1$ . Поэтому  $\text{Sq}(\alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) = (\alpha + \alpha^2) + (\alpha^2 + \alpha^4) + (\alpha^4 + \alpha^8) + \dots = \alpha$ .

**13.2.** Первое решение. Согласно теореме 11.20 имеет место мономорфизм

$$f^*: H^*(G(\infty, n); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha_1, \dots, \alpha_n],$$

причём  $f^* \omega_m = \sigma_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — элементарная симметрическая функция. Кроме того,  $\text{Sq}^0 \alpha_i = \alpha_i$ ,  $\text{Sq}^1 \alpha_i = \alpha_i^2$  и  $\text{Sq}^r \alpha_i = 0$  при  $r > 1$ . Поэтому по формуле Картана

$$\text{Sq}^k(\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_m}) = \alpha_{i_1} \text{Sq}^k(\alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_m}) + \alpha_{i_1}^2 \text{Sq}^{k-1}(\alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_m}) = \dots$$

$$\dots = \sum \alpha_{j_1}^2 \dots \alpha_{j_k}^2 \alpha_{j_{k+1}} \dots \alpha_{j_m},$$

где суммирование ведётся по всем перестановкам набора  $i_1, \dots, i_m$ , для которых  $j_1 < \dots < j_k$  и  $j_{k+1} < \dots < j_m$ . Следовательно,

$$\text{Sq}^k(f^* \omega_m) = \sum \alpha_{i_1}^2 \dots \alpha_{i_k}^2 \alpha_{i_{k+1}} \dots \alpha_{i_m}.$$

А так как  $f^*$  — мономорфизм, достаточно доказать, что по модулю 2 имеет место тождество

$$\sum \alpha_{i_1}^2 \dots \alpha_{i_k}^2 \alpha_{i_{k+1}} \dots \alpha_{i_m} = \sum_{i=0}^k \binom{m-k+i-1}{i} \sigma_{k-i} \sigma_{m+i}. \quad (1)$$

Применим индукцию по числу переменных  $n$ . При  $n = 1$  получаем очевидные тождества  $\alpha_1 = \sigma_0 \sigma_1$  и  $\alpha_1^2 = \sigma_1^2$ . Докажем теперь шаг индукции. Если  $k = m$ , то формула (1) принимает вид  $\sum (\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k})^2 = (\sigma_k)^2$ . Это тождество по модулю 2 очевидно. Предположим теперь, что  $k < m$ . Пусть  $\sum^* \alpha_{i_1}^2 \dots \alpha_{i_k}^2 \alpha_{i_{k+1}} \dots \alpha_{i_m}$  — аналогичная сумма для  $n - 1$  переменных  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ . Тогда левая часть формулы (1) записывается в виде

$$\alpha_n^2 \sum^* \alpha_{i_1}^2 \dots \alpha_{i_{k-1}}^2 \alpha_{i_k} \alpha_{i_{k+1}} \dots \alpha_{i_{m-1}} + \alpha_n \sum^* \alpha_{i_1}^2 \dots \alpha_{i_k}^2 \alpha_{i_{k+1}} \dots \alpha_{i_{m-1}} + \sum^* \alpha_{i_1}^2 \dots \alpha_{i_k}^2 \alpha_{i_{k+1}} \dots \alpha_{i_m}.$$

Пусть  $\sigma_m^*$  — элементарная функция от переменных  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ . Тогда  $\sigma_m = \alpha_n \sigma_{m-1}^* + \sigma_m^*$ , поэтому правая часть формулы (1) записывается в виде

$$\begin{aligned} & \binom{m-1}{k} (\alpha_n \sigma_{m+k-1}^* + \sigma_{m+k}^*) + \\ & + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{m-k+i-1}{k} (\alpha_n \sigma_{k-i-1}^* + \sigma_{k-i}^*) (\alpha_n \sigma_{m+i-1}^* + \sigma_{m+i}^*) = \\ & = \alpha_n^2 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{m-k+i-1}{i} \sigma_{k-i-1}^* \sigma_{m+i-1}^* + \\ & + \alpha_n \sum_{i=0}^k \left( \binom{m-k+i-1}{i} + \binom{m-k+i-2}{i-1} \right) \sigma_{k-i}^* \sigma_{m+i-1}^* + \\ & + \sum_{i=0}^k \binom{m-k+i-1}{i} \sigma_{k-i}^* \sigma_{m+i}^*; \end{aligned}$$

здесь мы полагаем  $\binom{m-k-2}{-1} = 0$ . Чтобы завершить доказательство, остаётся воспользоваться предположением индукции. Для коэффициентов при  $\alpha_n^2$  и при  $\alpha_n^0$  мы сразу получаем требуемое. Для коэффициента при  $\alpha_n$  нужно заметить, что

$$\binom{m-k+i}{i} + \binom{m-k+i-1}{i-1} \equiv \binom{m-k+i-1}{i} \pmod{2},$$

поскольку  $\binom{m-k+i-1}{i-1} + \binom{m-k+i-1}{i} = \binom{m-k+i}{i}$ .

Второе решение. Для расслоения  $\gamma^1$  над  $\mathbb{R}P^\infty$  требуемая формула легко проверяется. Действительно,  $\omega_1(\gamma^1) = \alpha$  — образующая группы  $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ . Поэтому всё сводится к очевидному равенству  $\text{Sq}^1 \alpha = \alpha^2$ . Предположим, что требуемая формула верна для расслоения  $\xi$  и  $\omega_i = \omega_i(\xi)$ . Согласно формуле Уитни  $\omega_m(\xi \times \gamma^1) = \omega_m \times 1 + \omega_{m-1} \times \alpha$ . Согласно формуле Картана  $\text{Sq}(\omega_{m-1} \times \alpha) = (\text{Sq}^k \omega_{m-1}) \times \alpha + (\text{Sq}^{k-1} \omega_{m-1}) \times \alpha^2$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Sq}^k(\omega_m(\xi \times \gamma^1)) &= \\ &= \omega_k \omega_m \times 1 + \binom{m-k}{1} \omega_{k-1} \omega_{m+1} \times 1 + \dots + \binom{m-1}{k} \omega_0 \omega_{m+k} \times 1 + \\ &+ \omega_k \omega_{m-1} \times \alpha + \binom{m-k-1}{1} \omega_{k-1} \omega_m \times \alpha + \dots + \binom{m-2}{k} \omega_0 \omega_{m+k-1} \times \alpha + \\ &+ \omega_{k-1} \omega_{m-1} \times \alpha^2 + \binom{m-k}{1} \omega_{k-2} \omega_m \times \alpha^2 + \dots + \binom{m-2}{k-1} \omega_0 \omega_{m+k-2} \times \alpha^2. \end{aligned}$$

С другой стороны,  $\omega_i(\xi \times \gamma^1) \omega_j(\xi \times \gamma^1) = (\omega_i \times 1 + \omega_{i-1} \times \alpha)(\omega_j \times 1 + \omega_{j-1} \times \alpha) = \omega_i \omega_j \times 1 + (\omega_{i-1} \omega_j + \omega_i \omega_{j-1}) \times \alpha + \omega_{i-1} \omega_{j-1} \times \alpha^2$ . Теперь уже легко проверить, что требуемая формула верна для расслоения  $\xi \times \gamma^1$ . Для слагаемых вида  $\dots \times 1$  и  $\dots \times \alpha^2$  это видно непосредственно. Для слагаемых вида  $\dots \times \alpha$  нужно проверить, что по модулю 2 имеют место равенства  $1 + \binom{m-k}{1} = \binom{m-k-1}{1}$ ,  $\binom{m-k}{1} + \binom{m-k+1}{2} = \binom{m-k}{2}$  и т.д. Эти равенства следуют из равенств  $-1 + \binom{m-k}{1} = \binom{m-k-1}{1}$ ,  $-\binom{m-k}{1} + \binom{m-k+1}{2} = \binom{m-k}{2}$  и т.д., поскольку для остатков по модулю 2 знак несуществен.

Итак, требуемая формула верна для расслоения  $\gamma^1 \times \dots \times \gamma^1$ . Из этого следует, что она верна для расслоения  $\gamma^n$ , поскольку естественное отображение  $H^*(G(n, k); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$  — мономорфизм. Любое  $n$ -мерное расслоение  $\xi$  индуцировано расслоением  $\gamma^n$ , поэтому для  $\xi$  требуемая формула тоже верна.

**14.1.** Вырежем из конуса  $CY$  конус с вдвое меньшей боковой стороной. Тогда можно применить теорему о вырезании. После этого можно воспользоваться гомотопической инвариантностью сингулярных гомологий пары (см. теорему 3.3 на с. 25; для сингулярных гомологий доказательство в точности то же самое).

**14.2.** Запишем точную последовательность пары  $(X \cup CY, CY)$ :

$$H_i(CY) \longrightarrow H_i(X \cup CY) \longrightarrow H_i(X \cup CY, CY) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(CY).$$

Здесь  $H_i(CY) = \tilde{H}_{i-1}(CY) = 0$ , поскольку конус  $CY$  стягиваем. Значит,  $H_i(X \cup CY) \cong H_i(X \cup CY, CY)$  при  $i \geq 1$ . Остаётся воспользоваться задачей 14.1.

**14.3.** При  $i = 0$  утверждение очевидно, поэтому будем считать, что  $i \geq 1$ . Тогда  $H_i(X, Y) \cong H_i(X \cup CY)$  согласно задаче 14.2. А поскольку комплекс  $CY$  стягиваем,  $X \cup CY \sim (X \cup CY)/CY = X/Y$ .

**14.4.** Нет, не верно. Множество  $U \subset \mathbb{R}^n$ , заданное уравнением  $x_n = 0$ , замкнуто. Оно гомеоморфно множеству  $V \subset \mathbb{R}^n$ , заданному уравнением  $x_n = 0$  и неравенством  $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < 1$ . Это множество не является замкнутым.

**15.2.** Представим  $S^n$  как  $\partial\Delta^{n+1}$ , где  $\Delta^{n+1} = [v_0, v_1, \dots, v_{n+1}]$ , и рассмотрим множества  $\text{st } v_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n+1$ . На любые  $r \leq n+1$  вершин  $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$  натянут симплекс  $[v_{i_1}, \dots, v_{i_r}]$ . При этом  $\bigcup_{k=1}^r \text{st } v_{i_k}$  — звезда этого симплекса; она является стягиваемым множеством.

**16.1.** Группы когомологий многообразия  $V(2n+2, 2)$  вычислены в задаче 11.7. Запишем последовательность Гизина для расслоения  $V(2n+2, 2) \xrightarrow{S^1} G_+(2n+2, 2)$  и будем идти с конца. Последовательно получим  $H^{4n} = \mathbb{Z}$ ,  $H^{4n-1} = 0$ ,  $H^{4n-2} = \mathbb{Z}$ ,  $H^{4n-3} = 0, \dots, H^{2n+1} = 0$ ,  $H^{2n} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . После этого можно воспользоваться двойственностью Пуанкаре. В итоге получим, что для  $0 \leq k \leq 4n$  выполняется равенство

$$H^k(G_+(2n+2, 2)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } k \text{ чётно, } k \neq 2n; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{если } k = 2n; \\ 0, & \text{если } k \text{ нечётно.} \end{cases}$$

**16.2.** а) Согласно теореме Ву  $\omega_1 = v_1, \omega_2 = v_2 + \text{Sq } v_1, \dots, \omega_{k+1} = v_{k+1} + \text{Sq } v_k + \text{Sq } v_{k-1} + \dots$ . Поэтому если  $\omega_1 = \dots = \omega_k = 0$ , то  $v_1 = \dots = v_k = 0$  и  $v_{k+1} = \omega_{k+1}$ .

б) Если  $\omega_1 = \dots = \omega_k = 0$ , то  $v_1 = \dots = v_k = 0$ . А если  $n = 2k$  или  $2k+1$ , то  $v_i = 0$  при  $i > k$ . Поэтому  $\omega_i = 0$  при  $i > k$ .

**16.3.** Помимо размерностей 0 и  $4k$  многообразии  $M^{4k}$  имеет ненулевые гомологии и когомологии лишь в размерности  $2k$ ; кручения многообразии  $M^{4k}$  не имеет.

Класс Ву имеет единственную компоненту положительной размерности, а именно  $v_{2k}$ . При этом согласно задаче 16.2 имеем  $\omega_{2k} = v_{2k}$ . Ясно, что  $\langle \text{Sq } \alpha^{2k}, [M^{4k}] \rangle = \langle \alpha^{2k} \cup \alpha^{2k}, [M^{4k}] \rangle$  и  $\langle \alpha^{2k} \cup v, [M^{4k}] \rangle = \langle \alpha^{2k} \cup v_{2k}, [M^{4k}] \rangle$ . Поэтому класс  $v_{2k}$  полностью определяется равенством  $\alpha^{2k} \cup \alpha^{2k} = \alpha^{2k} \cup v_{2k}$  (для всех  $\alpha^{2k}$ ). В частности,  $v_{2k} = 0$  тогда и только тогда, когда  $\alpha^{2k} \cup \alpha^{2k} = 0$  для всех  $\alpha^{2k} \in H^{2k}(M^{4k}, \mathbb{Z}_2)$ .

Рассмотрим теперь класс когомологий  $\alpha^{2k}$  над  $\mathbb{Z}$ . Ему естественным образом можно сопоставить класс когомологий  $\alpha^{2k}$  над  $\mathbb{Z}_2$  (значение на каждой цепи приводится по модулю 2). Число  $\langle \alpha^{2k} \cup \alpha^{2k}, [M^{4k}] \rangle$  чётно тогда и только тогда, когда  $\alpha^{2k} \cup \alpha^{2k} = 0$ .

**16.4.** Как показывает доказательство теоремы 11.14, если  $n = 2^k$ , то  $\overline{w}(\mathbb{R}P^n) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1}$ , поэтому  $\overline{w}_{n-1}(\mathbb{R}P^n) \neq 0$ . С другой стороны, если многообразии  $M^n$  вложено в  $\mathbb{R}^{n+k}$ , то  $\overline{w}_k(M^n) = 0$ . Таким образом, если  $n = 2^k$ , то  $\mathbb{R}P^n$  нельзя вложить в  $\mathbb{R}^{2n-1}$ .

**20.1.** Пусть  $G = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$ . В качестве матрицы представления этого модуля можно взять диагональную матрицу  $A = \text{diag}(n_1, \dots, n_k)$ . Идеал  $\mathcal{E}_1$  порождён определителем этой матрицы, который равен  $n_1 \cdot \dots \cdot n_k = |G|$ .

**20.2.** Для рассматриваемого узла можно выбрать  $f_1$  и  $f_2$  точно так же, как на рис. 48. (Нужно только заменить самый нижний перекрёсток на этом рисунке на три перекрёстка, как теперь у нас.) Изменяется лишь коэффициент зацепления  $\text{lk}(f_2, f_2^+)$ ; теперь он равен 2. Поэтому  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  и полином Александера равен  $2(t^2 - 2t + 1) + t = 2t^2 - 3t + 2$ .

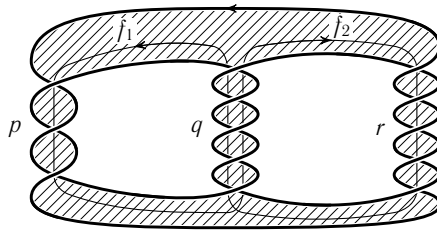


Рис. 87. Выбор  $f_1$  и  $f_2$

20.3. а) Выберем  $f_1$  и  $f_2$ , как показано на рис. 87. Несложно проверить, что тогда матрица Зейферта равна  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p+q & q+1 \\ q-1 & q+r \end{pmatrix}$ . Поэтому полином Александера равен

$$\frac{1}{4}((pq + qr + rp)(t^2 - 2t + 1) + t^2 + 2t + 1).$$

б) Если  $p = -3$ ,  $q = 5$  и  $r = 7$ , то  $pq + qr + rp = -1$ . Значит, в этом случае полином Александера равен  $t$ .

20.4. Диаграмму зацепления  $L_0 = L$  можно представить так, как показано на рис. 88. Тогда зацепления  $L_+$  и  $L_-$  изотопны, поэтому  $\nabla_{L_+} = \nabla_{L_-}$ , а значит,  $z\nabla_L = \nabla_{L_+} - \nabla_{L_-} = 0$ .

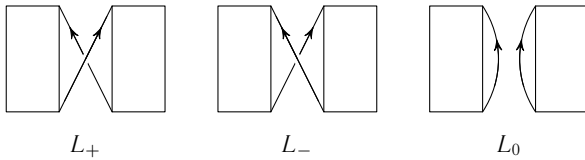


Рис. 88. Диаграммы трёх зацеплений

20.5. Легко проверить, что  $n(L_+) = n(L_-) = n(L_0) \pm 1$  (рис. 89). Поэтому если утверждение задачи верно для двух из трёх зацеплений  $L_+$ ,  $L_-$  и  $L_0$ , то оно верно и для третьего зацепления. Для тривиального  $m$ -компонентного зацепления утверждение верно (если  $m > 1$ , то полином Конвея нулевой), поэтому оно верно и для любого зацепления.

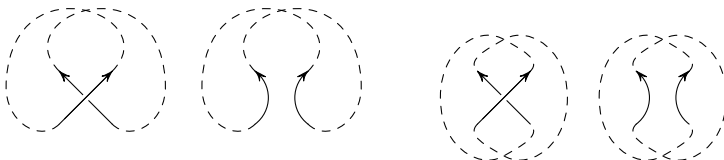


Рис. 89. Проверка равенства  $n(L_+) = n(L_-) = n(L_0) \pm 1$

**20.6.** Ясно, что  $a_0(L) = \nabla_L(0)$ , поэтому из соотношения  $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$  следует, что  $a_0(L_+) = a_0(L_-)$ . Меняя типы перекрёстков, любое зацепление можно превратить в тривиальное зацепление (с тем же самым числом компонент). Поэтому  $a_0(L) = a_0(L')$ , где  $L'$  — тривиальное зацепление, имеющее столько же компонент, сколько у  $L$ . Для тривиального узла  $a_0 = 1$ , а при  $m > 1$  для тривиального  $m$ -компонентного зацепления  $a_0 = 0$ .

**20.7.** Применим индукцию по  $n(L)$ . При  $n(L) = 1$  доказывать нечего. Ясно, что  $n(L_0) \geq n(L_{\pm}) - 1$ , поэтому согласно предположению индукции  $a_i(L_0) = 0$  при  $i < n(L_{\pm}) - 2$ . Следовательно,  $a_i(L_+) = a_i(L_-)$ , при  $i < n(L_{\pm}) - 1$ . Изменяя типы перекрёстков, любое зацепление можно превратить в тривиальное зацепление с тем же числом компонент. При таких изменениях мы не меняем  $a_i(L)$  при  $i < n(L) - 1$ , поэтому  $a_i(L) = 0$  при  $i < n(L) - 1$ .

**20.8.** Пусть  $L_+$  и  $L_-$  — двухкомпонентные зацепления, причём на выделенном перекрёстке присутствуют обе компоненты. Тогда  $L_0$  — узел, поэтому  $a_0(L_0) = 1$  согласно задаче 20.6 а). Следовательно,  $a_1(L_+) - a_1(L_-) = a_0(L_0) = 1$ . Ясно также, что  $\text{lk}(L_{1+}, L_{2+}) - \text{lk}(L_{1-}, L_{2-}) = 1$ . Меняя типы перекрёстков, любое двухкомпонентное зацепление можно превратить в двухкомпонентное зацепление с незацепленными компонентами. Для него равенство  $a_1(L) = \text{lk}(L_1, L_2)$  верно, поскольку в этом случае  $a_1(L) = 0$  и  $\text{lk}(L_1, L_2) = 0$ . Значит, это равенство верно для любого двухкомпонентного зацепления.

**20.9.** Из соотношения  $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$  следует, что  $a_2(L_+) - a_2(L_-) = a_1(L_0)$ . Если  $L_0$  — двухкомпонентное зацепление, то  $a_1(L_0) = \text{lk}(L_1, L_2)$  согласно задаче 20.8.

**22.1.** При доказательстве теоремы 22.5 было показано, что  $TM^n = N_*(TS^n)$ . Если расслоение  $TS^n$  тривиально, то любое расслоение, индуцированное из него, тоже тривиально.

**23.1.** а) Действие элемента  $w_i$  на  $U_a$  задаётся формулой

$$(u_0t_0, \dots, u_nt_n) \mapsto (u_0t_0, \dots, w_i u_i t_i, \dots, u_nt_n).$$

При таком действии  $i$ -я грань  $\partial_i e$ , которая задаётся уравнением  $t_i = 0$ , неподвижна. Поэтому  $(1 - w_i)\partial_i e = 0$ , а значит,

$$\partial \varepsilon = \prod (1 - w_i) \sum (-1)^i \partial_i e = 0.$$

б) Рассмотрим сначала случай  $n = 0$ . Пусть  $\omega = n_0 + n_1\omega_0 + \dots + n_{a_0}\omega^{a_0-1}$ , где  $n_0, \dots, n_{a_0}$  — целые числа. Тогда

$$\omega(1 - \omega_0) = (n_0 - n_{a_0}) + (n_1 - n_0)\omega_0 + \dots + (n_{a_0} - n_{a_0-1})\omega^{a_0-1},$$

поэтому элемент  $\omega$  лежит в ядре указанного отображения тогда и только тогда, когда  $n_0 = n_1 = \dots = n_{a_0-1} = n_{a_0}$ .

Рассмотрим теперь случай  $n = 1$ . Пусть снова  $\omega = n_0 + n_1\omega_0 + \dots + n_{a_0}\omega^{a_0-1}$ , но теперь  $n_i$  не целое число, а линейная комбинация элементов  $1, \omega_1, \dots, \omega_1^{a_1-1}$  с целыми коэффициентами. Пусть, далее,  $\omega' = \omega(1 - \omega_1) = n'_0 + n'_1\omega_0 + \dots + n'_{a_0}\omega^{a_0-1}$ , где  $n'_i = n_i - n_i\omega_1$ . Равенство  $\omega'(1 - \omega_0) = 0$  снова эквивалентно тому, что  $n'_0 = n'_1 = \dots = n'_{a_0}$ , т. е.

$$\omega(1 - \omega_1) = n'(1 + \omega_0 + \omega_0^2 + \dots + \omega_0^{a_0-1}).$$

Значит,  $w = a(1 + \omega_0 + \omega_0^2 + \dots + \omega_0^{a_0-1}) + b$ , где  $b(1 - \omega_1) = 0$ , т.е.  $b = c(1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \dots + \omega_1^{a_1-1})$ . Дальнейшие рассуждения аналогичны.

в) Симплициальный комплекс  $U_a$  не имеет клеток размерности  $n + 1$ , поэтому его  $n$ -мерные гомологии  $U_a$  совпадают с  $n$ -мерными циклами. Значит, в  $H_n(U_a)$  есть подгруппа  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_a]\varepsilon \cong \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_a]/I_a$ . Указанные в условии задачи элементы как раз и образуют базис этой подгруппы. Ясно, что её ранг равен  $(a_0 - 1) \dots (a_n - 1)$ , т.е. он совпадает с рангом всей группы  $H_n(U_a)$ . Поэтому  $H_n(U_a) \cong \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_a]\varepsilon$ .

**24.2.** Пусть  $x$  — произвольный элемент группы  $G$ . Согласно следствию 2 теоремы 24.11 мы имеем  $x = \exp A$  для некоторой матрицы  $A$ . Положим  $g = \exp\left(\frac{1}{n}A\right)$ . Тогда  $g^n = x$ .



## Литература

- [А] Адамс Дж. Лекции по группам Ли. М.: Наука, 1979.
- [Б1] Ботт Р., Ту Л. В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. М.: Наука, 1989.
- [Б2] Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.
- [Ва] Васильев В. А. Введение в топологию. М.: Фазис, 1997.
- [Ви] Вик Дж. У. Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию. М.: МЦНМО, 2005.
- [Г1] Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961.
- [Г2] Гомотопическая теория дифференциальных форм: Сборник статей. М.: Мир, 1981. (Математика. Новое в зарубежной науке; Вып. 25).
- [Г3] Гриффитс Ф. А., Морган Д. В. Рациональная теория гомотопий и дифференциальные формы. М.: Наука, 1990.
- [Ка] Кан Д., Уайтхед Дж. О реализуемости групп сингулярных когомологий // Математика. 1963. Т. 7, № 2. С. 27—28.
- [Ко1] Колмогоров А. Н. Über die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie // Матем. сб. 1936. Т. 1. С. 97—102.
- [Ко2] Колмогоров А. Н. Homologierung des Komplexes und des local-bikompakten Räumes // Матем. сб. 1936. Т. 1. С. 701—705.
- [Кр] Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. М.: Мир, 1967.
- [Ма] Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966.
- [Ми1] Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
- [Ми2] Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. М.: Мир, 1979.
- [Мо] Мошер Р., Тангора М. Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий. М.: Мир, 1970.
- [П1] Прасолов В. В. Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995.
- [П2] Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.
- [П3] Прасолов В. В., Сосинский А. Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.
- [П4] Прасолов В. В. Поверхность Зейферта // Матем. просв. Третья серия, вып. 3. М.: МЦНМО, 1999. С. 116—126.

- [П5] П р а с о л о в В. В., С к о п е н к о в М. Б. Рамсеевская теория узлов и зацеплений // Матем. просв. Третья серия, вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 108—115.
- [Р] Р о х л и н В. А. Гомотопические группы // УМН. 1946. Т. 1, вып. 5—6. С. 175—223.
- [Се1] С е р р Ж. - П. Сингулярные гомологии расслоенных пространств // Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958. С. 9—114.
- [Се2] С е р р Ж. - П. Гомотопические группы и классы абелевых групп // Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958. С. 124—162.
- [Св] С в и т ц е р Р. М. Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии. М.: Наука, 1985.
- [Сп] С п е н ь е р Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
- [Ст1] С т и н р о д Н. Топология косых произведений. М.: ИЛ, 1953.
- [Ст2] С т и н р о д Н., Э й л е н б е р г С. Основания алгебраической топологии. М.: ГИФМЛ, 1958.
- [Ст3] С т и н р о д Н., Э п ш т е й н Д. Когомологические операции. М.: Наука, 1983.
- [Ст4] С т о н г Р. Заметки по теории кобордизмов. М.: Мир, 1973.
- [Уи] У и т н и Х. Геометрическая теория интегрирования. М.: ИЛ, 1960.
- [Уэ] У э л л с Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976.
- [Ф1] Ф а м Ф. Обобщённые формулы Пикара—Лефшеца и ветвление интегралов // Математика. 1969. Т. 13, № 4. С. 61—93.
- [Ф2] Ф о м е н к о А. Т., Ф у к с Д. Б. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
- [Х1] Х и р ц е б р у х Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. М.: Мир, 1973.
- [Х2] Х у С ы - ц з я н. Теория гомотопий. М.: Мир, 1964.
- [Х3] Х ь ю з м о л л е р Д. Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.
- [Чж] Ч ж е н ь Ш э н - Ш е н ь. Комплексные многообразия. М.: ИЛ, 1961.
- [Ad] A d a c h i M. Embeddings and immersions. Amer. Math. Soc., 1993.
- [Ak] A k h m e t i e v P. M., R e p o v š D., S k o p e n k o v A. B. Embedding products of low-dimensional manifolds into  $\mathbb{R}^n$  // Topology Appl. 2001. V. 113. P. 7—12.
- [Al1] A l e x a n d e r J. W. A proof of the invariance of certain constants of analysis situs // Trans. Amer. Math. Soc. 1915. V. 16. P. 148—154.
- [Al2] A l e x a n d e r J. W. A proof and extension of the Jordan—Brouwer separation theorem // Trans. Amer. Math. Soc. 1922. V. 23. P. 333—349.
- [Al3] A l e x a n d e r J. W. On the connectivity ring of an abstract space // Ann. Math. 1936. V. 37. P. 419—421.
- [Ap] A p é r y F. La surface de Boy // Advan. Math. 1986. V. 61. P. 185—266.
- [Ar] A r f C. Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2 // J. Reine Angew. Math. 1941. V. 183. P. 148—167.

- [Az] Aznar V. N. On the Chern classes and the Euler characteristic for non-singular complete intersections // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 78. P. 143—148.
- [Ba] Barrat M. G., Milnor J. An example of anomalous of singular homology // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 293—297.
- [Br1] Brouwer L. E. J. Sur le théorème de M. Jordan dans l'espace à  $n$  dimensions // C. R. Acad. Sci. Paris. 1911. V. 153. P. 542—544.
- [Br2] Brouwer L. E. J. On looping coefficients // Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. 1912. V. 15. P. 113—122.
- [Br3] Brouwer L. E. J. Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten // Math. Ann. 1912. V. 71. P. 97—115.
- [Br4] Brouwer L. E. J., Beweis des Invarianz des  $n$ -dimensionalen Gebietes // Math. Ann. 1912. V. 71. P. 305—313; 1912. V. 72. P. 55—56.
- [Br5] Brouwer L. E. J. Beweis des Jordanschen Satzes für den  $n$ -dimensionalen Raum // Math. Ann. 1912. V. 71. P. 314—319.
- [Br6] Brouwer L. E. J. Über Jordansche Mannigfaltigkeiten // Math. Ann. 1912. V. 71. P. 320—327.
- [Br7] Brown R. Locally flat embeddings of topological manifolds // Ann. Math. 1962. V. 75. P. 331—341.
- [Če] Čech E. Multiplication on a complex // Ann. Math. 1936. V. 37. P. 681—697.
- [Ch] Chen B. - Y., Ogiue K. Some implications of the Euler—Poincaré characteristic for complete intersection manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 44. P. 1—8.
- [Co1] Connelly R. A new proof of Brown's collaring theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 27. P. 180—182.
- [Co2] Conway J. H. An enumeration of knots and links, and some of their properties // Computational problems in abstract algebra. NY: Pergamon Press, 1970. P. 229—244.
- [Co3] Conway J. H., Gordon C. McA. Knots and links in spatial graphs // J. Graph Theory. 1983. V. 7. P. 445—453.
- [Cu] Curtis M. L., Dugundji J. A proof of de Rham's theorem // Fund. Math. 1970. V. 68. P. 265—268.
- [De] Debrunner H. E. Helly type theorems derived from basic singular homology // Amer. Math. Monthly. 1970. V. 77. P. 375—380.
- [Do] Dold A. A simple proof of the Jordan—Alexander complement theorem // Amer. Math. Monthly. 1993. V. 100. P. 856—857.
- [Ei1] Eilenberg S. Cohomology and continuous mappings // Ann. Math. 1940. V. 41. P. 231—251.
- [Ei2] Eilenberg S., MacLane S. Relations between homology and homotopy groups of spaces, I, II. Ann. Math. 1945. V. 46. P. 480—509; 1950. V. 51. P. 514—533.
- [Ei3] Eilenberg S., MacLane S. Acyclic models // Amer. J. Math. 1953. V. 75. P. 189—199.

- [Ei4] Eilenberg S., Mac Lane S. On the groups  $H(\pi, n)$ , I, II, III // Ann. Math. 1953. V. 58. P. 55—106; 1954. V. 60. P. 49—139, 513—557.
- [Ei5] Eilenberg S., Zilber J. A. On products of complexes // Amer. J. Math. 1953. V. 75. P. 200—204.
- [Fl] Floyd E. E. On periodic maps and the Euler characteristics of associated spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. P. 138—147.
- [Fo1] Fox R. H. Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring // Ann. Math. 1953. V. 57. P. 547—560.
- [Fo2] Fox R. H. Free differential calculus, II // Ann. Math. 1954. V. 59. P. 196—210.
- [Gr1] Greenberg M. Lectures on algebraic topology. NY: W. A. Benjamin, Inc., 1967.
- [Gr2] Greub W., Halperin S., Vanstone R. Connections, curvature, and cohomology. V. I. De Rham cohomology of manifolds and vector bundles. NY: Academic Press, 1972.
- [Gr3] Greub W., Halperin S., Vanstone R. Connections, curvature, and cohomology. V. II. Lie groups, principal bundles, and characteristic classes. NY: Academic Press, 1973.
- [Gr4] Gromov M. Volume and bounded cohomology // Publ. Math. IHES. 1982. V. 56. P. 5—100.
- [Gy] Gysin W. Zur Homologie Theorie des Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten // Comm. Math. Helv. 1941 V. 14. P. 61—121.
- [Ha] Hatcher A. Algebraic topology. Cambridge Univ. Press, 2002.
- [He1] Helly E. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten // Jber. Deutsch. Math. Verein. 1923. V. 32. P. 175—176.
- [He2] Helly E. Über Systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten // Monatsh. Math. und Physik. 1930. V. 37. P. 281—302.
- [Hi1] Hilton P. J., Stammbach U. A course in homological algebra. NY et al: Springer, 1971.
- [Hi2] Hirzebruch F. Division algebras and topology // Numbers / Ebbinghaus H.-D. et al. NY: Springer, 1991. P. 281—302.
- [Hi3] Hirzebruch F., Mayer K. H.  $O(n)$ -Mannigfaltigkeiten, exotische Sphäre und Singularitäten. Springer, 1968. (Lecture Notes in Math.; V. 57).
- [Ho1] Hopf H. Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen // Math. Ann. 1926. V. 95. P. 340—367.
- [Ho2] Hopf H. Vektorfelder in  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit // Math. Ann. 1927. V. 96. P. 225—250.
- [Ho3] Hopf H. A new proof of Lefschetz formula on invariant points // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1928. V. 14. P. 149—153.
- [Ho4] Hopf H. Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche // Math. Ann. 1931. V. 104. P. 639—665.
- [Ho5] Hopf H. Die Klassen der Abbildungen der  $n$ -dimensionalen Polyeder auf die  $n$ -dimensionalen Sphäre // Comment. Math. Helv. 1933. V. 5. P. 39—54.
- [Ho6] Hopf H. Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedriger Dimensionen // Fund. Math. 1935. V. 25. P. 427—440.

- [Ho7] Hopf H. Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und Ihre Verallgemeinerungen // *Ann. Math.* 1940. V. 13. P. 22—52.
- [Ho8] Hopf H. Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra // *Comment. Math. Helv.* 1941. V. 13. P. 219—239.
- [Hu] Hurewicz W. Homotopie- und Homologiegruppen // *Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam.* 1935. V. 38. P. 521—528.
- [Ka1] Kane R.M. The homology of Hopf spaces. Amsterdam: North-Holland, 1988.
- [Ka2] Kauffman L.H. The Conway polynomial // *Topology.* 1981. V. 20. P. 101—108.
- [Ke1] Kervaire M.A., Milnor J.W. On 2-spheres in 4-manifolds // *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 1961. V. 47. P. 1651—1657.
- [Ke2] Kervaire M.A., Milnor J.W. Groups of homotopy spheres, I // *Ann. Math.* 1963. V. 77. P. 504—537.
- [Ku1] Künneth H. Über die Bettische Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit // *Math. Ann.* 1923. V. 90. P. 65—85.
- [Ku2] Künneth H. Über die Torsionzahlen von Produktmannigfaltigkeiten // *Math. Ann.* 1924. V. 91. P. 125—134.
- [La] Lai H.-F. On the topology of the even-dimensional complex quadrics // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1974. V. 46. P. 419—425.
- [Le1] Lefschetz S. Intersections and transformations of complexes and manifolds // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1926. V. 28. P. 1—49.
- [Le2] Lefschetz S. *Topology.* NY, 1930.
- [Le3] Levine J. An algebraic classification of some knots of codimension two // *Comment. Math. Helv.* 1970. V. 45. P. 185—198.
- [Li1] Libgober A. Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiple planes // *Duke Math. J.* 1982. V. 49. P. 833—851.
- [Li2] Lickorish W.B. *An introduction to knot theory.* Springer, 1997.
- [Ma1] Malm D.G. A note on exact sequences // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1963. V. 14. P. 637—639.
- [Ma2] Mayer W. Über abstrakte Topologie // *Monatsh. Math. und Physik.* 1929. V. 36. P. 1—42, 219—258.
- [Me] Meyerson M.D. Representing homology classes of closed orientable surfaces // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1976. V. 61. P. 181—182.
- [Mi1] Milnor J.W. Construction of universal bundles, II // *Ann. Math.* 1956. V. 63. P. 430—436.
- [Mi2] Milnor J.W. On the immersions of  $n$ -manifolds in  $(n + 1)$ -space // *Comment. Math. Helv.* 1956. V. 30. P. 275—284.
- [Mi3] Milnor J.W. On simply connected 4-manifolds // *Symposium internacional de topologia algebraica. México, 1958.* P. 122—128.
- [Mi4] Milnor J.W. A procedure for killing the homotopy groups of differentiable manifolds // *Proc. Sympos. Pure Math.* V. III. Amer. Math. Soc., 1961. P. 39—55.
- [Mi5] Milnor J.W. Microbundles. I // *Topology.* 1964. V. 3 suppl. 1. P. 53—81.

- [Mi6] M i m u r a M., T o d a H. Topology of Lie groups. Amer. Math. Soc., 1991.
- [Mu1] M u n k h o l m H. J. Simplices of maximal volume in hyperbolic space, Gromov's norm, and Gromov's proof of Mostow's rigidity theorem (following Thurston) // Topology Symposium (Siegen, 1979). Berlin: Springer, 1980. (Lecture Notes in Math.; V. 788). P. 109—124.
- [Mu2] M u n k r e s J. R. Elements of algebraic topology. Addison-Wesley, 1984.
- [N] N o e t h e r E. Ableitung der Elementarteilerttheorie aus der Gruppentheorie // Jahresbericht Deutschen Math. Verein. 1926. V. 34. P. 104.
- [Ol] O l u m P. Non-abelian cohomology and van Kampen's theorem // Ann. Math. 1958. V. 68. P. 658—668.
- [Pa] P a e c h t e r G. F. On the groups  $\pi_r(V_{mn})$ . I, II, III, IV, V // Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2. 1956. V. 7, № 28. P. 249—265; 1958. V. 9, № 33. P. 8—27; 1959. V. 10, № 37. P. 17—37; 1959. V. 10, № 40. P. 241—260; 1960. V. 11, № 41. P. 1—16.
- [Pe] P e i t g e n H. O. On the Lefschetz number for iterates of continuous mappings // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 54. P. 441—444.
- [Pi] P i t c h e r E. Inequalities of critical point theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1958. V. 64. P. 1—30.
- [Po] P o l o m b o A. Classes de Chern // Astérisque. 1978. V. 58. P. 51—75.
- [Rh] D e R h a m G. Sur l'analyse situs des variétés à  $n$  dimensions // J. Math. Pures et Appl., Ser. 9. 1931. V. 10. P. 115—120.
- [Ro1] R o b e r t s o n S. A. On transnormal manifolds // Topology. 1967. V. 6. P. 117—123.
- [Ro2] R o t m a n J. J. An introduction to algebraic topology. Springer, 1988.
- [Sa1] S a m e l s o n H. On Poincaré duality // J. Anal. Math. 1965. V. 14. P. 323—336.
- [Sa2] S a m e l s o n H. On de Rham's theorem // Topology. 1967. V. 6. P. 427—432.
- [Sc] S c h ö n R. Acyclic models and excision // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 59. P. 167—168.
- [Se] S e r r e J. - P. Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eulenberg—MacLane // Comment. Math. Helv. 1953. V. 27. P. 198—232.
- [Sh1] S h a p i r o D. B. Composition of quadratic forms. Berlin, NY: Walter de Gruyter, 2000.
- [Sh2] S h i h M. - H. A combinatorial Lefschetz fixed-point formula // J. Combin. Theory Ser. A. 1992. V. 61. P. 123—129.
- [Si] S i n g e r I., T h o r p e J. Lecture notes on elementary topology and geometry. Glenview: Scott, Foresman and Co., 1967.
- [Sm] S m i t h P. A. Transformations of finite period, I // Ann. Math. 1938. V. 39. P. 127—164.
- [St1] S t a p l e s E. B. A short and elementary proof that a product of spheres is parallelizable if one of them is odd // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. V. 18. P. 570—571.
- [St2] S t e e n r o d N. E. Products of cocycles and extension of mappings // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 290—320.

- [St3] Steenrod N. E. Cohomology invariants of mappings // *Ann. Math.* 1949. V. 50. P. 954—988.
- [St4] Steenrod N. E. Homology groups of symmetric groups and reduced power operations // *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 1953. V. 39. P. 213—223.
- [St5] Steenrod N. E. Cohomology operation derived from symmetric group // *Comm. Math. Helv.* 1957. V. 31. P. 195—218.
- [St6] Stiefel E. Richtungsfelder und Fernparallelismus in Mannigfaltigkeit // *Comm. Math. Helv.* 1936. V. 8. P. 3—51.
- [St7] Stiefel E. Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen // *Comm. Math. Helv.* 1941. V. 13. P. 201—218.
- [Su] Sullivan D. Infinitesimal computations in topology // *Publ. Math. IHES.* 1977. V. 47. P. 269—332.
- [Th1] Thom R. Espaces fibrés en spheres et carrés de Steenrod // *Ann. Sci. École Norm. Super.* 1952. V. 69. P. 109—181.
- [Th2] Thom R. Les classes caractéristiques de Pontryagin des variétés triangulées // *Symposium internacional de topologia algebraica. México, 1958.* P. 54—67.
- [Th3] Thurston W. The geometry and topology of 3-manifolds. Princeton, 1978.
- [Vi2] Vietoris L. Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe // *Monatshefte für Math. und Physik.* 1930 V. 37. P. 159—162.
- [Wa1] Wadler Ph. L. On pairs of nonintersecting faces of cell complexes // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1975. V. 51. P. 438—440.
- [Wa2] Wang H. C. The homology groups of the fibre-bundles over a sphere // *Duke Math. J.* 1949. V. 16. P. 33—38.
- [We1] Weibel Ch. A. History of homological algebra // *History of topology / James I. M., ed. Amsterdam: Elsevier, 1999.* P. 797—836.
- [We2] Weil A. Sur les theorems de de Rham // *Comment. Math. Helv.* 1952. V. 26. P. 119—145.
- [We3] Weinberger Sh. Oliver's formula and Minkowski's theorem // *Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J., 1983).* Berlin: Springer, 1985. (Lecture Notes in Math.; V. 1126). P. 420—421.
- [Wh2] Whitney H. Sphere spaces // *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 1935. V. 21. P. 462—468.
- [Wh3] Whitney H. The maps of an  $n$ -complex into an  $n$ -sphere // *Duke Math. J.* 1937. V. 3. P. 51—55.
- [Wh4] Whitney H. On products in a complex // *Ann. Math.* 1938. V. 39. P. 397—432.
- [Wh5] Whitney H. The self-intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space // *Ann. Math.* 1944. V. 45. P. 220—246.
- [Wh6] Whitney H. The self-intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $(2n + 1)$ -space // *Ann. Math.* 1944. V. 45. P. 247—293.
- [Wu] Wu Wen - Tsün. Classes caractéristiques et  $i$ -carrés d'une variété // *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1950. V. 230. P. 508—511.

## Предметный указатель

5-лемма Стиррода 25  
сар-произведение 81  
сар-произведения естественность 82  
сир-произведение 70, 73  
сир-произведения косокоммутативность 74  
 $G$ -комплекс регулярный 190  
— симплициальный 190  
 $G$ -пространство 189  
 $H$ -пространство 392  
 $r$ -транснаормальное вложение 67  
 $S$ -эквивалентные матрицы 336

### А

абелева группа свободная 13  
аксиома вырезания 217, 221, 222  
— — некоммутативная 242  
— гомотопии 221  
— размерности 221, 222  
— точности 221  
аксиоматический подход к классам Штифеля—Уитни 174  
аксиомы Стиррода—Эйленберга 220, 221  
алгебра Ли 377  
— Хопфа 395  
— — связная 395  
алгебраически тривиальное отображение 132  
алгебры Ли когомологии 382  
Александера двойственность 92  
— идеал 331  
— полином 331

— — в нормализации Конвея 337  
— теорема 222  
Александера—Понтрягина двойственность 291  
Александера—Уитни диагональная аппроксимация 116, 232  
аппроксимация диагональная 116, 232  
Арфа инвариант зацепления 353  
— — квадратичной формы 350  
— — узла 352  
— теорема 351  
ассоциированный пучок 285  
аугментация 16, 27  
ациклические модели 115  
ациклический симплициальный комплекс 15  
— функтор 114

### Б

базис модуля 328  
— свободной абелевой группы 13  
— симплектический 350  
бесконечное циклическое накрытие 326  
бесконечномерное линзовое пространство 135  
Бетти числа 12  
биинвариантная форма 381  
билинейное отображение абелевых групп 37  
— — невырожденное 120



Бокштейна гомоморфизм 24, 102, 155

Борромео кольца 96

— — многомерные 97

Борсука—Улама теорема 87

## В

векторного расслоения проективизация 183

векторное поле левоинвариантное 379

— расслоение 143

— — гладкое 143

— — каноническое 168

— — комплексное 177

— — тривиальное 144

векторные поля гомотопные 145

— расслоения изоморфные 144

— — стабильно эквивалентные 162

— — эквивалентные 144

вложение  $r$ -транснаормальное 67

— транснаормальное 66

внешнее когомологическое умножение 117

воротник 89, 266

Ву класс 279

— теорема 279

— формула 211

вырезания аксиома 217, 221, 222

— изоморфизм 22

## Г

Гизина последовательность 277

гиперболическое многообразие 240

гладкая дифференциальная форма на комплексе 318

— — — на симплексе 318

— триангуляция 311

гладкое векторное расслоение 143

гомеоморфизм послойный 144

гомологии клеточные 48, 227

— относительные 21

— приведённые 27

— с замкнутыми носителями 59

— с локальными коэффициентами 149

— симплициальные 12

— сингулярные 213

гомологий группы цепного комплекса 13

гомологическая последовательность пары 22

— — тройки 24

— сфера 56, 91, 200

гомологические группы Смита 198

гомологический диск 200

— класс примитивный 60

гомологичные циклы 11

гомоморфизм Бокштейна 24, 102, 155

— граничный 11

— Гуревича 123

— ограничения 283

— предпучков 283

— связывающий 22, 24

гомотопии аксиома 221

гомотопия цепная 14, 213

гомотопные векторные поля 145

— тривиализации расслоения 145

граница 11

— симплекса 10

граничный гомоморфизм 11

Грассмана многообразие бесконечное 168

Громова норма 239

группа делимая 42

— кос 134

— коэффициентов 221, 222

— крашенных кос 134

— Ли 377

— периодическая 42

групповое кольцо 197, 342

группы гомологий цепного комплекса 13

— когомологий 32

— — относительные 33

— — приведённые 33

— Смита гомологические 198

Гуревича гомоморфизм 123

— теорема 124

## Д

двойная точка 358

двойственное расслоение 186

двойственность Александра 92

— Александра—Понтрягина 291

— Пуанкаре 55

де Рама когомологии 298

— теорема симплициальная 322

действие свободное 200

— симплициальное 189

— эффективное 194

делимая группа 42

Дена скручивание 61

диагональная аппроксимация 116,  
201, 232

— — Александра—Уитни 116, 232

диск гомологический 200

дифференциальная форма гладкая  
318

— — замкнутая 298

— — полиномиальная 318

— — точная 298

допустимое множество 250

дуальный класс Штифеля—Уитни  
164

## Е

естественное преобразование 114

естественность сар-произведения 82

— классов Штифеля—Уитни 160

## З

замкнутая форма 298

зацепления коэффициент 57, 94

Зейферта матрица 326

— поверхность 327

— узел 332

— форма 326

## И

идеал Александра 331

— элементарный 329

изоморфизм вырезания 22

— Лефшеца 91

— — для топологических многооб-  
разий 270

— надстройки 29, 218

— Пуанкаре 54

— — для когомологий де Рама 306

— — для топологических многооб-  
разий 263

— — с локальными коэффициента-  
ми 151

— расслоений со структурной груп-  
пой 293

— Тома 257

изоморфные векторные расслоения  
144

инвариант Арфа зацепления 353

— — квадратичной формы 350

— — узла 352

— Хопфа 237

инвариантность края 223

— области 223

индекс пересечения 53

— самопересечения 359, 360

индуцированное расслоение 145

интеграл формы по многообразию  
301

инъективная резольвента 42

исчисление Фокса 340

## К

Кана—Уайтхеда теорема 141

каноническое векторное расслоение  
168

— отображение 18

Картана формула 206

касательное микрорасслоение 275

категория 114

— с моделями 114

квадратичная форма над  $\mathbb{Z}_2$  350

— — невырожденная 350

квадраты Стиррода 205

класс Ву 279

— Тома 257, 275

— фундаментальный 46

— характеристический Чженя 178

— Чжэня комплексного многообразия 187  
 — Штифеля—Уитни многообразия 164  
 — эйлеров 158  
 классов Штифеля—Уитни естественность 160  
 классы Понтрягина характеристические 188  
 клеточные гомологии 48, 227  
 ковариантный функтор 114  
 когомологии алгебры Ли 382  
 — де Рама 298  
 — некоммутативные 240, 294  
 — с компактными носителями 59  
 — с локальными коэффициентами 149  
 — сингулярные 219  
 — Чеха 287, 288  
 когомологий группы 32  
 — — относительные 33  
 когомологическая операция 139  
 когомологический класс фундаментальный 137  
 когомологическое умножение внешнее 117  
 кограница 32  
 кограницы формула 203  
 кограничный гомоморфизм 287  
 Колмогорова—Александера умножение 70  
 колпак шутовской 126  
 кольца Борромео 96  
 кольцо групповое 197, 342  
 коммутант 123  
 коммутатор 379  
 — векторных полей 297  
 комплекс цепной 13  
 комплексификация 188  
 комплексное векторное расслоение 177  
 — многообразии Штифеля 178  
 Конвея полином 339  
 конечно порождённый модуль 328

контравариантный функтор 114  
 корни 389  
 кос группа 134  
 — крашенных группа 134  
 косокоммутативность сур-произведения 74  
 коумножение 394  
 кофинальное множество 286  
 коцепи с компактными носителями 59  
 коцепь 31, 287  
 — относительная 33  
 — различающая 128  
 коцикл 32  
 — некоммутативный 240  
 коциклы когомологические некоммутативные 240  
 коэффициент зацепления 57, 94  
 коэффициентов группа 221, 222  
 коядро 24  
 крашенных кос группа 134  
 края инвариантность 223  
 кручение 55  
 Кюннета теорема 110  
 — — для относительных гомологий 234  
 — — для сингулярных гомологий 231  
 — — относительная 234

## Л

левоинвариантная форма 381  
 левоинвариантное векторное поле 379  
 лемма о продолжении 319  
 — Пуанкаре 304  
 Лере—Хирша теорема 183  
 Лефшеца изоморфизм 91  
 — — для топологических многообразий 270  
 — теорема 67  
 — число 67  
 Ли алгебра 377  
 — группа 377

линейное расслоение, ассоциированное с дивизором 371  
линза 103  
линзовое пространство бесконечномерное 135  
локальная система групп 148

**М**

Майера—Вьеториса последовательность 28, 217  
— — для когомологий де Рама 299  
— — — с компактными носителями 300  
— — относительная 30, 219  
максимальный тор 384  
Масси тройное произведение 95  
матрица Зейферта 326  
— представления 328  
микрорасслоение 274  
— касательное 275  
микрорасслоения эквивалентные 275  
Милнора теорема 370  
Минковского теорема 194  
многомерные кольца Борромео 97  
многообразии гиперболическое 240  
— Грассмана бесконечное 168  
— параллелизуемое 145, 280, 370  
— почти параллелизуемое 155  
— стабильно параллелизуемое 171  
— топологическое с краем ориентируемое 268  
— Штифеля 153  
— — комплексное 178  
— Шуберта 172  
многообразий связная сумма 368  
многообразия сигнатура 119  
множество допустимое 250  
— кофинальное 286  
— направленное 284  
модели 114  
— ациклические 115  
модуль конечно порождённый 328  
— свободный 327  
модуля базис 328  
Морса неравенства 228

морфизм 114  
Мура пространство 140

**Н**

надстройки изоморфизм 29, 218  
накрытие бесконечное циклическое 326  
направленная система абелевых групп 284  
направленное множество 284  
невырожденная квадратичная форма над  $\mathbb{Z}_2$  350  
невырожденное билинейное отображение 120  
некоммутативная аксиома вырезания 242  
— последовательность Майера—Вьеториса 242  
некоммутативные когомологии 240, 294  
— коциклы когомологичные 240  
некоммутативный коцикл 240  
неориентируемое расслоение 157  
неотрицательный цепной комплекс 13  
неравенства Морса 228  
норма Громова 239  
нормализатор 384  
нормальная степень погружения 368  
носитель цепи 16  
нулевое сечение 144

**О**

области инвариантность 223  
обобщённая теория (ко)гомологий 222  
образующая топологическая 384  
объект категории 114  
объём симплициальный 239  
ограничения гомоморфизм 283  
операция когомологическая 139  
ориентационная система групп 149  
ориентация топологического многообразия 250  
— — — с краем 268

- ориентированное топологическое многообразие 251  
 ориентируемое расслоение 157  
 — топологическое многообразие 251  
 — — — с краем 268  
 относительная коцепь 33  
 — последовательность Майера—Вьеториса 30, 219  
 — теорема Кюннета 234  
 — цепь 21  
 относительные гомологии 21  
 — группы когомологий 33  
 отображение алгебраически тривиальное 132  
 — расщепляющее 182  
 — цепное 13  
 — эквивариантное 189
- П**
- параллелизуемое многообразие 145, 280, 370  
 пары эйлера характеристика 66, 198  
 пересечение полное 373  
 пересечения индекс 53  
 — форма 99, 280  
 перехода функция 292  
 периодическая группа 42  
 поверхность Зейферта 327  
 погружение регулярное 358  
 погружения нормальная степень 368  
 полином Александра 331  
 — — в нормализации Конвея 337  
 — Конвея 339  
 полиномиальная дифференциальная форма на комплексе 318  
 — — — на симплексе 318  
 полное пересечение 373  
 полный класс Штифеля—Уитни 163  
 Понತ್ರягина классы характеристические 188  
 — теорема 167  
 последовательность Гизина 277  
 — Майера—Вьеториса 28, 217  
 — — для когомологий де Рама 299  
 — — — — с компактными носителями 300  
 — — некоммутативная 242  
 — — относительная 30, 219  
 — пары точная 22  
 — Смита точная 198  
 послыйный гомеоморфизм 144  
 постоянный предпучок 283  
 почти параллелизуемое многообразие 155  
 правоинвариантная форма 381  
 предел прямой 285  
 предпучков гомоморфизм 283  
 предпучок 283  
 — постоянный 283  
 представления матрица 328  
 преобразование естественное 114  
 преобразования Титце 347  
 препятствие 127  
 препятствия к продолжению сечений 151  
 приведённые гомологии 27  
 — группы когомологий 33  
 приклеивание ручки 334  
 примитивный гомологический класс 60  
 проективизация векторного расслоения 183  
 проективная резольвента 42  
 произведение прямое абелевых групп 31  
 — тензорное абелевых групп 36  
 пространство Мура 140  
 — типа  $K(\pi, n)$  134  
 — Эйленберга—Маклейна 134  
 прямая сумма абелевых групп 31  
 прямое произведение абелевых групп 31  
 — — векторных расслоений 146  
 прямой предел 285  
 Пуанкаре двойственность 55  
 — изоморфизм 54  
 — — для когомологий де Рама 306

- — для топологических многообразий 263
- — с локальными коэффициентами 151
- лемма 304
- теорема 123
- пучок 284
- , ассоциированный с предпучком 285
- , порождённый предпучком 285

**Р**

- разбиение числа 173
- различающая кощепь 128
- размерности аксиома 221, 222
- ранг группы Ли 387
- расслоение, ассоциированное с дивизором 371
- векторное 143
- — гладкое 143
- двойственное 186
- индуцированное 145
- неориентируемое 157
- ориентируемое 157
- со структурной группой 292
- сопряжённое 186
- Хопфа 237
- расслоения векторные изоморфные 144
- — стабильно эквивалентные 162
- — эквивалентные 144
- расщепимая точная последовательность 34
- расщепляющее отображение 182
- регулярное погружение 358
- регулярный  $G$ -комплекс 190
- элемент 387
- резольвента инъективная 42
- проективная 42
- свободная абелевой группы 38
- росток 285
- ручки приклеивание 334

**С**

- самопересечения индекс 359, 360

- точка 358
- свободная абелева группа 13
- резольвента абелевой группы 38
- свободное действие 200
- дифференциальное исчисление 340
- свободный модуль 327
- функтор 114
- цепной комплекс 13
- связная алгебра Хопфа 395
- сумма многообразий 368
- связывающий гомоморфизм 22, 24
- сечение 285
- нулевое 144
- расслоения 144
- сигнатура 101
- многообразия 100, 119
- , теорема Тома 101
- сильная теорема Уитни о вложениях 358
- симплекс сингулярный 212
- симплекса граница 10
- симплектический базис 350
- симплициальная теорема де Рама 322
- симплициальное действие 189
- симплициальные гомологии 12
- симплициальный  $G$ -комплекс 190
- комплекс ациклический 15
- объём 239
- сингулярные гомологии 213
- когомологии 219
- сингулярный симплекс 212
- элемент 387
- система абелевых групп направленная 284
- групп ориентационная 149
- скручивание Дена 61
- Смита гомологические группы 198
- теорема 200
- точная последовательность 198
- согласованное семейство элементов 284
- сопряжённое расслоение 186

стабильно параллелизуемое многообразии 171  
 — эквивалентные векторные расщепления 162  
 степень отображения 47  
 Стиррода 5-лемма 25  
 — квадраты 205  
 Стиррода—Эйленберга аксиомы 220, 221  
 Стокса теорема 302  
 сумма прямая абелевых групп 31  
 — связная многообразий 368  
 — Уитни 146  
 сфера гомологическая 56, 91, 200

**Т**

тензорное произведение абелевых групп 36  
 — — цепных комплексов 107  
 теорема Александра 222  
 — Арфа 351  
 — Борсука—Улама 87  
 — Ву 279  
 — Гуревича 124  
 — двойственности Уитни 164  
 — де Рама 310  
 — — симплициальная 322  
 — Кана—Уайтхеда 141  
 — Кюннета 110  
 — — для относительных гомологий 234  
 — — для сингулярных гомологий 231  
 — — относительная 234  
 — Лере—Хирша 183  
 — Лефшеца 67  
 — Милнора 370  
 — Минковского 194  
 — о воротнике 266  
 — — для гладких многообразий 89  
 — о вырезании 215  
 — о цепной гомотопии 14  
 — об ациклических моделях 115  
 — — носителях 16  
 — об изоморфизме Лефшеца 91

— об инвариантности области 223  
 — Понтрягина 167  
 — Пуанкаре 123  
 — Смита 200  
 — Стокса 302  
 — Титце 347  
 — Тома 278  
 — — о сигнатуре 101  
 — Уитни о вложениях сильная 358  
 — Хелли 226, 227  
 — Хопфа 369, 396  
 — Хопфа—Уитни 130  
 — Штифеля 280  
 — Штифеля—Хопфа 121  
 — Эйленберга 128  
 — Эйленберга—Зильбера 231  
 Титце преобразования 347  
 — теорема 347  
 Тома изоморфизм 257  
 — класс 257, 275  
 — теорема 278  
 — — о сигнатуре 101  
 — формула 278  
 топологическая образующая 384  
 топологического многообразия ориентация 250  
 — — фундаментальный класс 251  
 топологическое многообразие ориентированное 251  
 — — ориентируемое 251  
 — — с краем ориентируемое 268  
 тор 377  
 — максимальный 384  
 тотальный цепной комплекс 71  
 точка двойная 358  
 — самопересечения 358  
 точная гомологическая последовательность пар 22  
 — последовательность Майера—Вьеториса 28  
 — — пары 22  
 — — расщепимая 34  
 — — Смита 198  
 — форма 298

точности аксиома 221  
 трансверсальность 84  
 транснормальное вложение 66  
 трансфер 196  
 триангуляция гладкая 311  
 тривиализации расслоения гомотопные 145  
 тривиальное векторное расслоение 144  
 тройки гомологическая последовательность 24  
 тройное произведение Масси 95  
 трюк Уитни 362

**У**

узел Зейферта 332  
 Уитни сумма 146  
 — теорема двойственности 164  
 — — о вложениях сильная 358  
 — трюк 362  
 — формула 161  
 умножение 392  
 — когомологическое внешнее 117  
 — Колмогорова—Александера 70  
 универсальных коэффициентов формулы 43  
 упорядоченный цепной комплекс 71

**Ф**

Фокса исчисление 340  
 форма бинвариантная 381  
 — Зейферта 326  
 — квадратичная над  $\mathbb{Z}_2$  350  
 — левоинвариантная 381  
 — пересечения 99, 280  
 — правоинвариантная 381  
 формула Бу 211  
 — Картана 206  
 — кограницы 203  
 — Тома 278  
 — Уитни 161  
 формулы универсальных коэффициентов 43  
 фундаментальный класс 46

— — топологического многообразия 251  
 — — — многообразия с краем 268  
 — когомологический класс 137  
 функтор ациклический 114  
 — ковариантный 114  
 — контравариантный 114  
 — свободный 114  
 функция перехода 292

**Х**

характеристика эйлера 62, 100  
 — — пары 66, 198  
 характеристический класс Понтрягина 188  
 — — Чженя 178  
 — — — комплексного многообразия 187  
 — — Штифеля—Уитни 155  
 — — —, аксиоматический подход 174  
 — — эйлеров 158  
 Хелли теорема 226, 227  
 Хопфа алгебра 395  
 — инвариант 237  
 — расслоение 237  
 — теорема 369, 396  
 Хопфа—Уитни теорема 130

**Ц**

централизатор 384  
 цепи с замкнутыми носителями 59  
 цепная гомотопия 14, 213  
 цепное отображение 13  
 цепной комплекс 13  
 — — неотрицательный 13  
 — — свободный 13  
 — — тотальный 71  
 — — упорядоченный 71  
 цепных комплексов тензорное произведение 107  
 цепь 11  
 — относительная 21  
 цикл 11



циклическое накрытие бесконечное  
326

циклы гомологичные 11

## Ч

Чеха когомологии 287, 288

Чженя характеристический класс  
178

— — — комплексного многообра-  
зия 187

числа Бетти 12

число Лефшеца 67

— Штифеля—Уитни 167

## Ш

Штифеля многообразие 153

— — комплексное 178

— теорема 280

Штифеля—Уитни класс многообра-  
зия 164

— классы, аксиоматический подход  
174

— характеристический класс 155

— — — дуальный 164

— — — полный 163

— число 167

Штифеля—Хопфа теорема 121

Шуберта многообразие 172

шутовской колпак 126

## Э

Эйленберга теорема 128

Эйленберга—Зильбера теорема 231

Эйленберга—Маклейна простран-  
ство 134

эйлеров класс 158

эйлерова характеристика 62, 100

— — пары 66, 198

эквивалентные векторные расслое-  
ния 144

— микрорасслоения 275

эквивариантное отображение 189

экстраординарная теория (ко)гомо-  
логий 222

элемент регулярный 387

— сингулярный 387

элементарный идеал 329

эффективное действие 194

## Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»

в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (495) 745-80-31; [biblio.mccme.ru](http://biblio.mccme.ru)

Книга — почтой: [biblio.mccme.ru/shop/order](http://biblio.mccme.ru/shop/order)

Книги в электронном виде: [www.litres.ru/mcnmo](http://www.litres.ru/mcnmo)

### Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; [www.umlit.ru](http://www.umlit.ru), [www.textbook.ru](http://www.textbook.ru), [abris.pf](mailto:abris.pf)
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; [www.kniga.ru](http://www.kniga.ru)

### Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; [www.mdk-arbat.ru](http://www.mdk-arbat.ru)
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; [www.bookmg.ru](http://www.bookmg.ru)
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; [www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; [www.arg.ru](http://www.arg.ru)
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; [www.uchebnik.com](http://www.uchebnik.com)
- Сеть магазинов «Шаг к пятёрке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; [www.shkolkniga.ru](http://www.shkolkniga.ru)
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Наука — Всем»; тел. (499) 724-25-45, [www.urss.ru](http://www.urss.ru)
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

### Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; [k\\_i@bk.ru](mailto:k_i@bk.ru)
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

### Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, [www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)

### Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; [df-al-e1@bk.ru](mailto:df-al-e1@bk.ru)